ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ – ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΛΛΑΓΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

$$X \to Y = g(X) \quad \Big| \quad (X,Y) \to (U,V) = \underset{\sim}{T}(X,Y)$$

Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών: Έστω (X,Y) συνεχής δισδ. τ.μ. με σ.π. $f_{X,Y}$.
Αν $(u,v)=\underset{\sim}{T}(x,y)=(T_1(x,y),T_2(x,y))$ είναι 1-1 & επί (μετασχηματισμός) και για τον αντίστροφο μετασχηματισμό $\underset{\sim}{T}^{-1}(u,v)=(x,y)$ " $(T_1^*(u,v), T_2^*(u,v))$ " υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial T_1^*(u,v)}{\partial u}$, $\frac{\partial T_1^*(u,v)}{\partial v}$, $\frac{\partial T_2^*(u,v)}{\partial u}$, $\frac{\partial T_2^*(u,v)}{\partial v}$ $\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}\right)$ και είναι συνεχείς, τότε η δισδ. τ.μ. $(U,V)=\underset{\sim}{T}(X,Y)$ είναι συνεχής με σ.π. $f_{U,V}$:

απόδειξη αυτή

$$\boxed{f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(\underset{\sim}{T}^{-1}(u,v))\,|\det J_{\underset{\sim}{T}^{-1}}(u,v)|, \quad u,v\in\mathbb{R}}$$

όπου $J_{\underset{\sim}{T}^{-1}}(u,v)$ είναι ο πίνακας Jacobi (Ιακωβιανός) του αντίστροφου μετ/σμού $\underset{\sim}{T}^{-1}$:

$$J_{\underset{\sim}{T}^{-1}}(u,v) := \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1^*(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial T_1^*(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial T_2^*(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial T_2^*(u,v)}{\partial v} \end{bmatrix}$$

$(\det J_{T^{-1}}(u,v) \neq 0)$.

Πόρισμα: Έστω (X,Y) συνεχής δισδ. τμ. με σ.π. $f_{X,Y}$ και έστω επίσης ότι θέλουμε να βρούμε την κατανομή της τμ. $U=g(X,Y)$. Τότε κάνουμε το εξής: Θέλουμε μία επιπλέον βοηθητική τμ. $V=Y$ (ή $V=X$ όποια βολεύει ~~καλύτερα~~) και θεωρούμε τον μετασχηματισμό
$\left.\begin{array}{l} u=g(x,y) \\ v=y \end{array}\right\} \Rightarrow (u,v)=\underset{\sim}{T}(x,y)=(g(x,y),y)$. Αν $\underset{\sim}{T}$ 1-1 & επί και $\exists$ οι μερ. παράγωγοι $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$ και είναι συνεχείς, τότε εφαρμόζουμε το παραπάνω θεώρημα, επειδή η ορίζουσα του $J_{T^{-1}}$ είναι:

$$\det J_{\underset{\sim}{T}^{-1}}(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \underset{y=v}{=} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial v}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u},$$

$x=g^*(u,v)$

προκύπτει ότι η σ.π. $f_{U,V}$ είναι $f_{U,V}(u,v)=f_{X,Y}(\underset{\sim}{T}^{-1}(u,v))\left|\frac{\partial x}{\partial u}\right|, \quad u,v\in\mathbb{R}$

$$\left(\left.\begin{array}{l} u=g(x,y) \\ v=y \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} x=g^*(u,v) \\ y=v \end{array} \Rightarrow \underset{\sim}{T}^{-1}(u,v)=(g^*(u,v),v)=(x,y) \right)$$

περιθώρια σ.π. της U →

$$f_U(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{U,V}(u,v)\,dv \rightarrow \text{η ζητούμενη σ.π. της } U$$

απόδειξη αυτή

$$= \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(\underset{\sim}{T}^{-1}(u,v))\left|\frac{\partial g^*(u,v)}{\partial u}\right| dv}$$

Ορσ. <u>Καταναμή Βήτα (Beta) (συνεχής)</u> Μία τ.μ. X ακολουθεί την κατ. Βήτα με παραμέτρους $\alpha>0$, $\beta>0$ (συμβ. $X\sim \text{Βήτα}(\alpha,\beta)$) όταν έχει σ.π.π.

