Υποθέτουμε λοιπόν ότι X και Y είναι ανεξάρτητες διακριτές τυχαίες μεταβλητές. Έστω $x_1, x_2, \ldots$ οι πιθανές τιμές της X. Για κάθε z, το ενδεχόμενο $\{X+Y = z\}$ ταυτίζεται με το ενδεχόμενο

$$\bigcup_i \{X = x_i, Y = z - x_i\}.$$

Αφού τα ενδεχόμενα $\{X = x_i, Y = z - x_i\}$ είναι ξένα για διαφορετικές τιμές του i, έπεται ότι

$$\begin{aligned} P(X+Y=z) &= \sum_i P(X = x_i, Y = z - x_i) \\ &= \sum_i P(X = x_i)P(Y = z - x_i) \\ &= \sum_i f_X(x_i) f_Y(z - x_i). \end{aligned}$$

Με άλλα λόγια

(24) $$f_{X+Y}(z) = \sum_x f_X(x) f_Y(z - x).$$

Αν οι τυχαίες μεταβλητές X και Y παίρνουν ακέραιες τιμές, τότε η $X + Y$ παίρνει κι αυτή ακέραιες τιμές. Σε αυτή την περίπτωση, η (24) ισχύει για κάθε ακέραια τιμή του z και η μεταβλητή x στο δεξιό μέλος της (24) διατρέχει το σύνολο των ακεραίων. Εξειδικεύοντας ακόμα περισσότερο παίρνουμε μια πολύ χρήσιμη περίπτωση. Έστω ότι οι X και Y παίρνουν μόνο μη αρνητικές ακέραιες τιμές. Τότε η $X + Y$ παίρνει κι αυτή μόνο μη αρνητικές ακέραιες τιμές. Αν z είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος, τότε $f_X(x)f_Y(z - x) = 0$ εκτός αν η x είναι μια από τις τιμές $0, 1, \ldots, z$. Επομένως, με αυτές τις υποθέσεις η (24) γράφεται στη μορφή

(25) $$f_{X+Y}(z) = \sum_{x=0}^{z} f_X(x) f_Y(z - x).$$

Η (25) είναι χρήσιμη για τον υπολογισμό της πυκνότητας της $X + Y$, συνήθως όμως είναι προτιμότερη η χρήση των γεννητριών συναρτήσεων πιθανότητας. Θα περιγράψουμε αυτές τις συναρτήσεις στη συνέχεια, και θα δώσουμε αρκετές σημαντικές εφαρμογές τους στον υπολογισμό της πυκνότητας του αθροίσματος ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών.

Ορισμός 6. *Έστω X τυχαία μεταβλητή με μη αρνητικές ακέραιες τιμές. Η γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας Φ_X της X ορίζεται από την*

$$\Phi_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} P(X = x)t^x = \sum_{x=0}^{\infty} f_X(x)t^x, \qquad -1 \le t \le 1.$$

Θα υπολογίσουμε την $\Phi_X(t)$ σε τρεις ειδικές περιπτώσεις.

Παράδειγμα 16. *Διωνυμική κατανομή.* Υποθέτουμε ότι η X ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και p. Τότε

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

άρα

$$\Phi_X(t) = \sum_{x=0}^{n} P(X = x) t^x = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (pt)^x (1-p)^{n-x}.$$

Από τον τύπο του διωνυμικού αναπτύγματος

$$(a+b)^n = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} a^x b^{n-x},$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\Phi_X(t) = (pt + 1 - p)^n. \tag{26}$$

Παράδειγμα 17. *Αρνητική διωνυμική κατανομή.* Υποθέτουμε ότι η X ακολουθεί αρνητική διωνυμική κατανομή με παραμέτρους α και p. Τότε

$$P(X = x) = p^\alpha \binom{-\alpha}{x} (-1)^x (1-p)^x$$

άρα

$$\begin{aligned}\Phi_X(t) &= \sum_{x=0}^{\infty} p^\alpha \binom{-\alpha}{x} (-1)^x (1-p)^x t^x \\ &= p^\alpha \sum_{x=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{x} (-t(1-p))^x.\end{aligned}$$

Από το ανάπτυγμα Taylor

$$(1+s)^{-\alpha} = \sum_{x=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{x} s^x,$$

