Ολοκλήρωση συναρτήσεων με τιμές σε χώρους Banach

Αν $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ είναι χώρος μέτρου και $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach, μια συνάρτηση $F : \Omega \to X$ θα λέγεται **ασθενώς μετρήσιμη** (αντίστοιχα, **ασθενώς ολοκληρώσιμη**) αν για κάθε $\phi \in X^*$ η συνάρτηση $\phi \circ F : \Omega \to \mathbb{C}$ είναι μετρήσιμη (αντίστοιχα, ολοκληρώσιμη). Λέμε ότι **το ολοκλήρωμα** $\int F d\mu$ **υπάρχει** αν υπάρχει ένα στοιχείο $y \in X$ ώστε

$$\phi(y) = \int \phi(F(\omega)) d\mu(\omega)$$

$$\text{δηλ.} \quad \phi\left(\int F(\omega) d\mu(\omega)\right) = \int \phi(F(\omega)) d\mu(\omega) \quad \text{για κάθε } \phi \in X^*.$$

Ας σημειώσουμε ότι, αν το $\int F d\mu$ υπάρχει, τότε είναι μοναδικό, γιατί αν ένα $y' \in X$ ικανοποιεί $\phi(y') = \int \phi(F(\omega)) d\mu(\omega)$ για κάθε $\phi \in X^*$ τότε $\phi(y') = \phi(y)$ για κάθε $\phi \in X^*$ και συνεπώς $y = y'$ από το Θεώρημα Hahn-Banach.

Θεώρημα 1 *Έστω Q συμπαγής χώρος Hausdorff (π.χ. συμπαγής μετρικός), X χώρος Banach και μ ένα κανονικό μέτρο Borel πιθανότητας στον Q. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $F : Q \to X$ το ολοκλήρωμα $\int F d\mu$ υπάρχει και ανήκει στην κλειστή κυρτή θήκη του συνόλου τιμών $F(Q)$ της F. Επιπλέον ισχύει η ανισότητα*

$$\left\| \int F(\omega) d\mu(\omega) \right\| \leq \int \|F(\omega)\| \, d\mu(\omega)$$

(γνωστή και ως «ανισότητα Minkowski για ολοκληρώματα»).

Απόδειξη Θεωρούμε τον X ως πραγματικό χώρο Banach. Κατ΄ αρχήν κάθε συνεχής συνάρτηση $F : Q \to X$ είναι ασθενώς μ-ολοκληρώσιμη, αφού για κάθε $\phi \in X^*$ η $\phi \circ F : Q \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, άρα μ-ολοκληρώσιμη.

Γράφουμε $H = \operatorname{conv}(F(Q))$. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει ένα στοιχείο $y \in \overline{H}$ ώστε

$$\phi(y) = \int \phi(F(\omega)) d\mu(\omega) \tag{†}$$

για κάθε $\phi \in X^*$.

Η ιδέα είναι η ακόλουθη: Αν $\phi \in X^*$, ο αριθμός $m := \int \phi(F(\omega)) d\mu(\omega)$ είναι η μ-μέση τιμή της $\phi \circ F$ (το μ είναι μέτρο πιθανότητας) άρα ανήκει στην κυρτή θήκη του συνόλου $\phi(F(Q))$ των τιμών της $\phi \circ F$. Υπάρχουν λοιπόν $t_1 = \phi(F(\omega_1))$, $t_2 = \phi(F(\omega_2))$ και $\lambda \in [0,1]$ ώστε $m = \lambda t_1 + (1-\lambda) t_2$. Δηλαδή

$$\int \phi(F(\omega)) d\mu(\omega) = \lambda t_1 + (1-\lambda) t_2 = \lambda \phi(F(\omega_1)) + (1-\lambda) \phi(F(\omega_2)) = \phi(\lambda F(\omega_1) + (1-\lambda) F(\omega_2))$$

αφού η ϕ είναι γραμμική. Βρήκαμε λοιπόν ένα στοιχείο $y_\phi = \lambda F(\omega_1) + (1-\lambda) F(\omega_2)$ του $\operatorname{conv}(F(Q))$ ώστε

$$\int \phi(F(\omega)) d\mu(\omega) = \phi(y_\phi) \, .$$

Θα δείξουμε ότι για κάθε πεπερασμένο σύνολο $L \subseteq X^*$ υπάρχει ένα $y_L \in \overline{H}$ που ικανοποιεί την (†) *για κάθε $\phi \in L$ ταυτόχρονα.*