$$f_X(x)=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\underbrace{\mathbb{1}(0<x<1)}_{\text{δείκτρια}}=\begin{cases}\frac{1}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, & 0<x<1\\ 0, & x\le 0 \text{ ή } x\ge 1\end{cases}$$

$S_X=(0,1)$

όπου $B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$ είναι η συνάρτηση Βήτα στο σημείο (α,β), $\alpha,\beta>0$. //

<u>Παρατήρηση</u>: $\underbrace{\Gamma(\alpha)}_{\text{συνάρτηση Γάμμα}}=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$, $\alpha>0$, $B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

- $E(X^k)=\int_0^1 x^k f_X(x)dx=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}\underbrace{\int_0^1 x^{k+\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx}=\frac{B(\alpha+k,\beta)}{B(\alpha,\beta)}$, $k=1,2,\ldots$

- $k=1\to E(X)=\frac{B(\alpha+1,\beta)}{B(\alpha,\beta)}=\frac{\Gamma(\alpha+1)\cancel{\Gamma(\beta)}\,\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha)\cancel{\Gamma(\beta)}}=\frac{\alpha\cancel{\Gamma(\alpha)}\cancel{\Gamma(\alpha+\beta)}}{(\alpha+\beta)\cancel{\Gamma(\alpha+\beta)}\cancel{\Gamma(\alpha)}}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$

- $k=2\to E(X^2)=\frac{B(\alpha+2,\beta)}{B(\alpha,\beta)}=\frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta)\,\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)\,\Gamma(\alpha+\beta)}=\ldots=\frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}$

$$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\ldots=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

Άσκηση: Έστω X,Y ανεξάρτητες τ.μ. με $X\sim\Gamma(\alpha,\lambda)$ (Γάμμα) και $Y\sim\Gamma(\beta,\lambda)$, $\alpha,\beta,\lambda>0$. Θεωρούμε $(U,V)=\left(\frac{X}{X+Y}, X+Y\right)$. Να δ.ο. U,V ανεξάρτητες και να βρεθούν οι περιθώριες σ.π. των U,V.

<u>Λύση</u>.

$$\left.\begin{array}{l}u=\frac{x}{x+y}\\ v=x+y\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}u=\frac{x}{v}\\ v=x+y\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=u\cdot v\\ y=v-x\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}x=u\cdot v=g_1^*(u,v)\\ y=v(1-u)=g_2^*(u,v)\end{array}$$

$(x,y)=\underset{\sim}{T}^{-1}(u,v)=(g_1^*(u,v),g_2^*(u,v))=(uv,v(1-u))$ (ο $\underset{\sim}{T}$ είναι 1-1 και επί)

$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial(uv)}{\partial u}=v$, $\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{\partial(uv)}{\partial v}=u$, $\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial[v(1-u)]}{\partial u}=-v$, $\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial[v(1-u)]}{\partial v}=1-u$

(∃ οι μερικές παράγωγοι και είναι συνεχείς)

Άρα η ορίζουσα του Ιακωβιανού πίνακα του T^{-1} είναι:

$$\det J_{\underset{\sim}{T}^{-1}}(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}v&u\\-v&1-u\end{vmatrix}=v(1-u)-(-v)u=v(1-u)+vu=v$$

$f_X(x)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}\mathbb{1}(x>0)$, $f_Y(y)=\frac{\lambda^\beta}{\Gamma(\beta)}y^{\beta-1}e^{-\lambda y}\mathbb{1}(y>0)$ $\left(\begin{array}{l}S_X=(0,\infty)\\ S_Y=(0,+\infty)\end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{l}u=\frac{x}{x+y}\\ \text{και}\\ v=x+y\end{array}\right\}\begin{array}{c}x>0\\ \Longrightarrow\\ y>0\end{array}\begin{array}{c}0<u<1\\ \text{και}\\ v>0\end{array}\rightsquigarrow\begin{array}{l}S_{X,Y}=(0,+\infty)\times(0,+\infty)\\ S_{U,V}=(0,1)\times(0,+\infty)\end{array}\Bigg)$$

Από το Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών, έχουμε ότι:

