

Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα Ι

Τελική εξέταση 4ης Ιουλίου 2012 - Ακαδημαϊκό έτος 2011–2012

Θέμα 1ο: Θεωρούμε δυο ανεξάρτητες στοχαστικές διαδικασίες Poisson, $\{N_1(t)\}$ και $\{N_2(t)\}$ με ρυθμούς λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Έστω επίσης $\{N(t)\}$ η υπέρθεσή τους. Συμβολίζουμε, τέλος, με $S_1^{(1)}, S_2^{(1)}, S_3^{(1)}, \dots$ τους χρόνους των γεγονότων της $\{N_1(t)\}$, με $S_1^{(2)}, S_2^{(2)}, S_3^{(2)}, \dots$ τους χρόνους των γεγονότων της $\{N_2(t)\}$ και με S_1, S_2, S_3, \dots τους χρόνους των γεγονότων της $\{N(t)\}$. Έστω $t > 0$. Να υπολογιστούν τα παρακάτω:

- (1) $P(N_1(\frac{t}{2}) = k, N_2(\frac{t}{2}) = n - k | N(t) = n + 1), 0 \leq k \leq n,$
- (2) $Var[N_1(t) - N_2(\frac{t}{2})],$
- (3) $P(S_1^{(1)} < S_2^{(2)}),$
- (4) $E[N(\frac{t}{2}) | S_1 \leq t].$

Θέμα 2ο: Επιβάτες φθάνουν στην πλατφόρμα ενός σταθμού του μετρό σύμφωνα με μια στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό λ . Οι συρμοί του μετρό φθάνουν σύμφωνα με μια στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό μ , που είναι ανεξάρτητη από τη στοχαστική διαδικασία αφίξεων των επιβατών. Τη χρονική στιγμή 0 ο σταθμός είναι άδειος. Επιπλέον, ο σταθμός αδειάζει κάθε φορά που φθάνει ένας συρμός αφού όλοι οι πελάτες που βρίσκονται παρόντες στην πλατφόρμα επιβιβάζονται ακαριαία στο συρμό και ο συρμός αναχωρεί άμεσα. Να υπολογιστούν

- (1) Το μέσο πλήθος επιβατών που επιβιβάζονται σε κάθε επίσκεψη συρμού (συναρτήσει του λ και του μ).
- (2) Την πιθανότητα να μην επιβιβαστεί κανένας επιβάτης σε ένα συρμό (συναρτήσει του λ και του μ).
- (3) Το μέσο πλήθος πελατών που έχουν αναχωρήσει από το σταθμό μέχρι τη στιγμή t (συναρτήσει του λ , του μ και του t).

Θέμα 3ο: Έστω X_1, X_2, X_3, \dots ανεξάρτητες και ισόνομες μη-αρνητικές τυχαίες μεταβλητές με συνεχή κατανομή $G(x)$ και $E[X_1^k] = \mu_k < \infty, k \geq 1$. Έστω $S_n = \sum_{i=1}^n X_i, n = 1, 2, \dots$ ($S_0 = 0$) η αντίστοιχη ανανεωτική ακολουθία και $N(t) = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\}, t \geq 0$ η ανανεωτική διαδικασία.

- (1) Έστω $A(t) = t - S_{N(t)}$ ο παρελθών ή αναδρομικός χρόνος ανανέωσης (ηλικία της ανανεωτικής διαδικασίας) τη στιγμή t . Να βρεθεί το όριο

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E \left[\int_0^t A(u)^2 du \right]}{t}$$

(το όριο να δοθεί ως έκφραση κάποιων ροπών από τις μ_1, μ_2, \dots).

- (2) Διατυπώστε μια ανανεωτική εξίσωση για την $H(t) = E[C(t)^3]$, όπου $C(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}$ είναι ο t -εξαρτώμενος χρόνος (δηλαδή $C(t)$ είναι ο ενδιάμεσος χρόνος ανανέωσης που περιέχει τη στιγμή t ή ισοδύναμα ο χρόνος από το προηγούμενο γεγονός έως το επόμενο γεγονός τη στιγμή t). Βρείτε το $\lim_{t \rightarrow \infty} E[C(t)^3]$ (το όριο να δοθεί ως έκφραση κάποιων ροπών από τις μ_1, μ_2, \dots).

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες και 30 λεπτά. Καλή επιτυχία!