Πιθανότητες Ι

Βασικα αθροισματα

Για $n \geq 1$ θετικό ακέραιο ισχύει

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Το πρώτο άθροισμα μας βοηθάει να βρούμε το άθροισμα διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου. Δηλαδή

$$a_1 + (a_1 + \omega) + (a_1 + \omega) + \cdots + (a_1 + (n-1)\omega) = n\frac{(2a_1 + (n-1)\omega)}{2}.$$

Άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{r^{n+1}-1}{r-1} \text{ για } r \neq 1 \tag{1}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} r^i = 1 + r + r^2 + \cdots = \frac{1}{1-r} \qquad \text{για } |r| < 1 \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i r^{i-1} = 1 + 2r + 3r^2 + \cdots = \frac{1}{(1-r)^2} \qquad \text{για } |r| < 1 \tag{3}$$

$$\sum_{i=2}^{\infty} i(i-1) r^{i-2} = 2 + 6r + 12r^2 + \cdots = \frac{2}{(1-r)^3} \qquad \text{για } |r| < 1 \tag{4}$$

Στην (1), αθροίζουμε τους πρώτους $n+1$ όρους μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο 1 και λόγο r. Αυτό συνεπάγεται ότι αν έχουμε n διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου $a_1, ra_1, \ldots, r^{n-1}a_1$ το άθροισμα τους είναι

$$a_1 + a_1\varrho + \ldots + a_1 r^{n-1} = a_1\frac{r^n - 1}{r-1}.$$

Η (2) προκύπτει απο την (1) παίρνοντας $n \to \infty$.

Οι (3), (4) προκύπτουν απο την (2) με παραγώγιση. Προφανώς έχουν και εκδόσεις αν η άθροιση σταματάει σε κάποιο πεπερασμένο n. Δηλαδή $\sum_{i=1}^{n}$. Όμοια και αυτές προκύπτουν από την (1) με παραγώγιση.

Διώνυμο Νεύτωνα

Για $a, b \in \mathbb{C}, n \geq 1$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \tag{5}$$

Δυναμοσειρά της εκθετικής

Για $x \in \mathbb{C}$,

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \tag{6}$$

Δυναμοσειρά του λογαρίθμου

Για $x \in (-1, 1]$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \tag{7}$$

log είναι ο λογάριθμος με βάση το e.

Το γενικό διωνυμικό θεώρημα
Για $a \in \mathbb{R}$ και $x \in (-1,1)$

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k \tag{8}$$

Ειδική περίπτωση. Για $r \in \mathbb{N}^+$ και $x \in (-1,1)$,

$$(1-x)^{-r} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-r}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left[{r \atop k} \right] x^k \tag{9}$$

Αυτό το άθροισμα είναι χρήσιμο στη θεωρία της Αρνητικής Διωνυμικής κατανομής.

Παρατήρηση: Διάφορα αθροίσματα υπολογίζονται με χρήση των πιο πάνω. Για παράδειγμα,

$$e^{x^2/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!2^k}\, x^{2k}, \quad q^k + q^{k+1} + \cdots + q^n = q^k\, \frac{q^{n-k+1}-1}{q-1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = 2,$$
$$\log 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}, \qquad 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \qquad 3^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$$
$$\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} \right) = \operatorname{Im}\left(e^{ix} \frac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1} \right) = \cdots = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$$
$$= \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2} \sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \qquad \text{για } x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Το τελευταίο παράδειγμα δεν μας χρειάζεται στο μάθημα, δίνεται απλώς για να φανεί η χρησιμότητα των βασικών αθροισμάτων πιο πάνω.