Πιθανότητες και Αναλογισμός

Λύσεις 4ης Σειράς Ασκήσεων

Ανατοκισμός - Ράντες

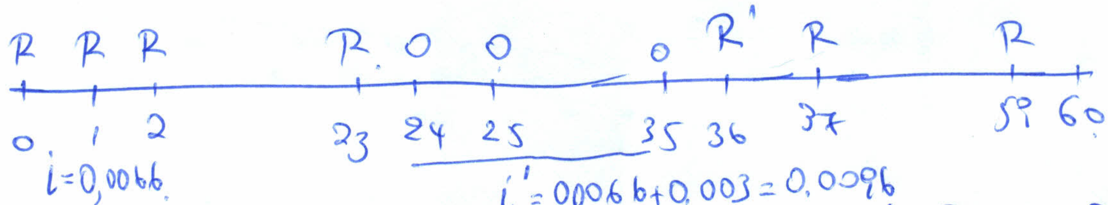
1 α) $P = 20.000$ €
$n = 60$ μηνιαίες
$r = 8\%$ ετήσιο $\Rightarrow i = \frac{8\%}{12} = \frac{2}{3}\% = 0,0066$

Θεωρούμε προκαταβαλλόμενη ράντα 60 πληρωμών ίσων με R με επιτόκιο περιόδου $i = 0,0066$

Τότε $R = \frac{P}{\ddot{a}_{60}} = \frac{20000}{\ddot{a}_{60}} = \frac{20.000}{49.816} = 401,47$ €

με $\ddot{a}_{60} = \frac{1-v^{60}}{d} = \frac{1-0,9935^{60}}{0,0065} = 49,816$

όπου $v = \frac{1}{1+i} = 0,9935$ και $d = iv = 1-v = 0,0065$

β) 

Οι δόσεις είναι προκαταβαλλόμενες άρα η δόση #25 θα πληρωθεί τη στιγμή t=24 στην αρχή της 25ης περιόδου.

Η οφειλή στη λήξη του 36ου μήνα θα είναι → Μελλοντική αξία της οφειλής από τη λήξη του 24ου στη λήξη του 36ου μήνα με επιτόκιο i'

$$\underbrace{\left(P - R\cdot \ddot{a}_{24}\right)(1+i)^{24}}(1+i')^{12}$$

→ μελ. αξία της οφειλής στη λήξη του 24ου μήνα με επιτόκιο i.

Παρούσα αξία της οφειλής στη λήξη του 36ου μήνα από τη στιγμή t=0

<u>Παρατήρηση</u> Παίρνουμε $\ddot{a}_{24}$ και όχι $\ddot{a}_{36}$ γιατί

οι πληρωμές από ~~κατά~~ το 24ο μήνα ως το 36ο μήνα είναι

ίσες με 0.

<u>Αναλυτικά</u>:

Παρούσα αξία των 24 πρώτων πληρωμών = Παρούσα αξία των 36 πρώτων πληρωμών λόγω του ότι οι πληρωμές 25 ως 36 είναι ίσες με 0

$= R\cdot\ddot{a}_{24}$ αφού οι δόσεις είναι προκαταβαλλόμενες

Υπόλοιπο οφειλής στη λήξη του 36ου μήνα τη στιγμή $t=0$ δηλαδή η παρούσα αξία της είναι $= P - R\ddot{a}_{24}$

Βρίσκω τη μελλοντική αξία της πληρωμής ως τη λήξη του 24ου μήνα δηλ την $t=24$ γιατί το επιτόκιο είναι i

$$= (P - R\ddot{a}_{24})(1+i)^{24}$$

Και βρίσκω τη μελλοντική αξία του παραπάνω ποσού για τους επόμενους 12 μήνες γιατί το επιτόκιο γίνεται $i' = i + 0.3\%$

$$= (P - R\ddot{a}_{24})(1+i)^{24}(1+i')^{12}$$

Το τελευταίο είναι και το ποσό της οφειλής στη λήξη του 36ου μήνα. Άρα για $\ddot{a}_{24} = \dfrac{1-0{,}9935^{24}}{0{,}0065} = 22{,}2887$

$$(20000 - 401{,}47\cdot 22{,}2887)\cdot(1{,}0066)^{24}\cdot(1{,}0096)^{12} = 14514{,}083€$$

Θεωρώ μία προκαταβαλλόμενη ράντα 24 δόσεων. (3)

με επιτόκιο $i = 0,0066$ και κεφάλαιο $P' = 14514,083$ €

$$R' = \frac{P'}{\ddot{a}_{24}} = \frac{14514,083}{22,2887} = 651,185 €$$

(2) $P = 20000$ € οφειλή.