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(T^{-1}(u,v))\,|\det J_{T^{-1}}(u,v)| = f_{X,Y}(uv, v(1-u))\,|v| \underset{X,Y \text{ ανεξάρτητες}}{=}$$

$$= f_X(uv) f_Y(v(1-u))|v|, \forall u,v \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}(uv)^{a-1} e^{-\lambda uv} \mathbb{1}(uv>0) \frac{\lambda^b}{\Gamma(b)} (v(1-u))^{b-1} e^{-\lambda v(1-u)} \mathbb{1}(v(1-u)>0)|v|, \ u,v \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u^{a-1} v^{a+b-2} |v| (1-u)^{b-1} e^{-\lambda v} \mathbb{1}(uv>0) \cdot \mathbb{1}(v(1-u)>0), \ u,v \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Είναι: $\left.\begin{matrix} uv>0 \\ \text{και } v(1-u)>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} u>0 \\ v>0 \end{matrix}$ κι $v(1-u)>0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} v>0 \\ \text{και } 0<u<1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ $\mathbb{1}(uv>0)\cdot\mathbb{1}(v(1-u)>0) = \mathbb{1}(v>0)\mathbb{1}(0<u<1)$ (2)

$v = x+y > 0$

$$(1) \overset{(2)}{\Rightarrow} \boxed{f_{U,V}(u,v) = \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u^{a-1} \cdot v^{a+b-1} (1-u)^{b-1} e^{-\lambda v} \mathbb{1}(v>0)\mathbb{1}(0<u<1), \ u,v \in \mathbb{R}.} \quad (3)$$

Παρατηρούμε ότι η σ.π.

$$f_{U,V}(u,v) = \underbrace{\left(\underbrace{\frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}}_{\text{σταθ.}} u^{\alpha-1}(1-u)^{b-1}\mathbb{1}(0<u<1)\right)}_{=g(u)} \underbrace{\left(v^{a+b-1}e^{-\lambda v}\mathbb{1}(v>0)\right)}_{\cdot\, h(v)}, \ u,v \in \mathbb{R}$$

γράφεται ως γινόμενο $g(u)h(v)$, όπου η $g(u)$ είναι συνάρτηση μόνο της u (ανεξάρτητη της v) και η $h(v)$ είναι συνάρτηση μόνο της v (ανεξάρτητη της u) και συνεπώς οι τ.μ. U,V είναι ανεξάρτητες.

α' τρόπος: $f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{U,V}(u,v)\,dv = \begin{cases} 0, & \text{αν } u \le 0 \text{ ή } u \ge 1 \\ \int_0^{+\infty} f_{U,V}(u,v)\,dv, & 0<u<1 \end{cases} = \dots$

$S_U = (0,1)$ → πράξεις ...

$$= \dots = \underbrace{\frac{\Gamma(\alpha+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}}_{B(a,b)} u^{a-1}(1-u)^{b-1}\mathbb{1}(0<u<1) \Rightarrow U \sim \text{Βήτα}(\alpha,b).$$

Ομοίως $f_V(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{U,V}(u,v)\,du = \begin{cases} 0, & \text{αν } v \le 0 \\ \int_0^1 f_{U,V}(u,v)\,du, & \text{αν } v>0 \end{cases} = \dots =$

$S_V = (0,+\infty)$ → πράξεις

$$= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(\alpha+b)} v^{a+b-1} e^{-\lambda v}\mathbb{1}(v>0) \Rightarrow V \sim \Gamma(a+b,\lambda). \to \text{κατανομή Γάμμα}$$

β' τρόπος:

$$(3) \Rightarrow f_{U,V}(u,v) = \underbrace{\left\{\frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(\alpha+b)} v^{a+b-1} e^{-\lambda v}\mathbb{1}(v>0)\right\}}_{=f_V(v) \to \text{σ.π. } \Gamma(a+b,\lambda)} \cdot \underbrace{\left\{\frac{\Gamma(\alpha+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u^{\alpha-1}(1-u)^{b-1}\mathbb{1}(0<u<1)\right\}}_{f_U(u) \to \text{σ.π. Βήτα}(\alpha,b)}, \ u,v \in \mathbb{R}$$

