

Πιθανότητες I
Τελική Εξέταση. 8 Φεβρουαρίου 2013
Ομάδα Β

Θέμα 1.[20 Βαθμοί] Σε μιά πόλη 16 ατόμων a_1, a_2, \dots, a_{16} , τα a_1, a_2, \dots, a_6 είναι άνδρες και τα υπόλοιπα 10 είναι γυναίκες. Ο a_1 επιλέγει τυχαία μία γυναίκα από τις 10 και της λέει μια φημολογία. Έπειτα εκείνη επιλέγει τυχαία έναν άνδρα από τους 6 και κάνει το ίδιο, και η διαδικασία συνεχίζεται όμοια. Δηλαδή κάθε άτομο που ακούει την φημολογία επιλέγει στην τύχη ένα άτομο του αντίθετου φύλου και του την μεταφέρει. Να βρεθεί η πιθανότητα η φημολογία να ειπωθεί 6 φορές χωρίς να ακουστεί ξανά από κάποιο άτομο που την έχει μεταφέρει σε κάποιο προηγούμενο βήμα.

Θέμα 2.[20 Βαθμοί] Ένα κουτί περιέχει $n \geq 2$ διακεκριμένους λαχνούς αριθμημένους από το 1 μέχρι το n . Ένας λαχνός επιλέγεται στην τύχη και στη συνέχεια ρίχνουμε ένα τίμιο ζάρι τόσες ανεξάρτητες φορές όσες ήταν η ένδειξη του λαχνού που επιλέχθηκε. Ποια είναι η πιθανότητα εμφάνισης και των δύο ενδείξεων 2 και 4 από τουλάχιστον μία φορά η καθεμιά;

Θέμα 3.[20 Βαθμοί] Η (συνεχής) τυχαία μεταβλητή X έχει πυκνότητα που δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2 & \text{αν } x \in (0, 3), \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Θέτουμε $Y = X^2$. Να βρεθούν:

(α) Η πυκνότητα της Y .

(β) Η συνδιακύμανση, $C(X, Y) = \text{Cov}(X, Y)$, των X και Y .

Θέμα 4.[20 Βαθμοί] Έστω διδιάστατη συνεχής τυχαία μεταβλητή (X, Y) με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{5(5-x)} & \text{αν } 0 < x < y < 5, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Να βρεθούν οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας των X και Y . Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;

Θέμα 5.[10 Βαθμοί] Έστω X_1, X_2 ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X_1 \sim \Gamma(a_1, \lambda_1), X_2 \sim \Gamma(a_2, \lambda_2)$ με $a_1, a_2, \lambda_1, \lambda_2 > 0$ και $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Να δειχθεί ότι δεν υπάρχουν $a, \lambda > 0$ ώστε το άθροισμα $X_1 + X_2$ να ακολουθεί την κατανομή $\Gamma(a, \lambda)$.

Δίνεται ότι μία $X \sim \Gamma(a, \lambda)$ (με $a, \lambda > 0$) έχει πυκνότητα f_X και ροπογεννήτρια M_X που δίνονται από τις σχέσεις

$$f_X(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x>0}, \quad M_X(t) = \mathbf{E}(e^{tX}) = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^a & \text{αν } t < \lambda, \\ \infty & \text{αν } t \geq \lambda. \end{cases}$$

Θέμα 6.[20 Βαθμοί] Ένα καζίνο προσφέρει το ακόλουθο τυχερό παιχνίδι: ο παίκτης ρίχνει μία φορά ένα τίμιο ζάρι. Αν η ένδειξη του ζαριού είναι 1 ή 3, τότε ο παίκτης κερδίζει 3 ευρώ από το καζίνο, αν είναι 2 ή 4 ή 6, τότε ο παίκτης χάνει 4 ευρώ υπέρ του καζίνο, και αν είναι 5, τότε ο παίκτης δεν κερδίζει ούτε χάνει. Αν παίξουν 40 παίχτες το παραπάνω παιχνίδι (ανεξάρτητα μεταξύ τους), να βρεθεί προσεγγιστικά η πιθανότητα το καζίνο να κερδίσει συνολικά τουλάχιστον 20 ευρώ.

Για την συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής $N(0, 1)$ ισχύει: $\Phi(0.5) = 0.691, \Phi(1) = 0.841, \Phi(2) = 0.977$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!