

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2005

Θέμα 1. Έστω ότι έχουμε δύο νομίσματα. Το ένα νόμισμα είναι κανονικό ενώ το άλλο έχει και στις δύο όψεις του την ένδειξη ‘γράμματα’. Επιλέγουμε ένα νόμισμα από τα δύο στην τύχη.

α) Ρίχνουμε το νόμισμα που επιλέξαμε και παρατηρούμε ότι εμφανίστηκε η ένδειξη ‘γράμματα’. Ποια είναι η πιθανότητα να είχε επιλεγεί το κανονικό νόμισμα;

β) Ρίχνουμε τα ίδιο νόμισμα για δεύτερη φορά και παρατηρούμε ότι εμφανίστηκε πάλι η ένδειξη ‘γράμματα’. Ποια είναι τώρα η πιθανότητα να είχε επιλεγεί το κανονικό νόμισμα;

γ) Ρίχνουμε το νόμισμα που επιλέξαμε τρεις φορές. Ποια είναι η πιθανότητα να εμφανισθεί και τις τρεις φορές η ένδειξη ‘γράμματα’;

Θέμα 2. Ο αριθμός X των χαρακτήρων που εκτυπώνει λανθασμένα σε μία σελίδα ένας εκτυπωτής ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο 1.

α) Ποια είναι η πιθανότητα σε μία σελίδα να υπάρχουν τουλάχιστον 2 λανθασμένοι χαρακτήρες;

β) Ποια είναι η πιθανότητα σε 10 σελίδες να υπάρξουν το πολύ 2 σελίδες που να περιέχουν (η καθεμία) τουλάχιστον 2 χαρακτήρες λανθασμένα εκτυπωμένους;

γ) Ποιος είναι ο μέσος αριθμός σελίδων που αναμένονται να εκτυπωθούν μέχρι να εμφανισθεί: **i)** για πρώτη φορά, **ii)** για πέμπτη φορά, σελίδα με τουλάχιστον 2 χαρακτήρες λανθασμένα εκτυπωμένους;

Θέμα 3. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{2(\alpha - x)}{\alpha\beta}, \quad 0 \leq x \leq \alpha, \quad \alpha, \beta > 0.$$

α) Να βρεθεί συνθήκη για τα α, β έτσι ώστε η f να είναι συνάρτηση πυκνότητας κάποιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X .

β) Να βρεθεί η αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής F της τυχαίας μεταβλητής X .

γ) Να βρεθούν η μέση τιμή και η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής X .

δ) Να υπολογισθεί η πιθανότητα $P\left(0 \leq X \leq \frac{\alpha}{2\nu}\right)$, $\nu = 1, 2, \dots$

και στη συνέχεια να βρεθεί το όριο $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \nu P\left(0 \leq X \leq \frac{\alpha}{2\nu}\right)$.

Θέμα 4. Η συνάρτηση κατανομής μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τον τύπο

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

α) Να δοθεί τύπος για τον υπολογισμό πιθανοτήτων της μορφής $P(\alpha \leq X \leq \beta)$, όπου $\alpha < 0$ και $\beta > 0$.

β) Να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής X .

γ) Να υπολογισθούν η μέση τιμή και η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής X .

δ) Να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής $Y = e^{-X}$.

**Απαντήστε σε 3 από τα 4 θέματα. Διάρκεια εξέτασης 2 ½ ώρες.
Καλή Επιτυχία.**