$\Longrightarrow$ $V \sim \Gamma(\alpha+b,\lambda)$, $U \sim \text{Βήτα}(\alpha,b)$. //

Παρατήρηση: Είδαμε πριν ότι αν $f_{U,V}(u,v)=g(u)h(v)$, $\forall\, u,v\in\mathbb{R}$ όπου η g είναι ανεξάρτητη της v και η h είναι αυτή της u, τότε οι τ.μ. U,V είναι ανεξάρτητες.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν, όμως, είχαμε την σ.π. $f_{U,V}(u,v)=\begin{cases}8uv, & 0<u<v<1\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases} =$

$= 8uv\,\mathbb{1}(0<u<v<1)$, $u,v\in\mathbb{R}$, τότε $f_{U,V}(u,v)\neq g(u)h(v)$, δηλαδή η $f_{U,V}$ δεν μπορεί να γραφεί ως γινόμενο $g(u)\cdot h(v)$, όπου g αυτή της v και h αυτή της u.

Άσκηση Έστω X,Y ανεξάρτητες τμ. και ισόνομες από την Εκθετική(λ), $\lambda>0$. Να βρεθεί η από κοινού σ.π. των U,V, όπου $U=X+Y$, $V=X-Y$. Είναι οι τμ. U,V ανεξάρτητες;

Λύση
$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\geq 0\end{cases} = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}(x>0),\quad f_Y(y)=\lambda e^{-\lambda y}\mathbb{1}(y>0)$$

$S_X=(0,+\infty)$, $S_Y=(0,+\infty)$.

$$\left.\begin{matrix}u=x+y\\ v=x-y\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}x=\frac{u+v}{2}\\ y=\frac{u-v}{2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow (x,y)=\underset{\sim}{T}^{-1}(u,v)=\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)$$

Έχουμε ότι: $x>0$ και $y>0$ $\Rightarrow$ $\left.\begin{matrix}\frac{u+v}{2}>0\\ \text{(ς')}\ \frac{u-v}{2}>0\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix}u+v>0\\ \text{ς'}\\ u-v>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow$ $\left.\begin{matrix}u>0\\ \text{και}\\ -u<v<u\end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix}u>0\\ \text{και}\\ |v|<u\end{matrix}$ ⊛

$$S_{U,V}=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2: u>0 \text{ και } |v|<u\}=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2: v\in\mathbb{R} \text{ και } |v|<u<+\infty\}$$

$S_{U,V}$ → το χωρίο στο οποίο δεν μηδενίζεται η σ.π. $f_{U,V}(u,v)$

(Το $S_{U,V}$ είναι D_u-απλό και D_v-απλό χωρίο)

$$\det J_{\underset{\sim}{T}^{-1}}(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac12 & \frac12\\ \frac12 & -\frac12\end{vmatrix}=-\frac14-\frac14=-\frac12.$$

Άρα από το θεώρημα αλλαγής μεταβλητών, έχουμε ότι: → αφού X,Y ανεξάρτητες

$$f_{U,V}(u,v)=f_{X,Y}\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)\left|\det J_{\underset{\sim}{T}^{-1}}(u,v)\right|=f_X\left(\frac{u+v}{2}\right)f_Y\left(\frac{u-v}{2}\right)\left|-\frac12\right|,\quad u,v\in\mathbb{R}$$

$$=\lambda\cdot e^{-\lambda\left(\frac{u+v}{2}\right)}\mathbb{1}\left(\frac{u+v}{2}>0\right)\lambda e^{-\lambda\cdot\left(\frac{u-v}{2}\right)}\mathbb{1}\left(\frac{u-v}{2}>0\right)\frac12,\quad u,v\in\mathbb{R}$$

$$=\frac12\lambda^2e^{-\lambda u}\,\mathbb{1}\left(\frac{u+v}{2}>0\right)\mathbb{1}\left(\frac{u-v}{2}>0\right)=\boxed{\frac12\lambda^2e^{-\lambda u}\,\mathbb{1}(u>0,|v|<u)},\quad u,v\in\mathbb{R}$$