Και τέλος με ένα επιχείρημα συμπάγειας θα δείξουμε ότι υπάρχει ένα $y \in \overline{H}$ που ικανοποιεί την (†) *για κάθε* $\phi \in X^*$ *ταυτόχρονα.*

Έστω λοιπόν $L = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \subseteq X^*$. Ονομάζω Φ την γραμμική απεικόνιση

$$y \to \Phi(y) = (\phi_1(y), \ldots, \phi_n(y)) : X \to \mathbb{R}^n$$

και θέτω $K = \Phi(F(Q))$. Είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ (αφού η $\Phi \circ F$ είναι συνεχής και το Q συμπαγές).

Ορίζω

$$m_i := \int \phi_i(F(\omega)) d\mu(\omega), \quad 1 \leq i \leq n$$

και $m := (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{R}^n$.

Ισχυρισμός Το m ανήκει στην κυρτή θήκη $\mathrm{conv}K$ του K.

Απόδειξη Έστω $(t_1, \ldots, t_n) \notin \mathrm{conv}K$. Υπάρχει τότε μια γραμμική μορφή $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και ένα $c \in \mathbb{R}$ που τα διαχωρίζει, δηλαδή

$$\psi(u_1, \ldots, u_n) \leq c < \psi(t_1, \ldots, t_n) \quad \text{για κάθε } (u_1, \ldots, u_n) \in \mathrm{conv}K.$$

Ξέρουμε όμως ότι η γραμμική μορφή ψ είναι της μορφής $\psi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ (όπου $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$) για κατάλληλο $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, οπότε

$$\sum_{i=1}^{n} c_i u_i \leq c < \sum_{i=1}^{n} c_i t_i \quad \text{για κάθε } (u_1, \ldots, u_n) \in \mathrm{conv}K.$$

Επομένως, για κάθε $\omega \in Q$, εφόσον $\Phi(F(\omega)) = (\phi_1(F(\omega)), \ldots, \phi_n(F(\omega))) \in K$, έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(F(\omega)) \leq c < \sum_{i=1}^{n} c_i t_i.$$

και ολοκληρώνοντας ως προς το μέτρο πιθανότητας μ,

$$\int \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(F(\omega)) \right) d\mu(\omega) \leq c\mu(K) < \left(\sum_{i=1}^{n} c_i t_i \right) \mu(K)$$

$$\text{δηλαδή} \quad \sum_{i=1}^{n} c_i \int \phi_i(F(\omega)) d\mu(\omega) < \sum_{i=1}^{n} c_i t_i \,.$$

Δείξαμε λοιπόν ότι $\sum_{i=1}^{n} c_i m_i < \sum_{i=1}^{n} c_i t_i$, επομένως $(m_1, \ldots, m_n) \neq (t_1, \ldots, t_n)$, άρα $(m_1, \ldots, m_n) \in \mathrm{conv}K$. $\square$

Αφού $m \in \mathrm{conv}K$, υπάρχουν $\omega_1, \ldots \omega_m \in Q$ και $\lambda_1, \ldots \lambda_m \geq 0$ με $\sum \lambda_k = 1$ ώστε $m = \sum \lambda_k \Phi(F(\omega_k))$. Αλλά η Φ είναι γραμμική, άρα $m = \Phi(\sum \lambda_k F(\omega_k))$. Βρήκαμε λοιπόν ένα $y_L := \sum \lambda_k F(\omega_k) \in \mathrm{conv}F(Q) = H$ ώστε $m = \Phi(y_L)$, δηλαδή

$$(m_1, \ldots, m_n) = (\phi_1(y_L), \ldots, \phi_n(y_L)).$$

Με άλλα λόγια, το $y_L \in \overline{H}$ ικανοποιεί την (†) για κάθε $\phi \in L$.

