ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2010 - Ομάδα Α

1. (15 βαθμοί) Σε μία ρίψη δυό (διακεκριμένων) αμερόληπτων ζαριών, ποιά είναι η πιθανότητα το άθροισμα των ενδείξεων τους να είναι το πολύ 10?

2. (20 βαθμοί) Για τα νομίσματα A_1, A_2, η πιθανότητα εμφάνισης της ένδειξης "κεφαλή" σε μιά ρίψη είναι $p_1 = 1/2, p_2 = 1/10$ αντίστοιχα. Επιλέγουμε τυχαία ένα απο τα δύο (με ίση πιθανότητα) και εκτελούμε διαδοχικές ρίψεις μέχρι την εμφάνιση για πρώτη φορά της ένδειξης "κεφαλή". Έστω N ο απαιτούμενος αριθμός ρίψεων.

(α) Να βρεθούν οι πιθανότητες $P(N = k), P(N \geq k)$ για $k = 1, 2, \ldots$

(β) Αν σε μία πραγματοποίηση του πειράματος έχουμε $N = 6$, ποιό νόμισμα είναι πιθανότερο να είχαμε επιλέξει στην αρχή? Δίνεται ότι $5^6 < 9^5$.

3. (20 βαθμοί) Η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda \in (0, \infty)$, δηλαδή με πυκνότητα $\lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$.

(α) Να βρεθεί η πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής $Y := 1/X$.

(β) Να υπολογιστούν αναλυτικά οι μέσες τιμές $E(X^2), E(1/X^2)$.

4. (20 βαθμοί) Έστω (X, Y) διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y & \text{για } 0 < x, y < 1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(α) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P\left(X > 3Y\right)$.

(β) Να υπολογιστεί η συνδιακύμανση των X, Y.

(γ) Είναι οι X, Y ανεξάρτητες?

5. (20 βαθμοί) (α) Να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια $M_X(t) := E(e^{tX})$ αν η X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ. Για ποιά $t \in \mathbb{R}$ είναι η $M_X(t)$ πεπερασμένη?

(β) Ποιές απο τις συναρτήσεις

$$H_1(t) := \begin{cases} 4/(2-t) & \text{για } t \in (-\infty, 2), \\ \infty & \text{για } t \in [2, \infty), \end{cases} \quad H_2(t) := \begin{cases} \frac{6}{(2-t)(3-t)} & \text{για } t \in (-\infty, 2), \\ \infty & \text{για } t \in [2, \infty), \end{cases}$$

$$H_3(t) := \cos t \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}$$

είναι ροπογεννήτριες μιας τυχαίας μεταβλητής με τιμές στο $\mathbb{R}$? Δικαιολογήστε την απάντηση σας.

6. (20 βαθμοί) Θεωρούμε μια ακολουθία ρίψεων ενός αμερόληπτου ζαριού. Για j θετικό ακέραιο, θέτουμε $X_j = 1$ αν το αποτέλεσμα της j ρίψης είναι 5 ή 6, και $X_j = 0$ διαφορετικά.

(α) Να υπολογιστεί η μέση τιμή και η διασπορά της X_1.

(β) Έστω T ο αριθμός των αποτελεσμάτων 5 ή 6 στις πρώτες 1800 ρίψεις. Να υπολογιστεί προσεγγιστικά η πιθανότητα $P(580 < T < 640)$.

Δίνεται ότι $\Phi(1) \approx 0.8413, \Phi(1.5) \approx 0.9332, \Phi(2) \approx 0.9773$...

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Πιθανότητες Ι, Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2010 - Ομάδα Α

Λύσεις

1. Έστω X_1, X_2 οι ενδείξεις των δύο ζαριών μετά την ρίψη. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\begin{aligned} P(X_1+X_2 \leq 10) &= 1 - P(X_1+X_2 > 10) = 1 - P(X_1+X_2=11) - P(X_1+X_2=12) \\ &= 1 - P(X_1=5, X_2=6) - P(X_1=6, X_2=5) - P(X_1=6, X_2=6) \\ &= 1 - \frac{3}{6^2} = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}. \end{aligned}$$

2. (α)

$$\begin{aligned} P(N=k) &= P(N=k \,|\, \text{ επιλέγουμε το } A_1) P(\text{επιλέγουμε το } A_1) \\ &\quad + P(N=k \,|\, \text{ επιλέγουμε το } A_2) P(\text{επιλέγουμε το } A_2) \\ &= p_1(1-p_1)^{k-1}\frac{1}{2} + p_2(1-p_2)^{k-1}\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει γιατί δεδομένου ότι έχουμε επιλέξει π.χ. το A_1, το νόμισμα πρέπει να φέρει την ένδειξη "γράμματα" στις πρώτες $k-1$ ρίψεις και έπειτα "κεφαλή " στην k ρίψη. Έτσι προκύπτει ο παράγοντας $p_1(1-p_1)^{k-1}$.