δες ⊛ παραπάνω

$\neq g(u)h(v)$, δηλαδή η $f_{U,V}(u,v)$ δεν μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο $g(u)h(v)$, $\forall\, u,v\in\mathbb{R}$. Συνεπώς, για να ελέγξω την ανεξαρτησία, θα βρω τις περιθώριες σ.π. των U,V:

• περιθώρια σ.π. της τ.μ. U : $S_U=(0,+\infty)$

$$f_U(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{U,V}(u,v)\,dv = \begin{cases} 0, & \alpha\nu\ u\le 0 \\ \int_{-u}^{u} \frac{1}{2}\lambda^2 e^{-\lambda u}\,dv, & \alpha\nu\ u>0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \alpha\nu\ u\le 0 \\ \frac{1}{2}\lambda^2 e^{-\lambda u}\int_{-u}^{u} dv, & u>0 \end{cases}$$

προσοχή

$$= \begin{cases} 0, & u\le 0 \\ \frac{1}{2}\lambda^2 e^{-\lambda u}[v]_{-u}^{u}, & u>0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & u\le 0 \\ \lambda^2 u e^{-\lambda u}, & u>0 \end{cases} = \lambda^2 u e^{-\lambda u}\mathbb{1}(u>0)$$

• περιθώρια σ.π. της τ.μ. V : $S_V=\mathbb{R}$

$$f_V(v)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{U,V}(u,v)\,du = \int_{|v|}^{+\infty}\frac{1}{2}\lambda^2 e^{-\lambda u}\,du = -\frac{\lambda}{2}\int_{|v|}^{+\infty}\left(e^{-\lambda u}\right)' du$$

$v\in\mathbb{R}$

$$= -\frac{\lambda}{2}\left[e^{-\lambda u}\right]_{|v|}^{+\infty} = -\frac{\lambda}{2}\left(0-e^{-\lambda|v|}\right) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|v|},\ v\in\mathbb{R}$$

Παρατηρούμε ότι $f_{U,V}(u,v)\neq f_U(u)f_V(v) \Rightarrow U,V$ όχι ανεξάρτητες.

Άσκηση. Έστω X,Y ανεξάρτητες τ.μ. και ισόνομες από την $N(0,1)$. Να βρεθεί η σ.π. της τ.μ. $U=\frac{X}{Y}$.

Λύση Θεωρούμε τον μετασχ. $\underset{\sim}{T}(x,y)=(u,v)$ με $\left.\begin{matrix} u=\frac{x}{y} \\ v=y \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x=uv \\ y=v \end{matrix}}$

Βοηθητική μεταβλητή $\rightarrow v=y$

Δηλ. $\exists$ ο αντίστροφος μετασχ. $\underset{\sim}{T}^{-1}(u,v)=(uv,v)=(x,y)$. (Επίσης, υπάρχουν οι μερ. παράγωγοι $\frac{\partial x}{\partial u}=v$, $\frac{\partial x}{\partial v}=u$ και είναι συνεχείς). Άρα η ορίζουσα του Ιακωβιανού του αντ. μετασχ. $\underset{\sim}{T}^{-1}$ είναι:

$$\det J_{\underset{\sim}{T}^{-1}}(u,v)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ \frac{\partial v}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = v\in\mathbb{R}$$

Από το θεώρημα αλλαγής μεταβλητών έχουμε ότι:

$$f_{U,V}(u,v)=f_{X,Y}(uv,v)\,|v| \underset{\substack{X,Y \\ \text{ανεξ.}}}{=} f_X(uv)f_Y(v)|v| \underset{\substack{X,Y \\ \text{αν/τες} \\ N(0,1)}}{=} \varphi(uv)\varphi(v)|v|,\quad u,v\in\mathbb{R}$$

$(X,Y\sim N(0,1))$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2v^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-v^2/2}\cdot|v|,\quad u,v\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{2\pi}|v|e^{-\frac{v^2}{2}(1+u^2)}, \quad u,v \in \mathbb{R}}$$

Εμείς όμως θέλουμε τη σ.π. της τ.μ. $U = \frac{X}{Y}$. Το πεδίο τιμών της U είναι το $\mathbb{R}$.
($S_U = \mathbb{R}$, $S_V = \mathbb{R}$)