Δείξαμε λοιπόν ότι για κάθε πεπερασμένο σύνολο $L \subseteq X^*$ το σύνολο

$$E_L := \{y \in \overline{H} : \phi(y) = \int \phi \circ F d\mu \text{ για κάθε } \ \phi \in L\}$$

είναι μη κενό, και είναι εύκολο να δει κανείς ότι είναι κλειστό (επειδή οι $\phi \in X^*$ είναι συνεχείς). Παρατηρούμε τώρα ότι η οικογένεια

$$\{E_L : L \subseteq X^* \text{ πεπερασμένο}\}$$

έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής: πράγματι, αν $L_1, \dots L_m$ είναι πεπερασμένα υποσύνολα του X^*, η τομή τους $\bigcap_{i=1}^m E_{L_i}$ είναι μη κενή, γιατί ισούται με E_L όπου $L = \bigcup_{i=1}^m L_i$, πεπερασμένο.

Επειδή το σύνολο $\overline{H}$ είναι συμπαγές (από το θεώρημα του Mazur) έπεται ότι η τομή

$$\bigcap \{E_L : L \subseteq X^* \text{ πεπερασμένο}\}$$

δεν είναι κενή. Έχουμε τελειώσει, αφού ένα $y \in X$ που ανήκει στην τομή αυτή ανήκει στην κλειστή κυρτή θήκη $\overline{H}$ των τιμών $F(Q)$ της F και ικανοποιεί $\phi(y) = \int \phi \circ F d\mu$ για κάθε $\phi \in X^*$, είναι δηλαδή το ζητούμενο ολοκλήρωμα $\int F d\mu$.

Για την τελευταία ανισότητα, παρατηρούμε ότι αν $y = \int F d\mu$, τότε για κάθε $\phi \in X^*$ έχουμε

$$|\phi(y)| = \left| \int \phi(F(\omega)) d\mu(\omega) \right| \le \int |\phi(F(\omega))| \, d\mu(\omega) \le \int \|\phi\| \, \|F(\omega)\| \, d\mu(\omega)$$

(από τον ορισμό της $\|\phi\|$) και συνεπώς

$$\sup\{|\phi(y)| : \phi \in X^*, \|\phi\| \le 1\} \le \int \|F(\omega)\| \, d\mu(\omega) \, .$$

Όμως από το Θεώρημα Hahn - Banach ξέρουμε ότι $\sup\{|\phi(y)| : \phi \in X^*, \|\phi\| \le 1\} = \|y\|$, οπότε έχουμε δείξει ότι

$$\left\| \int F(\omega) d\mu(\omega) \right\| = \|y\| \le \int \|F(\omega)\| \, d\mu(\omega) \, . \qquad \square$$

Θεώρημα 2 (Mazur) *Αν $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach και $K \subseteq X$ είναι $\|\cdot\|$-συμπαγές, τότε η κλειστή κυρτή θήκη $\overline{\mathrm{conv}(K)}$ του K είναι $\|\cdot\|$-συμπαγής.*

Απόδειξη Η ιδέα είναι η ακόλουθη: αφού το K είναι συμπαγές υποσύνολο μετρικού χώρου, είναι ολικά φραγμένο, δηλαδή «προσεγγίζεται» από ένα πεπερασμένο σύνολο K_1. Η κυρτή θήκη H_1 του πεπερασμένου αυτού συνόλου φαίνεται εύκολα ότι είναι συμπαγής, άρα ολικά φραγμένη. Τέλος, η κυρτή θήκη $H = \mathrm{conv}(K)$ του K «προσεγγίζεται» από την κυρτή θήκη H_1 του K_1, άρα είναι και αυτή ολικά φραγμένη.

Αναλυτικά:
Για κάθε $\epsilon > 0$ το K καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος ανοικτές μπάλες $B(x_1, \epsilon/2), \ldots, B(x_n, \epsilon/2)$. Επομένως, αν ονομάσουμε K_1 το (πεπερασμένο) σύνολο των κέντρων $\{x_1, \ldots, x_n\}$, έχουμε

$$K \subseteq K_1 + B(0, \epsilon/2) \tag{*}$$

(κάθε $y \in K$ ανήκει σε κάποια $B(x_k, \epsilon/2)$ άρα $y = x_k + (y - x_k) \in K_1 + B(0, \epsilon/2)$).

