Αρμονική Ανάλυση: Ασκήσεις 1

(Παράδοση: 9 Νοεμβρίου 2012)

1. Το $[0,2\pi)$ και η μοναδιαία περιφέρεια $\mathbb{T} = S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.
Δείξτε ότι η απεικόνιση $\chi : [0,2\pi) \to \mathbb{T} : \ t \to e^{it}$
είναι 1-1 και επί. Είναι οι απεικονίσεις χ, χ^{-1} Borel μετρήσιμες; Είναι συνεχείς;

2. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι 2π-περιοδική θέτουμε $\tilde{f}(e^{it}) = f(t)$ $(t \in \mathbb{R})$. Δείξτε ότι : (α) Η $f \to \tilde{f}$ είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση (δηλ. 1-1 και επί) μεταξύ 2π-περιοδικών συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ και συναρτήσεων $\tilde{f} : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$.
(β) Η f είναι συνεχής αν και μόνον αν η $\tilde{f}$ είναι συνεχής.
(γ) Η f ανήκει στον $L^1([0,2\pi])$ αν και μόνον αν $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{T})$.
(δ) Κάθε $g : [0,2\pi) \to \mathbb{C}$ επεκτείνεται μοναδικά σε 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

3. Βρείτε τους συντελεστές Fourier των συναρτήσεων

$$f(e^{it}) = \sqrt{2\pi}\,\chi_{[-1/2,1/2]}, \ \ \Delta(e^{it}) = (1-|t|)\chi_{[-1,1]}, \ \ g(e^{it}) = \chi_{[-1,0]} - \chi_{(0,1]}, \ \ h(e^{it}) = t.$$

Τι σχέση βλέπετε ανάμεσα στις f και Δ; ανάμεσα στις g και Δ;

4. Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση $x'' + 2kx' + \omega^2 x = f$.
Αν $f(t) = \sum f_m \exp(imt)$ και $\sum_{m\in\mathbb{Z}} |f_m| < \infty$, τότε πράγματι η διαφορική εξίσωση έχει την λύση $x(t) = \sum x_m \exp(imt)$ όπου οι συντελεστές (x_m) είναι οι $x_n = \frac{f_n}{-n^2+2kin+\omega^2}$.

5. (α) Αν $f \in C_c(\mathbb{R})$ (δηλ. η f είναι συνεχής με *συμπαγή φορέα*) και $f_t(s) = f(t-s)$, δείξτε ότι η απεικόνιση $\mathbb{R} \to (C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) : t \to f_t$ είναι συνεχής.
(β) Αν $f, g \in C_c(\mathbb{R})$ δείξτε ότι η $f * g$ ορίζεται καλά και ανήκει στην $C_c(\mathbb{R})$.
(γ) Δείξτε ότι δεν υπάρχει $f \in C_c(\mathbb{R})$ ώστε $f * g = g$ για κάθε $g \in C_c(\mathbb{R})$.

6. Μέθοδοι αθροισιμότητας Έστω (a_n) ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Ορίζουμε

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \quad \sigma_n = \frac{1}{n+1}(s_0 + s_1 + \cdots + s_n)$$

$$A(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k, \ r \in [0,1) \quad \text{αν η σειρά συγκλίνει}$$

Αν η (s_n) συγκλίνει, λέμε ότι η (a_n) είναι **αθροίσιμη**.
Αν η (σ_n) συγκλίνει, λέμε ότι η (a_n) είναι **Césaro αθροίσιμη**.
Αν το όριο $\lim_{r\to 1} A(r)$ υπάρχει, λέμε ότι η (a_n) είναι **Abel αθροίσιμη**.

Αποδείξτε ότι (α) $\sigma_n = \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) a_k$.
(β) Αν η (a_n) είναι αθροίσιμη στο s, τότε είναι Césaro αθροίσιμη, και μάλιστα στο ίδιο s, αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει [Παράδειγμα: $a_n = (-1)^n$].
(γ) Αν η (a_n) είναι Césaro αθροίσιμη στο s, τότε είναι Abel αθροίσιμη, και μάλιστα στο ίδιο s· το αντίστροφο δεν ισχύει [Παράδειγμα: $a_n = (-1)^n(n+1)$].
[Υπόδειξη: Απειρ. ΙΙβ, 31.54]

7. Ο πυρήνας του Dirichlet Αν $D_n(x) = \sum_{|k|\le n} e^{ikx}$, δείξτε ότι υπάρχει σταθερά c ώστε $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|dt \ge c \log n$. [Υπόδειξη: $|D_n(x)| \ge c\frac{|\sin((N+1/2)x)|}{|x|}$.]

8. Ποιές είναι οι πεπερασμένες υπομοάδες της ομάδας $\mathbb{T}$; Έστω $G \subseteq \mathbb{T}$ υποομάδα. Δείξτε ότι: Η G είναι συμπαγής αν και μόνον αν είναι πεπερασμένη (ισοδύναμα, έχει τη διακριτή τοπολογία)· αλλιώς, είναι πυκνή στην $\mathbb{T}$.