θέτοντας $s = -t(1-p)$ παίρνουμε

$$\Phi_X(t) = \left(\frac{p}{1 - t(1-p)} \right)^\alpha. \tag{27}$$

Παράδειγμα 18. *Κατανομή Poisson.* Υποθέτουμε ότι η X ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο λ. Τότε

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

άρα

$$\Phi_X(t) = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^x}{x!}.$$

Θέτοντας $s = \lambda t$ στο ανάπτυγμα Taylor

$$e^s = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{s^x}{x!},$$

βλέπουμε ότι

$$\Phi_X(t) = e^{\lambda t} e^{-\lambda} = e^{\lambda(t-1)}. \tag{28}$$

Έστω X και Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με μη αρνητικές ακέραιες τιμές. Τότε

$$\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t). \tag{29}$$

Για την απόδειξη, παρατηρούμε ότι από την (25)

$$\begin{aligned}
\Phi_{X+Y}(t) &= \sum_{z=0}^{\infty} f_Z(z) t^z \\
&= \sum_{z=0}^{\infty} t^z \sum_{x=0}^{z} f_X(x) f_Y(z-x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} f_X(x) t^x \sum_{z=x}^{\infty} f_Y(z-x) t^{z-x} \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} f_X(x) t^x \sum_{y=0}^{\infty} f_Y(y) t^y \\
&= \Phi_X(t)\Phi_Y(t),
\end{aligned}$$

δηλαδή το ζητούμενο.

Από την (29) έπεται εύκολα με επαγωγή ότι αν $X_1, \ldots, X_r$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με μη αρνητικές ακέραιες τιμές, τότε

$$\Phi_{X_1+\ldots+X_r}(t) = \Phi_{X_1}(t) \ldots \Phi_{X_r}(t). \tag{30}$$

Οι ισχυρισμοί του θεωρήματος που ακολουθεί αποδεικνύονται πιο εύκολα με την «τεχνική της γεννήτριας συνάρτησης», που βασίζεται στο γεγονός ότι αν

$$\sum_{x=0}^{\infty} a_x t^x = \sum_{x=0}^{\infty} b_x t^x, \qquad -1 < t < 1,$$

τότε μπορούμε να εξισώσουμε τους συντελεστές του t^x στις δύο δυναμοσειρές, και να συμπεράνουμε ότι $a_x = b_x, x = 0, 1, 2 \ldots$. Αυτό δείχνει ότι αν δύο τυχαίες μεταβλητές με μη αρνητικές ακέραιες τιμές έχουν την ίδια γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας, τότε πρέπει να έχουν την ίδια κατανομή. Με άλλα λόγια, η γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής με μη αρνητικές ακέραιες τιμές προσδιορίζει μονοσήμαντα την κατανομή της.

Θεώρημα 1. *Έστω $X_1, \ldots, X_r$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.*

(i) *Αν η X_i ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n_i και p, τότε η $X_1 + \ldots + X_r$ ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n_1 + \ldots + n_r$ και p.*

(ii) *Αν η X_i ακολουθεί αρνητική διωνυμική κατανομή με παραμέτρους α_i και p, τότε η $X_1 + \ldots + X_r$ ακολουθεί αρνητική διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $\alpha_1 + \ldots + \alpha_r$ και p.*

(iii) *Αν η X_i ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο λ_i, τότε η $X_1 + \ldots + X_r$ ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda_1 + \ldots + \lambda_r$.*

Απόδειξη της (i). Αν οι X_i είναι όπως στην (i), τότε από το Παράδειγμα 16

$$\begin{aligned}\Phi_{X_1+\ldots+X_r}(t) &= \Phi_{X_1}(t) \ldots \Phi_{X_r}(t)\\ &= (pt + 1 - p)^{n_1} \ldots (pt + 1 - p)^{n_r}\\ &= (pt + 1 - p)^{n_1+\ldots+n_r}.\end{aligned}$$