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{U,V}(u,v)\,dv = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |v|e^{-\frac{v^2}{2}(1+u^2)}\,dv$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}(-v)e^{-\frac{v^2}{2}(1+u^2)}\,dv + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} v e^{-\frac{v^2}{2}(1+u^2)}\,dv$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} v e^{-\frac{v^2}{2}(1+u^2)} + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} v e^{-\frac{v^2}{2}(1+u^2)}\,dv = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} v e^{-\frac{v^2}{2}(1+u^2)}\,dv$$

θέτουμε $s = \frac{v^2}{2}(1+u^2)$ $\Downarrow$ $ds = v(1+u^2)\,dv$

$$= \frac{1}{\pi(1+u^2)}\underbrace{\int_{0}^{+\infty} e^{-s}\,ds}_{=1} = \frac{1}{\pi(1+u^2)}\underbrace{\left[-e^{-s}\right]_0^{\infty}}_{-(0-1)} = \frac{1}{\pi(1+u^2)}, \quad u \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow U \sim$ Cauchy.

Άσκηση Έστω X, Y με σ.π. $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2y^2}, & x>1 \text{ κ' } y>1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \frac{1}{x^2y^2}\mathbb{1}(x>1, y>1)$

Να βρείτε την σ.π. της τ.μ. $U = XY$ ($\rightarrow$ γινόμενο των X, Y).

Λύση Θεωρούμε τον μετασχηματισμό $(u,v) = \underset{\sim}{T}(x,y)$ όπου

βοηθητική $\rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} u = xy \\ v = y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \frac{u}{y} \\ y = v \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \frac{u}{v} \\ y = v \end{array}\right\} \Rightarrow (x,y) = \underset{\sim}{T}^{-1}(u,v) = \left(\frac{u}{v}, v\right)$

Jacobi
$$J_{\underset{\sim}{T}^{-1}}(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det J_{\underset{\sim}{T}^{-1}}(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{v}$$

$$\left.\begin{array}{l} x>1 \\ \text{κ' } y>1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{u}{v}>1 \\ \text{κ' } y=v>1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} u>v \\ \text{κ' } v>1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1<v<u<+\infty$$

$\Downarrow$

$S_{U,V} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 1<v<u<+\infty\}$ $\rightarrow$ το χωρίο στο οποίο δεν μηδενίζεται η σ.π. $f_{U,V}(u,v)$

Από το θεώρημα αλλαγής μεταβλητών, έχουμε ότι:

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}\left(\underset{\sim}{T}^{-1}(u,v)\right)\left|\det J_{\underset{\sim}{T}^{-1}}(u,v)\right| = f_{X,Y}\Big(\underset{x}{\frac{u}{v}}, \underset{y}{v}\Big)\left|\frac{1}{v}\right|$$

$$\stackrel{v\neq 0}{=} \frac{1}{v}\cdot\frac{1}{\frac{u^2}{v^2}v^2}\mathbb{1}\left(\frac{u}{v}>1, v>1\right), \quad u,v\in\mathbb{R}$$

$$= \frac{1}{v\cdot u^2}\mathbb{1}(1<v<u<+\infty), \quad u,v\in\mathbb{R}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{vu^2}, & \text{αν } \underbrace{1<v<u<+\infty}_{} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad \longrightarrow S_{u,v}$$

Άρα η περιθώρια σ.π. της τ.μ. $U=XY$ είναι:

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{U,V}(u,v)\,dv = \begin{cases} 0, & \text{αν } u\leq 1 \\ \int_1^u \frac{1}{vu^2}\,dv, & \text{αν } u>1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{αν } u\leq 1 \\ \frac{1}{u^2}\int_1^u \frac{1}{v}\,dv, & \text{αν } u>1 \end{cases}$$

$S_U=(1,+\infty)$

$$= \begin{cases} 0, & \text{αν } u\leq 1 \\ \frac{1}{u^2}\left[\ln v\right]_1^u, & \text{αν } u>1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{αν } u\leq 1 \\ \frac{1}{u^2}(\ln u - 0), & \text{αν } u>1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{αν } u\leq 1 \\ \frac{\ln u}{u^2}, & \text{αν } u>1 \end{cases}$$

$$= \frac{\ln u}{u^2}\mathbb{1}(u>1).$$