ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2010 - Ομάδα Β

1. (15 βαθμοί) Σε μία ρίψη δυό (διακεκριμένων) αμερόληπτων ζαριών, ποιά είναι η πιθανότητα το άθροισμα των ενδείξεων τους να είναι τουλάχιστον 4?

2. (20 βαθμοί) Για τα νομίσματα A_1, A_2, η πιθανότητα εμφάνισης της ένδειξης "κεφαλή" σε μιά ρίψη είναι $p_1 = 1/3, p_2 = 1/6$ αντίστοιχα. Επιλέγουμε τυχαία ένα απο τα δύο (με ίση πιθανότητα) και εκτελούμε διαδοχικές ρίψεις μέχρι την εμφάνιση για πρώτη φορά της ένδειξης "κεφαλή". Έστω N ο απαιτούμενος αριθμός ρίψεων.

(α) Να βρεθούν οι πιθανότητες $P(N = k), P(N \geq k)$ για $k = 1, 2, \ldots$

(β) Αν σε μία πραγματοποίηση του πειράματος έχουμε $N = 4$, ποιό νόμισμα είναι πιθανότερο να είχαμε επιλέξει στην αρχή?

3. (20 βαθμοί) Η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 2]$, δηλαδή με πυκνότητα $(1/2)\mathbf{1}_{[0,2]}(x)$

(α) Να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας $f_Y(y)$ της τυχαίας μεταβλητής $Y := 1/X$.
(Υπόδειξη: Εξετάστε χωριστά τις περιπτώσεις $y < 1/2, y \geq 1/2$)

(β) Να υπολογιστούν οι μέσες τιμές $E(\sin X), E(1/X^2)$.

4. (20 βαθμοί) Έστω (X, Y) διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x, y) := \begin{cases} x + y & \text{για } 0 < x, y < 1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(α) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X > 2Y)$.

(β) Να υπολογιστεί η συνδιακύμανση των X, Y.

(γ) Είναι οι X, Y ανεξάρτητες?

5. (20 βαθμοί) (α) Να υπολογιστεί η πιθανογεννήτρια $\Phi_X(t) := E(t^X)$ αν η X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n \in \mathbb{N}, p \in (0, 1)$. Για ποιά $t \in \mathbb{R}$ είναι η Φ_X πεπερασμένη?

(β) Ποιές απο τις συναρτήσεις

$$H_1(t) := 2\left(\frac{3}{4}t + \frac{1}{4}\right)^5, \;\; H_2(t) := (2 - t)e^{t-1}, \;\; H_3(t) := \left(\frac{3}{4}t + \frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right)^3$$

με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι πιθανογεννήτριες μιας τυχαίας μεταβλητής με τιμές στο $\mathbb{N}$? Δικαιολογήστε την απάντηση σας.

6. (20 βαθμοί) Θεωρούμε μια ακολουθία ρίψεων ενός αμερόληπτου ζαριού. Για j θετικό ακέραιο, θέτουμε $X_j = 1$ αν το αποτέλεσμα της j ρίψης είναι 1 ή 6, και $X_j = 0$ διαφορετικά.

(α) Να υπολογιστεί η μέση τιμή και η διασπορά της X_1.

(β) Έστω T ο αριθμός των αποτελεσμάτων 1 ή 6 στις πρώτες 450 ρίψεις. Να υπολογιστεί προσεγγιστικά η πιθανότητα $P(130 < T < 140)$.

Δίνεται ότι $\Phi(1) \approx 0.8413, \Phi(1.5) \approx 0.9332, \Phi(2) \approx 0.9773$...

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Πιθανότητες Ι, Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2010 - Ομάδα Β

Λύσεις

2.

(β) Υπολογίζουμε το πηλίκο

$$\frac{P(\text{ επιλέγουμε το } A_1 \,|\, N=4)}{P(\text{ επιλέγουμε το } A_2 \,|\, N=4)} = \frac{p_1(1-p_1)^3}{p_2(1-p_2)^3} = 2\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{128}{125} > 1.$$

Άρα είναι πιθανότερο να έχουμε επιλέξει το νόμισμα A_1.

3. (α) Για $y \le 0$ έχουμε $P(1/X \le y) = 0$, ενώ για $y > 0$ ισχύει $P(1/X \le y) = P(X \ge 1/y)$, το οποίο ισούται με 0 αν $1/y > 2$ και με $(1/2)(2 - 1/y)$ αν $1/y \le 2$. Άρα η συνάρτηση κατανομής της Y είναι

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2y} & \text{αν } y \ge 1/2, \\ 0 & \text{αν } y < 1/2. \end{cases}$$

Η F_Y είναι συνεχής παντού (άρα δεν υπάρχουν άτομα) και παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο συμπλήρωμα ενός πεπερασμένου συνόλου (στο $\mathbb{R} \setminus \{1/2\}$), και άρα η Y είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα την παράγωγο της F_Y. Δηλαδή

$$f_Y(y) = \frac{1}{2y^2}\mathbf{1}_{(1/2,\infty)}(y)$$

για $y \in \mathbb{R}$.

(β) Η πρώτη μέση τιμή ισούται με

$$E(\sin X) = \int_0^2 \frac{1}{2}\sin x \, dx = \frac{1}{2}(1 - \cos 2),$$

ενώ

$$E(1/X^2) = \int_0^2 \frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\, dx = \frac{1}{2}[-1/x]_{0+}^2 = \infty.$$

4. (α) Η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με 5/24.

(β) Βρίσκουμε $E(XY) = 1/3, EX = EY = 7/12$, και άρα $\mathrm{Cov}(X,Y) = -1/144$.

5. (α) Η πιθανογεννήτρια της X είναι

$$\Phi_X(t) = \sum_{k=0}^n t^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pt)^k (1-p)^{n-k} = (pt + 1 - p)^n,$$

και είναι πεπερασμένη για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Η τελευταία ισότητα έπεται απο το διωνυμικό θεώρημα.

(β) Η πιθανογεννήτρια Φ_Z μιας τυχαίας μεταβλητής Z με τιμές στο $\mathbb{N}$ ικανοποιεί $\Phi_Z(1) = 1, \Phi_Z(t) > 0$ για κάθε $t > 0$. Η H_1 παραβιάζει τον πρώτο περιορισμό, ενώ η H_2 παραβιάζει τον δεύτερο. Άρα οι H_1, H_2 δεν είναι πιθανογεννήτριες.

Για την H_3, παίρνουμε δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές X, Y που έχουν διωνυμική κατανομή με παραμέτρους (n, p) τα ζεύγη $(2, 3/4)$ και $(3, 1/2)$ αντίστοιχα. Από το ερώτημα (α) και απο την ιδιότητα $\Phi_{X+Y} = \Phi_X \Phi_Y$, που ισχύει γιατί οι X, Y είναι ανεξάρτητες, έπεται ότι η H_3 είναι η πιθανογεννήτρια των $X + Y$.

6. Δουλέυοντας όπως στην ομάδα Α οδηγούμαστε στην προσέγγιση $\Phi(-1) - \Phi(-2) = \Phi(2) - \Phi(1)$.