Άρα η γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας της $X_1 + \ldots + X_r$ συμπίπτει με αυτήν μίας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n_1 + \ldots + n_r$ και p. Αυτό σημαίνει ότι η $X_1 + \ldots + X_r$ πρέπει να ακολουθεί αυτή τη διωνυμική κατανομή. Γιατί, αν συμβολίσουμε με

$$a_x = \binom{n_1 + \ldots + n_r}{x} p^x (1 - p)^{n_1+\ldots+n_r-x}$$

τις αντίστοιχες διωνυμικές πιθανότητες, τότε

$$\begin{aligned}\sum_{x=0}^{\infty} P(X_1+\ldots+X_r=x)t^x &= \Phi_{X_1+\ldots+X_r}(t)\\ &=(pt+1-p)^{n_1+\ldots+n_r}\\ &=\sum_{x=0}^{\infty} a_x t^x.\end{aligned}$$

Εξισώνοντας συντελεστές βλέπουμε ότι

$$P(X_1+\ldots+X_r=x)=a_x$$

επομένως η $X_1+\ldots+X_r$ είναι διωνυμικά κατανεμημένη όπως ισχυριστήκαμε στην (i).

Απόδειξη της (ii). Αν οι X_i είναι όπως στην (ii), τότε από το Παράδειγμα 17

$$\begin{aligned}\Phi_{X_1+\ldots+X_r}(t) &= \Phi_{X_1}(t)\ldots\Phi_{X_r}(t)\\ &=\left(\frac{p}{1-t(1-p)}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{p}{1-t(1-p)}\right)^{\alpha_r}\\ &=\left(\frac{p}{1-t(1-p)}\right)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_r}.\end{aligned}$$

Άρα η γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας της $X_1+\ldots+X_r$ συμπίπτει με αυτήν μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί αρνητική διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $\alpha_1+\ldots+\alpha_r$ και p. Με το επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε για να αποδείξουμε την (i) βλέπουμε ότι η $X_1+\ldots+X_r$ ακολουθεί αυτή την αρνητική διωνυμική κατανομή.

Η απόδειξη της (iii) είναι όμοια με αυτή των (i) και (ii) και αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη. ∎

Υποθέτουμε ότι $\alpha_1=\ldots=\alpha_r=1$ στον ισχυρισμό (ii) του Θεωρήματος 1. Τότε οι $X_1,\ldots,X_r$ ακολουθούν γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p, και η (ii) μας λέει ότι η $X_1+\ldots+X_r$ ακολουθεί αρνητική διωνυμική κατανομή με παραμέτρους r και p. Παίρνουμε έτσι μια εναλλακτική απόδειξη του αποτελέσματος της Παραγράφου 3.5.

Το παράδειγμα που ακολουθεί παρουσιάζει τη χρήση των δεσμευμένων πιθανοτήτων.

Παράδειγμα 19. Έστω $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με μη αρνητικές ακέραιες τιμές, που έχουν την ίδια πυκνότητα. Θέτουμε $S_0=0$ και $S_n=X_1+\ldots+$

8 Ροπογεννήτριες και χαρακτηριστικές συναρτήσεις

Μερικές από τις πιο σημαντικές και χρήσιμες έννοιες της θεωρίας πιθανοτήτων προέρχονται από άλλους κλάδους των μαθηματικών. Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε δύο τέτοιες έννοιες, οι οποίες συνδέονται στενά μεταξύ τους. Θα μελετήσουμε αρχικά τις ροπογεννήτριες και στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις. Η κατανόηση των τελευταίων είναι κάπως πιο δύσκολη σε στοιχειώδες επίπεδο, αφού προϋποθέτει γνώση των μιγαδικών αριθμών. Ωστόσο, παρά τη δυσκολία αυτή, αξίζει τον κόπο να επιμείνει κανείς στη μελέτη τους, αφού η γνώση των ιδιοτήτων τους θα μας επιτρέψει να αποδείξουμε τόσο τον Ασθενή Νόμο των Μεγάλων Αριθμών όσο και το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Παράγραφος 8.4).

8.1. Ροπογεννήτριες

Η *ροπογεννήτρια* $M_X(t)$ μιας τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται από την

$$M_X(t) = \mathbb{E}e^{tX}.$$

Το πεδίο ορισμού της M_X αποτελείται από όλους τους πραγματικούς αριθμούς t για τους οποίους η e^{tX} έχει πεπερασμένη μέση τιμή.

Παράδειγμα 1. Έστω X κανονικά κατανεμημένη με μέσο μ και διασπορά σ^2.