Όμοια βρίσκουμε

$$P(N \geq k) = (1-p_1)^{k-1}\frac{1}{2} + (1-p_2)^{k-1}\frac{1}{2}.$$

Η απαίτηση $N \geq k$ ισοδυναμεί με το να έρθει η ένδειξη "γράμματα" στις πρώτες $k-1$ ρίψεις. Απο αυτό προκύπτουν οι παράγοντες $(1-p_1)^{k-1}, (1-p_2)^{k-1}$.

(β) Υπολογίζουμε το πηλίκο

$$\begin{aligned} \frac{P(\text{ επιλέγουμε το } A_1 \,|\, N=6)}{P(\text{ επιλέγουμε το } A_2 \,|\, N=6)} &= \frac{P(\text{ επιλέγουμε το } A_1, N=6)/P(N=6)}{P(\text{ επιλέγουμε το } A_2, N=6)/P(N=6)} \\ = \frac{P(N=6 \,|\, \text{ επιλέγουμε το } A_1)P(\text{επιλέγουμε το } A_1)}{P(N=6 \,|\, \text{ επιλέγουμε το } A_2)P(\text{επιλέγουμε το } A_2)} &= \frac{p_1(1-p_1)^5}{p_2(1-p_2)^5} = 5\left(\frac{5}{9}\right)^5 = \frac{5^6}{9^5} < 1. \end{aligned}$$

Η τελευταία ανισότητα δίνεται στην εκφώνηση. Άρα είναι πιθανότερο να έχουμε επιλέξει το νόμισμα A_2.

3. (α) Για την κατανομή της X γνωρίζουμε ότι $P(X \geq z) = e^{-\lambda z}$ για κάθε $z \geq 0$. Οπότε για $y > 0$ έχουμε

$$P(1/X \leq y) = P(X \geq 1/y) = e^{-\lambda/y}$$

ενώ για $y \leq 0$ ισχύει $P(1/X \leq y) = 0$. Άρα η συνάρτηση κατανομής της Y είναι

$$F_Y(y) = \begin{cases} e^{-\lambda/y} & \text{αν } y > 0, \\ 0 & \text{αν } y \leq 0. \end{cases}$$

Η F_Y είναι συνεχής παντού (άρα δεν υπάρχουν άτομα) και παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο συμπλήρωμα ενός πεπερασμένου συνόλου (στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$), και άρα η Y είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα την παράγωγο της F_Y. Δηλαδή

$$f_Y(y) = \frac{\lambda}{y^2} e^{-\lambda/y} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(y)$$

για $y \in \mathbb{R}$.

(β) Η πρώτη μέση τιμή υπολογίζεται με παραγοντική ολοκλήρωση

$$E(X^2)=\int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}\,dx=-\int_0^\infty x^2(e^{-\lambda x})'\,dx=2\int_0^\infty xe^{-\lambda x}\,dx=-\frac{2}{\lambda}\int_0^\infty x(e^{-\lambda x})'\,dx$$
$$=\frac{2}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx=\frac{2}{\lambda^2}.$$

Έπειτα

$$E(1/X^2)=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\frac{1}{x^2}\,dx\geq \lambda e^{-\lambda}\int_0^1\frac{1}{x^2}\,dx=\lambda e^{-\lambda}[-1/x]_{0+}^1=\infty.$$

Άρα $E(1/X^2)=\infty$.