Παρατηρούμε τώρα ότι κάθε στοιχείο $x \in H$ «προσεγγίζεται» από στοιχεία της κυρτής θήκης $H_1 := \mathrm{conv}(K_1)$ του K_1. Πράγματι, το x είναι κυρτός συνδυασμός κάποιων στοιχείων του K: υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ και $y_1, \ldots, y_m \in K$ ώστε $x = \sum_{i=1}^{m} c_i y_i$, όπου $c_i \geq 0$ και $\sum_{i=1}^{m} c_i = 1$. Όμως κάθε $y_i \in K$ είναι $\epsilon/2$-κοντά σε κάποιο $z_i \in K_1$, από την $(*)$. Έπεται ότι το x είναι $\epsilon/2$-κοντά στο $z = \sum_{i=1}^{m} c_i z_i$ που ανήκει στο $\mathrm{conv}(K_1) = H_1$:

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} c_i z_i - \sum_{i=1}^{m} c_i y_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{m} c_i \|z_i - y_i\| < \left(\sum_{i=1}^{m} c_i \right) \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Δείξαμε λοιπόν ότι

$$H \subseteq H_1 + B(0, \epsilon/2).$$

Όμως, επειδή το K_1 είναι πεπερασμένο σύνολο, η κυρτή του θήκη είναι συμπαγής. Πράγματι, κάθε $y \in H_1$ είναι κυρτός συνδυασμός των συγκεκριμένων $\{x_1, \ldots, x_n\}$, υπάρχουν δηλαδή $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ μη αρνητικά με $\sum \lambda_k = 1$ ώστε $y = \sum_k \lambda_k x_k$. Δηλαδή το H_1 είναι η εικόνα $\psi(S)$ του συνόλου

$$S := \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_k = 1\}$$

μέσω της απεικόνισης $\psi : \mathbb{R}^n \to X : (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \to \sum_k \lambda_k x_k$. Αλλά το S είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, άρα είναι συμπαγές, και η ψ είναι συνεχής συνάρτηση, άρα το $H_1 = \psi(S)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X.

Συνεπώς το H_1 είναι ολικά φραγμένο: υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο $K_2 \subseteq X$ ώστε

$$H_1 \subseteq K_2 + B(0, \epsilon/2).$$

Τότε όμως

$$H \subseteq K_2 + B(0, \epsilon)$$

(για κάθε $x \in H$ υπάρχει $y \in H_1$ ώστε $\|x - y\| < \epsilon/2$ και για το y υπάρχει $u \in K_2$ ώστε $\|y - u\| < \epsilon/2$, άρα $\|x - u\| < \epsilon$) πράγμα που σημαίνει ότι το H είναι ολικά φραγμένο.

Κατά συνέπεια η κλειστή του θήκη είναι συμπαγής. $\square$

Για να ολοκληρώσουμε συναρτήσεις όπως η $t \to f(t) g_t : \mathbb{R} \to L^p(\mathbb{R})$ (όπου $f \in L^1(\mathbb{R})$ και $g \in L^p(\mathbb{R})$), χρειαζόμαστε μια επέκταση του Θεωρήματος 1:

Θεώρημα 3 *Έστω X χώρος Banach, Ω τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff (π.χ. $\Omega = \mathbb{R}^n$) και μ ένα κανονικό μέτρο Borel στον Ω. Για κάθε L^1-συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{C}$ και κάθε συνεχή και φραγμένη συνάρτηση $G : \Omega \to X$ το ολοκλήρωμα $\int f G d\mu$ υπάρχει και ανήκει στην κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου τιμών της G. Επιπλέον ισχύει η ανισότητα*

$$\left\| \int f(\omega) G(\omega) d\mu(\omega) \right\|_X \leq \sup_{\omega} \|G(\omega)\|_X \int |f(\omega)| d\mu(\omega).$$

Απόδειξη Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $F : \omega \to f(\omega)G(\omega) : \Omega \to X$ είναι ασθενώς ολοκληρώσιμη, εφόσον για κάθε $\phi \in X^*$ η συνάρτηση $\phi \circ F : \Omega \to \mathbb{C} : \omega \to f(\omega)\phi(G(\omega))$ είναι ολοκληρώσιμη, καθώς είναι γινόμενο μιας ολοκληρώσιμης (της f) και μιας συνεχούς και φραγμένης (της $\phi \circ G$).