Τότε,

$$\begin{aligned} M_X(t) = \mathbb{E}e^{tX} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-[(x-\mu)^2/2\sigma^2]}\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(y+\mu)} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2\sigma^2}\, dy \\ &= e^{\mu t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{ty-(y^2/2\sigma^2)}\, dy. \end{aligned}$$

Όμως

$$ty - \frac{y^2}{2\sigma^2} = -\frac{(y-\sigma^2 t)^2}{2\sigma^2} + \frac{\sigma^2 t^2}{2}.$$

Επομένως,

$$M_X(t) = e^{\mu t} e^{\sigma^2 t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-[(y-\sigma^2 t)^2/2\sigma^2]}\, dt.$$

Αφού το τελευταίο ολοκλήρωμα ισούται με το ολοκλήρωμα της κανονικής πυκνότητας $n(\sigma^2 t, \sigma^2)$, η τιμή του είναι ένα. Επομένως,

(1) $$M_X(t) = e^{\mu t} e^{\sigma^2 t^2/2}, \quad -\infty < t < \infty.$$

Παράδειγμα 2. Έστω ότι η X έχει την πυκνότητα γάμμα με παραμέτρους α και λ. Τότε,

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}\, dx \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-(\lambda-t)x}\, dx \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)}{(\lambda-t)^\alpha} \end{aligned}$$

αν $-\infty < t < \lambda$. Το ολοκλήρωμα αποκλίνει αν $\lambda \le t < \infty$. Άρα,

(2) $$M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^\alpha, \quad -\infty < t < \lambda.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η X είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή, και ότι όλες οι πιθανές τιμές της είναι μη αρνητικοί ακέραιοι. Τότε

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{nt} P(X = n).$$

Στο Κεφάλαιο 3 ορίσαμε τη γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας για τυχαίες μεταβλητές αυτού του είδους, θέτοντας

$$\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X = n).$$

Από αυτούς τους δύο τύπους είναι φανερό ότι

(3) $$M_X(t) = \Phi_X(e^t).$$

Ο τύπος (3) μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε την ροπογεννήτρια απευθείας από τη γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας. Για παράδειγμα, αν η X ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και p, τότε όπως είδαμε στο Παράδειγμα 16 του Κεφαλαίου 3,

$$\Phi_X(t) = (pt + 1 - p)^n.$$

Έπεται άμεσα ότι

$$M_X(t) = (pe^t + 1 - p)^n.$$

Όμοια, αν η X ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο λ, τότε σύμφωνα με το Παράδειγμα 18 του Κεφαλαίου 3,

$$\Phi_X(t) = e^{\lambda(t-1)}.$$

Επομένως,

$$M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}.$$

Θα μπορούσαμε φυσικά, στα παραπάνω δύο παραδείγματα, να υπολογίσουμε την $M_X(t)$ απευθείας από τον ορισμό της ροπογεννήτριας.

Αν X και Y είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε οι e^{tX} και e^{tY} είναι επίσης ανεξάρτητες. Επομένως,

$$\begin{aligned} M_{X+Y}(t) &= \mathbb{E}e^{t(X+Y)} = \mathbb{E}e^{tX}e^{tY} = \mathbb{E}e^{tX}\mathbb{E}e^{tY} \\ &= M_X(t)M_Y(t). \end{aligned}$$

Βλέπουμε λοιπόν εύκολα ότι αν οι $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ομοκατανεμημένες, τότε

(4) $$M_{X_1+\ldots+X_n}(t) = \left(M_{X_1}(t)\right)^n.$$

Για να αντιληφθούμε γιατί η $M_X(t)$ λέγεται ροπογεννήτρια, γράφουμε

$$M_X(t) = \mathbb{E}e^{tX} = \mathbb{E}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n X^n}{n!}.$$

Υποθέτουμε ότι η $M_X(t)$ είναι πεπερασμένη αν $-t_0 < t < t_0$, όπου t_0 θετικός πραγματικός αριθμός. Σ' αυτή την περίπτωση μπορούμε να δείξουμε ότι στην τελευταία παράσταση για την $M_X(t)$ επιτρέπεται να εναλλάξουμε τη μέση τιμή με την άθροιση. Δηλαδή,