ρύθμιση σε $n = 40$ ληξιπρόθεσμες μηνιαίες δόσεις.

με επιτόκιο $r = 6\%$ το χρόνο $\Rightarrow i = \frac{r}{k} = \frac{6\%}{12} = 0,005$

μηνιαίο επιτόκιο.

(α) Ληξιπρόθεσμη ράντα $n = 40$ ισοποσων πληρωμών R

με $i = 0,005$ Άρα $a_{40} = \frac{1-v^{40}}{i} = \frac{1-0,995^{40}}{0,005} = 36,336$

και $v = \frac{1}{1,005} = 0,995$ και $R = \frac{P}{a_{40}} = \frac{20000}{36,336} = 550,42$ €

(β) Όπως στο 1(β). Για τις περιόδους που δεν πληρώνει επιβάλλεται επιτόκιο $i' = i + 0,5\% = 0.01$.

$$(P - Ra_{30})(1+i)^{30}(1+i')^{10} =$$

$$= (20000 - 550,42 \cdot a_{30})(1,005)^{30}(1,01)^{10} =$$

$$= (20000 - 550,42 \cdot 27,923)(1,005)^{30}(1,01)^{10} = 6244,47 €$$

όπου

$$a_{30} = \frac{1-v^{30}}{i} = \frac{1-0,995^{30}}{0,005} = \frac{0,1396}{0,005} = 27,923$$

(γ) Συνεχής ράντα

Άρα αξία για $\bar{a}_{40}$ θα έχω $\bar{a}_{40} = \frac{1-v^{40}}{\delta} = \frac{1-0{,}995^{40}}{0{,}004938}$

όπου $\delta = \ln(1+i) = \ln(1{,}005) = 0{,}004938$ $= 36{,}4233$

→ άρα για μηνιαία αποπληρωμή των δόσεων θα έχω δόση

$$R = \frac{P}{\bar{a}_{40}} = \frac{2000}{36{,}4233} = 549{,}099 \text{ €}$$

→ αν δεν πληρώσει τις τελευταίες 10 δόσεις τότε το ποσό οφειλής

όταν λήξη του 40ου μήνα θα είναι

$$\left(P - R\bar{a}_{30}\right)(1+i)^{30}(1+i')^{10} = \left(2000 - 549{,}099 \cdot 27{,}99\right)\cdot(1{,}005)^{30}(1{,}01)^{10}$$

$$= 4630{,}7199\,(1{,}005)^{30}\cdot(1{,}01)^{10} = 5940{,}787 \text{ €}$$

όπου $\bar{a}_{30} = \frac{1-v^{30}}{\delta} = \frac{1-0{,}995^{30}}{0{,}004983} = 27{,}99$

(3) Κεφάλαιο $P = 1000€$

$n = 40$ μηνιαίες ισόποσες ληξιπρόθεσμες δόσεις με επιτόκιο περιόδου

$i = \frac{6\%}{12} = 0.5\% = 0.005$.

α) Η αναλογιστική αξία της δόσης είναι $R = \frac{P}{a_{40}}$

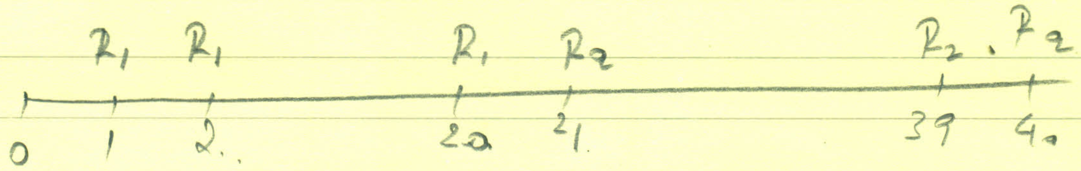
με $a_{40} = \frac{1 - v^{40}}{i} = \frac{1-(1.005)^{-40}}{0.005} = 36.17222\ldots$

Άρα $R = \frac{1000}{36.1722} = 27.646€$

β) Έστω R_1 η δόση για τους πρώτους 20 μήνες και

R_2 η δόση για τους τελευταίους 20 μήνες με $R_1 = 2R_2$

Τότε διαμορφώνεται η παρακάτω ληξιπρόθεσμη ράντα πληρωμών.