Τώρα, εφόσον $f \in L^1(\Omega, \mu)$, υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ με συμπαγή φορέα, έστω $Q_n := \mathrm{supp} f_n$, ώστε $\|f - f_n\|_1 \to 0$. Οι συναρτήσεις $F_n : \omega \to \mu(Q_n)f_n(\omega)G(\omega) : Q_n \to X$ είναι συνεχείς, με συμπαγές πεδίο ορισμού, το μέτρο $\nu_n = \frac{1}{\mu(Q_n)}\mu$ είναι μέτρο πιθανότητας στον Q_n (θυμίζω ότι $\mu(Q_n) < \infty$) συνεπώς από το Θεώρημα 1 το ολοκλήρωμα $\int f_n(\omega)G(\omega)d\mu(\omega) = \int F_n(\omega)d\nu_n(\omega)$ υπάρχει στον X και ανήκει στην κλειστή κυρτή θήκη του συνόλου $\{F_n(\omega) : \omega \in Q_n\}$. Όμως

$$\mathrm{conv}\{F_n(\omega) : \omega \in Q_n\} \subseteq \mathrm{span}\{G(\omega) : \omega \in Q_n\} \subseteq \mathrm{span}\{G(\omega) : \omega \in \Omega\}$$

και συνεπώς για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το ολοκλήρωμα $\int f_n(\omega)G(\omega)d\mu(\omega)$ ανήκει στην κλειστή γραμμική θήκη

$$\overline{\mathrm{span}}\{G(\omega) : \omega \in \Omega\}\,.$$

Ισχυρισμός Η ακολουθία (y_n) όπου $y_n = \int f_n G d\mu$ είναι βασική στον X. Πράγματι, εφόσον η G είναι φραγμένη, υπάρχει M ώστε $\|G(\omega)\|_X \le M$ για κάθε $\omega \in \Omega$, οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}
\left\| \int f_n G d\mu - \int f_m G d\mu \right\|_X &\le \int \|f_n(\omega)G(\omega) - f_m(\omega)G(\omega)\|_X \, d\mu(\omega) \\
&= \int |f_n(\omega) - f_m(\omega)| \, \|G(\omega)\|_X \, d\mu(\omega) \\
&\le M \int |f_n(\omega) - f_m(\omega)| d\mu(\omega)
\end{aligned}$$

αλλά η (f_n) είναι βασική στον $L^1(\Omega, \mu)$, οπότε δείξαμε ότι η (y_n) είναι βασική στον X.

Έστω $y = \lim_n y_n$. Για κάθε $\phi \in X^*$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\phi(y) &= \lim_n \phi(y_n) = \lim_n \phi\left(\int f_n(\omega)G(\omega)d\mu(\omega) \right) \\
&= \lim_n \int \phi(f_n(\omega)G(\omega))d\mu(\omega) = \lim_n \int f_n(\omega)\phi(G(\omega))d\mu(\omega) \\
&= \int f(\omega)\phi(G(\omega))d\mu(\omega)\,,
\end{aligned}$$

γιατί $$\left| \int f_n(\omega)\phi(G(\omega))d\mu(\omega) - \int f(\omega)\phi(G(\omega))d\mu(\omega) \right| \le M \|f - f_n\|_1 \to 0.$$

Δείξαμε λοιπόν ότι υπάρχει ένα $y \in X$ ώστε για κάθε $\phi \in X^*$ να έχουμε

$$\phi(y) = \int f(\omega)\phi(G(\omega))d\mu(\omega) = \int \phi(f(\omega)G(\omega))d\mu(\omega)\,.$$

Επομένως, το $\int f_n G d\mu$ υπάρχει και ισούται με $y = \lim_n y_n$, άρα ανήκει στην $\overline{\mathrm{span}}\{G(\omega) : \omega \in \Omega\}$, αφού κάθε y_n ανήκει στην $\overline{\mathrm{span}}\{G(\omega) : \omega \in \Omega\}$. $\square$