4. (α) Η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$\iint\limits_{x>3y} f(x,y)\,dxdy=\int_0^1\int_0^{x/3}\left(\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}y\right)\,dydx=\int_0^1\left(\frac{2}{9}x^2+\frac{2}{3^3}x^2\right)\,dx=\frac{8}{81}.$$

(β) Οι X, Y είναι φραγμένες τυχαίες μεταβλητές άρα ορίζονται και είναι πεπερασμένες οι δεύτερες ροπές τους και η συνδιακύμανση τους. Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EXEY$. Υπολογίζουμε ότι

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^1 xyf(x,y)\,dxdy=\frac{2}{3}\int_0^1\int_0^1 x^2y\,dxdy+\frac{4}{3}\int_0^1\int_0^1 xy^2\,dxdy$$
$$=2\int_0^1\int_0^1 x^2y\,dxdy=2\frac{1}{3}\frac{1}{2}=\frac{1}{3}.$$

Όμοια βρίσκουμε ότι

$$EX=\int_0^1\int_0^1 xf(x,y)\,dxdy=...=\frac{5}{9},$$
$$EY=\int_0^1\int_0^1 yf(x,y)\,dxdy=...=\frac{11}{18},$$

και άρα $\mathrm{Cov}(X,Y)=-1/162$.

(γ) Αν οι X, Y ήταν ανεξάρτητες, τότε η συνδιακύμανση τους θα ήταν 0, ενώ απο προηγούμενο ερώτημα είναι διαφορετική του 0. Εναλλακτικά, το βλέπουμε απο το ότι η πυκνότητα δεν είναι το γινόμενο των περιθώριων πυκνοτήτων.

5. (α) $M_X(t)=\int_0^\infty e^{tX}\lambda e^{-\lambda x}\,dx=\lambda\int_0^\infty e^{-(\lambda-t)x}\,dx$. Αν $t\geq\lambda$, ο ολοκληρωτέος είναι παντού μεγαλύτερος η ίσος του 1, οπότε $M_X(t)=\infty$. Ενώ αν $t<\lambda$, το ολοκλήρωμα συγκλίνει, και παίρνουμε $M_X(t)=\lambda/(\lambda-t)$.

(β) Η ροπογεννήτρια M_Z μιας τυχαίας μεταβλητής Z με τιμές στο $\mathbb{R}$ ικανοποιεί $M_Z(0)=1, M_Z(t)>0$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$. Η H_1 παραβιάζει τον πρώτο περιορισμό ενώ η H_3 παραβιάζει τον δεύτερο.

Για την H_2, παίρνουμε δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές X, Y που έχουν κατανομή εκθετική με παραμέτρους 2 και 3 αντίστοιχα. Από το ερώτημα (α) και απο την ιδιότητα $M_{X+Y}=M_XM_Y$, που ισχύει γιατί οι X, Y είναι ανεξάρτητες, έπεται ότι η H_2 είναι η ροπογεννήτρια των $X+Y$.

6. (α) Η X_1 είναι Bernoulli τυχαία μεταβλητή με πιθανότητα επιτυχίας $p=P(X_1=1)=1/3$. Οπότε $E(X_1^2)=E(X_1)=1\times P(X_1=1)+0\times P(X_1=0)=1/3$, και $\mathrm{Var}(X_1)=E(X_1^2)-E(X_1)^2=2/9$.

(β) Θέτουμε $S_n:=X_1+\cdots+X_n$ για κάθε θετικό ακέραιο n. Το κεντρικό οριακό θεώρημα λέει ότι η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών

$$\left(\frac{S_n-n/3}{\sqrt{(2/9)n}}\right)_{n\geq 1}$$

συγκλίνει κατά κατανομή στην τυπική κανονική κατανομή, $N(0,1)$.

Για $n=1800$, έχουμε $S_n=T$, $n/3=600$ και $\sqrt{(2/9)\,n}=20$, οπότε

$$P(580 < T < 640) = P\left(\frac{580-600}{20} < \frac{S_{1800}-600}{20} < \frac{640-600}{20}\right) \approx P\left(-1 < Z < 2\right) = \Phi(2) - \Phi(-1).$$

Η Z είναι μια τυχαία μεταβλητή με κατανομή $N(0,1)$, και η προσέγγιση προκύπτει απο το κεντρικό οριακό θεώρημα. Τέλος, επειδή η Z είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα άρτια συνάρτηση, έχουμε $\Phi(-1) + \Phi(1) = 1$. Άρα η ζητούμενη προσέγγιση είναι $\Phi(2) + \Phi(1) - 1 \approx 0.8186$.