

## ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι

### Εξετάσεις Φεβρουαρίου 2009- Ομάδα Α

**Θέμα 1. α)** Ας θεωρήσουμε ένα σύνολο 21 ατόμων  $\{a_0, a_1, \dots, a_{20}\}$  των οποίων καταγράφουμε τα γενέθλια. Να υπολογισθεί η πιθανότητα το άτομο  $a_0$  να έχει γενέθλια την ίδια ημέρα με *i*) τουλάχιστον ένα, *ii*) τουλάχιστον δύο και *iii*) ακριβώς τρία από τα υπόλοιπα 20 άτομα  $\{a_1, \dots, a_{20}\}$ .

**β)** Έστω ότι 10 αριθμοί εξάγονται τυχαία, χωρίς επανάθεση, από μία κληρωτίδα που περιέχει τους αριθμούς  $\{1, 2, \dots, 49\}$ . Οι εξαγόμενοι αριθμοί επανατοποθετούνται στην κληρωτίδα και ακολούθως 6 αριθμοί εξάγονται τυχαία, χωρίς επανάθεση. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες εξαγωγής στη δεύτερη κλήρωση *i*) ακριβώς 5 και *ii*) τουλάχιστον 5 από τους αριθμούς που εξάγονται στην πρώτη κλήρωση.

**Θέμα 2.** Ας θεωρήσουμε ένα πομπό ο οποίος εκπέμπει τα σήματα 0 και 1 σε αναλογία 2 προς 3. Ένας δέκτης των σημάτων αυτών λαμβάνει λανθασμένο σήμα σε ποσοστό 2/100. **α)** Σε μία εκπομπή δύο διαδοχικών σημάτων, να υπολογισθούν *i*) η πιθανότητα ο δέκτης να πάρει τα σήματα (0,0) και *ii*) η δεσμευμένη πιθανότητα ο πομπός να έχει στείλει τα σήματα (0,0) δεδομένου ότι ο δέκτης πήρε τα σήματα (0,0).

**β)** Σε μία εκπομπή 10 διαδοχικών σημάτων έστω  $X$  ο αριθμός των σημάτων 0 που εκπέμπονται. Να υπολογισθούν *i*) η συνάρτηση πιθανότητας  $f(x) = P(X=x)$ ,  $x=0, 1, \dots, 10$  (παραθέτοντας την ικανοποίηση των σχετικών προϋποθέσεων) και *ii*) η μέση τιμή  $E(X)$  (υπολογίζοντας το σχετικό άθροισμα).

**Θέμα 3.** Ο χρόνος ζωής  $X$  ενός ηλεκτρονικού εξαρτήματος είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} c(x-2)^2 e^{-3(x-2)^3}, & x > 2, \\ 0, & x \leq 2, \end{cases}$$

όπου  $c > 0$ .

**α)** Να υπολογισθεί η τιμή του  $c$ .

**β)** Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής  $X$ .

**γ)** Να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής  $Y = 3(X-2)^3$ .

**δ)** Να υπολογισθούν η μέση τιμή και η διασπορά της  $Y$ .

**Θέμα 4. α)** Έστω διδιάστατη συνεχής τυχαία μεταβλητή  $(X, Y)$  με συνάρτηση πυκνότητας:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{9}, & 0 < x < 3 \text{ και } 0 < y < 3-x, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Να βρεθούν: *i*) η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας  $f_X(x)$  της  $X$  και *ii*) η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας  $f_{Y|X}(y|x)$  της  $Y$  δεδομένης της  $X=x$ .

**β)** Να βρεθεί η ροπογεννήτρια της Εκθετικής κατανομής με παράμετρο  $\theta > 0$  (όπου αυτή υπάρχει).

**γ)** Δύο παίκτες Α και Β παίζουν το εξής παιχνίδι: ρίχνουν διαδοχικά ένα ζάρι και αν η ένδειξη είναι 1, 3 ή 5 τότε ο παίκτης Α δίνει στον παίκτη Β ποσό 1, 2 ή 3 ευρώ, αντίστοιχα. Αν η ένδειξη είναι 2, 4 ή 6, τότε ο Β δίνει στον Α ποσό 3, 2 ή 1 ευρώ, αντίστοιχα. Να υπολογισθεί προσεγγιστικά η πιθανότητα σε 80 ρίψεις ο παίκτης Α να κερδίσει συνολικά τουλάχιστον 20 ευρώ (δίνονται:  $\Phi(1.035) = 0.84966$ ,  $\Phi(1.553) = 0.93943$ ,  $\Phi(1.673) = 0.95254$ ,  $\Phi(2.151) = 0.98422$ ).

**Απαντήστε σε 3 από τα 4 θέματα. Διάρκεια εξέτασης 2 ½ ώρες.**

**Καλή Επιτυχία.**