Η παρούσα αξία της παραπάνω ράντας είναι.

$$R_1 \cdot a_{20} + R_2 (v^{21} + v^{22} + \ldots + v^{40}) = P$$

$$\Leftrightarrow R_1 \cdot a_{20} + R_2 v^{20} (v + v^2 + \ldots + v^{20}) = P$$

$$\Leftrightarrow R_1 \cdot a_{20} + R_2 v^{20} \cdot a^{20} = P$$

$$\Leftrightarrow a_{20} (R_1 + R_2 v^{20}) = P \overset{R_1 = 2R_2}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow a_{20} R_2 (2 + v^{20}) = P \Leftrightarrow R_2 = \frac{P}{a_{20}(2 + v^{20})}$$

με $a_{20} = \frac{1 - v^{20}}{i} = \frac{1 - (1.005)^{-20}}{0.005} = 18.99$

Άρα $R_2 = \frac{10000}{13.99\,(2+1.005^{-20})} = 181.29$

και $R_1 = 2R_2 = 362.58$

(γ) Έχουμε την ίδια ακριβώς περίπτωση όπως στο (β) με

$$R_1 = \frac{R_2}{2} \Leftrightarrow R_2 = 2R_1$$

Άρα. από τη σχέση $a_{20}\,(R_1 + R_2 v^{20}) = P$

$$\overset{R_2=2R_1}{\Leftrightarrow} \quad a_{20} R_1 (1+2v^{20}) = P$$

$$\Leftrightarrow \quad R_1 = \frac{P}{a_{20}(1+2v^{20})} = \frac{10000}{13.99\,(1+2\cdot 1.005^{-20})}$$

$$\Leftrightarrow \quad R_1 = 187.42$$

και $R_2 = 2R_1 = 374.83$.

(4) Κεφάλαιο $P = 7000$€

Περίοδοι $n = 7\cdot 12 = 84$ μήνες.

Επιτόκιο Περιόδου $i = \frac{6\%}{12} = 0.005$.

Για την αποπληρωμή του δανείου θεωρούμε την παρακάτω

Αντιπροσωπευτική ροή

Δόση		0	0	Τόκος	Τόκος	R	R	R.
	0	1	24	25	36	37	83	84
Οφειλή	7000 →		P'		P''			0

Από το παραπάνω διάγραμμα

(i) Θα βρούμε το ποσό οφειλής στην λήξη της $24^{ης}$ περιόδου δηλ. τη μελλοντική αξία των 7000 € μετά από 24 μήνες με επιτόκιο $i = 0.005$ · καθώς δεν πληρώνεται κανένα ποσό μέχρι τότε. Άρα $P' = P(1+i)^{24} = 7000(1.005)^{24} = 7890.12$

(ii) Για αυτό το κεφάλαιο, το $P' = 7890.12$, πληρώνονται μόνο οι τόκοι/μήνα που είναι $P' \cdot i = 7890.12 \cdot 0.005 = 39.45$€

Άρα στη λήξη των περιόδων $25, \ldots, 36$ καταβάλλονται 39.45 €/περίοδο (μήνα) και το ποσό οφειλής στη λήξη του $36^{ου}$ μήνα θα είναι πάλι $P'' = 7890.12$

(iii) Το ποσό αυτό θέλουμε να αποπληρωθεί τους επόμενους $n = 48$ μήνες με ληξιπρόθεσμη ράντα. Άρα η δόση που πρέπει να καταβάλλουμε είναι:

$$R = \frac{P}{a_{48}} = \frac{7890.12}{42.58} = 185.30$$

με $a_{48} = \dfrac{1 - v^{48}}{i} = \dfrac{1 - (1.005)^{-48}}{0.005} = 42.58$.

(5) α) Ισχύει ότι $\delta = \log(1+i)$ οπότε για

$$0 < i < \frac{1}{10} \Rightarrow \log 1 < \log(1+i) < \log\frac{11}{10}$$

$$\Rightarrow 0 < \delta < \log\frac{11}{10}$$

Άρα για $\delta \in \left(0, \log\frac{11}{10}\right)$ με $G(\delta)$ την συν. κατανομή και $g(\delta)$ τη πυκνότητα της τμ. Δ

έχουμε $G(\delta) = P[\Delta \le \delta] = P[\log(1+I) \le \delta]$

$$= P[I \le e^{\delta} - 1]$$

$$= F(e^{\delta} - 1)$$, όπου F η σ.κ. της I.