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}X^n}{n!} t^n \tag{5}$$

αν $-t_0 < t < t_0$. Ειδικότερα, αν η $M_X(t)$ ορίζεται για κάθε t, τότε η (5) ισχύει για κάθε t. Η σειρά Taylor της $M_X(t)$ είναι η

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{d^n}{dt^n} M_X(t)\bigg|_{t=0}. \tag{6}$$

Συγκρίνοντας τους συντελεστές του t^n στις (5) και (6), βλέπουμε ότι

$$\mathbb{E}X^n = \frac{d^n}{dt^n} M_X(t)\bigg|_{t=0}. \tag{7}$$

Παράδειγμα 3. Έστω ότι η X ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο 0 και διασπορά σ^2. Βρείτε τις ροπές της X χρησιμοποιώντας ροπογεννήτριες.

Παρατηρούμε πρώτα από την (1) ότι

$$\begin{aligned} M_X(t) = e^{\sigma^2 t^2/2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^{2n}}{2^n n!} t^{2n}. \end{aligned}$$

Άρα οι περιττές ροπές της X είναι όλες μηδέν, και οι άρτιες ροπές δίνονται από την

$$\frac{\mathbb{E}X^{2n}}{(2n)!} = \frac{\sigma^{2n}}{2^n n!},$$

ή, ισοδύναμα,

$$\mathbb{E}X^{2n} = \frac{\sigma^{2n}(2n)!}{2^n n!}.$$

Αυτό συμφωνεί με το αποτέλεσμα που βρήκαμε στο Κεφάλαιο 7.

Το ίδιο παράδειγμα θα μας βοηθήσει να δούμε τον τρόπο με τον οποίο εφαρμόζεται η (7). Αφού

$$\frac{d}{dt} e^{\sigma^2 t^2/2} = \sigma^2 t e^{\sigma^2 t^2/2}$$

και

$$\frac{d^2}{dt^2}e^{\sigma^2t^2/2} = (\sigma^2 + \sigma^4t^2)e^{\sigma^2t^2/2},$$

έπεται ότι

$$\left.\frac{d}{dt}e^{\sigma^2t^2/2}\right|_{t=0} = 0$$

και

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}e^{\sigma^2t^2/2}\right|_{t=0} = \sigma^2,$$

παίρνουμε δηλαδή τις δύο πρώτες ροπές της X.

8.2. Χαρακτηριστικές συναρτήσεις

Η *χαρακτηριστική συνάρτηση* μιας τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται από την

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}e^{itX}, \qquad -\infty < t < \infty,$$

όπου $i = \sqrt{-1}$. Οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις είναι λίγο πιο πολύπλοκες από τις ροπογεννήτριες, αφού στον ορισμό τους εμπλέκονται μιγαδικοί αριθμοί. Έχουν όμως δύο σημαντικά πλεονεκτήματα σε σύγκριση με τις ροπογεννήτριες. Πρώτον, η $\varphi_X(t)$ είναι πεπερασμένη για όλες τις τυχαίες μεταβλητές X και όλους τους πραγματικούς αριθμούς t. Δεύτερον, η συνάρτηση κατανομής της X, αλλά και η συνάρτηση πυκνότητας της X, αν υπάρχει, προκύπτουν από την χαρακτηριστική συνάρτηση μέσω ενός «τύπου αντιστροφής». Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των χαρακτηριστικών συναρτήσεων θα μπορέσουμε να αποδείξουμε τον Ασθενή Νόμο των Μεγάλων Αριθμών και το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, κάτι που δεν είμαστε σε θέση να πετύχουμε με τις ροπογεννήτριες.

Πριν μελετήσουμε τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις θα ανακεφαλαιώσουμε εν συντομία τα απαιτούμενα στοιχεία από τη θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων.

Μπορούμε να γράψουμε κάθε μιγαδικό αριθμό z στη μορφή $z = x + iy$, όπου x και y είναι πραγματικοί αριθμοί. Το μέτρο $|z|$ ενός μιγαδικού αριθμού ορίζεται από την $|z| = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Η απόσταση μεταξύ δύο μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 δίνεται από το $|z_1 - z_2|$.

Αν μια συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής έχει ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά με θετική ακτίνα σύγκλισης, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή τη δυναμοσειρά για να ορίσουμε μια συνάρτηση μιας μιγαδικής μεταβλητής. Για παράδειγμα, ορίζουμε

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$