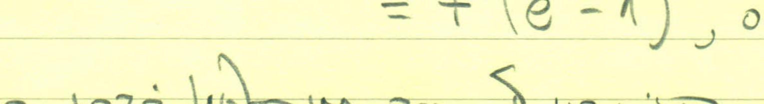
Παραγωγίζω κατά μέλη ως προς δ και έχω

$$g(\delta) = f(e^{\delta}-1)(e^{\delta}-1)' = f(e^{\delta}-1)e^{\delta} = 200(e^{\delta}-1)e^{\delta}$$

$$\Rightarrow g(\delta) = 200 e^{\delta}(e^{\delta}-1), \quad \delta \in \left(0, \log\frac{11}{10}\right)$$

β) Έστω $I_1, I_2, \ldots$ ισονόμες και ανεξάρτητες τμ με $\mu = E[I_j]$ και $\sigma^2 = Var(I_j)$

Η συσσωρευμένη αξία μιάς μονάδας μετά από n περιόδους με επιτόκια $I_1, I_2, \ldots, I_n$ είναι:



$$F_n = (1+I_1)(1+I_2)\ldots(1+I_n)$$

Άρα $E[F_n] = E[(1+I_1)(1+I_2)\ldots(1+I_n)] \overset{I_j \text{ ανεξ.}}{=}$

$$= E[1+I_1]\cdot E[1+I_2]\ldots E[1+I_n] =$$

$$= (1+E[I_1])(1+E[I_2])\cdots(1+E[I_n])$$

$$\overset{I_j \text{ ίσον.}}{=} (1+\mu)(1+\mu)\cdots(1+\mu) = (1+\mu)^n, \quad \mu = E(I_j)$$

$$Var(F_n) = E[F_n^2] - E[F_n] = E[F_n^2] - \left((1+\mu)^n\right)^2$$

με $$EF_n^2 = E\left[\left((1+I_1)(1+I_2)\cdots(1+I_n)\right)^2\right] \overset{I_j \text{ ανεξ.}}{=}$$

$$= E\left[(1+I_1)^2(1+I_2)^2\cdots(1+I_n)^2\right] =$$

$$= E\left[(1+I_1)^2\right]E\left[(1+I_2)^2\right]\cdots E\left[(1+I_n)^2\right] \overset{\text{ίσον.}}{=}$$

$$= \left(E\left[(1+I)^2\right]\right)^n$$

με $$E\left[(1+I)^2\right] = E\left[1+2I+I^2\right] = 1+2E[I]+E[I^2]$$

<u>Επιπλέον</u> $$\mu = E[I] = \int_0^{1/10} i f(i)\,di = \int_0^{1/10} 200 i^2\,di = 200\left.\frac{i^3}{3}\right|_0^{1/10}$$

$$= \frac{200}{3}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{15}.$$

και $$E[I^2] = \int_0^{1/10} i^2 f(i)\,di = \int_0^{1/10} 200 i^3\,di = 200\left.\frac{i^4}{4}\right|_0^{1/10}$$

$$= 50\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^4 = \frac{1}{200}$$

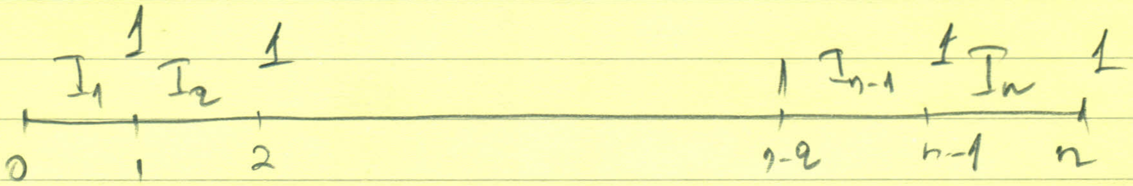
Άρα $$E(F_n) = (1+\mu)^n = \left(1+\frac{1}{15}\right)^n = \left(\frac{16}{15}\right)^n.$$

$$E\left((1+I)^2\right) = 1+\frac{2}{15}+\frac{1}{200} = \frac{683}{600}$$

$$EF_n^2 = \left(E(1+I)^2\right)^n = \left(\frac{683}{600}\right)^n$$ Άρα

$$Var(F_n) = \left(\frac{683}{600}\right)^n - \left(\frac{16}{15}\right)^{2n}$$

(γ). Θεωρούμε ληξιπρόθεσμη τυχαία ράντα n περιόδων με επιτόκια $I_1, I_2, \ldots, I_n$ ανεξ. και ισον. κλπ.



Η συσσωρευμένη ή μελλοντική της αξία στο τέλος της n-οστής περιόδου είναι:

$$S_n = 1 + (1+I_n) + (1+I_n)(1+I_{n-1}) + \cdots + (1+I_n)(1+I_{n-1})\cdots(1+I_2)$$

μελλ. αξία της n-οστής δόσης — μελλ. αξία της $n-1$ δόσης — μελλ. αξία της $n-2$ δόσης — μελλ. αξία της 1ης δόσης.

Από (β) $E\left[(1+I_n)(1+I_{n-1})\cdots(1+I_j)\right] = (1+\mu)^{n-j+1} = \left(\frac{16}{15}\right)^{n-j+1}$

Άρα

$$E[S_n] = E\left[1 + (1+I_n) + (1+I_n)(1+I_{n-1}) + \cdots + (1+I_n)(1+I_{n-1})\cdots(1+I_2)\right]$$

ισονομ. ανεξ.

$$= 1 + (1+\mu)^1 + (1+\mu)^2 + \cdots + (1+\mu)^{n-1} = \frac{1-(1+\mu)^n}{1-(1+\mu)} =$$

$$= \frac{(1+\mu)^n - 1}{\mu} = \frac{(16/15)^n - 1}{1/15} = 15\left(\left(\frac{16}{15}\right)^n - 1\right)$$

6 (α) Ισχύει ότι $i = e^{\delta} - 1$ όπου i το επιτόκιο και δ η ένταση του ανατοκισμού.

Για $0 < \delta < \frac{1}{10} \Rightarrow 0 < i < e^{1/10} - 1$

Αν $F(i)$ η συν. κατανομής, $f(i)$ η πυκνότητα της τ.μ. I.

τότε για $i \in (0, e^{1/10}-1)$ έχουμε

$$F(i) = P[I \le i] = P[e^{\Delta} - 1 \le i] = P[\Delta \le \log(1+i)]$$

$$= G(\log(1+i)), \quad G \text{ η συν. της } \Delta$$

Παραγωγίζω κατά μέλη ως προς i και έχω

$$f(i) = G'(\log(1+i)) \cdot \frac{1}{1+i} = g(\log(1+i))\frac{1}{1+i}$$

$$= \frac{10}{1+i}, \quad 0 < i < e^{1/10} - 1$$

(β) Η μελλοντική ή συσσωρευμένη αξία μιας μονάδας μετά από n περιόδους με επιτόκια $I_1, I_2, \dots I_n$ ισόν. ανεξ. τ.μ.

είναι $F_n = (1+I_1)(1+I_2)\cdots(1+I_n)$ (κοίτα Άσκ. 5)

$$\Rightarrow EF_n = E[(1+I_1)(1+I_2)\cdots(1+I_n)] \overset{\text{ανεξ.}}{\underset{\text{ισον.}}{=}} [E(1+I)]^n$$

$I_j \overset{d}{\sim} I$, $E[I] = E[I_j]$

Όμως $E(1+I) = Ee^{\Delta}$ γιατί $\Delta = \log(1+I) \Leftrightarrow 1+I = e^{\Delta}$

$$E(F_n) = (E[e^{\Delta}])^n = (M_{\Delta}(1))^n$$

$$\Delta \sim U\left(0, \tfrac{1}{10}\right) \Rightarrow M_\Delta(t) = \frac{e^{t/10} - 1}{t\left(1/10 - 0\right)}$$

$$\Rightarrow M_\Delta(1) = 10\left(e^{1/10} - 1\right)$$

άρα $EF_n = \left(10\left(e^{\frac{1}{10}} - 1\right)\right)^n$

Όπως στην Άσκ. 5 υπολογίζω πρώτα το EF_n^2 όπου

$$EF_n^2 = \dots = \left(E(1+I)^2\right)^n = \left(E e^{2\Delta}\right)^n = \left(M_\Delta(2)\right)^n$$

$$= \left(\frac{10}{2}\left(e^{2/10} - 1\right)\right)^n$$

$$= \left(5\left(e^{1/5} - 1\right)\right)^n$$

Άρα $Var(F_n) = EF_n^2 - (EF_n)^2 = \left(5(e^{1/5} - 1)\right)^n - \left(10(e^{1/10} - 1)\right)^{2n}$

(γ) Όπως στην Άσκηση 5(β)

Θεωρώ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές n περιόδων με επιτόκια

$I_1, I_2, \dots I_n$ όλες ισόνομες c.f. και η μεταβλητή της

οπότε είναι

$$S_n = 1 + (1+I_n) + (1+I_n)(1+I_{n-1}) + \dots + (1+I_n)(1+I_{n-1})\cdots(1+I_2)$$

Άρα

$$E[S_n] = 1 + E(1+I) + \left(E(1+I)\right)^2 + \dots + \left(E(1+I)\right)^{n-1}$$ λόγω ανεξαρτησίας και ισονομίας

$$= 1 + M_\Delta(1) + \left(M_\Delta(1)\right)^2 + \dots + \left(M_\Delta(1)\right)^{n-1}$$

$$= \frac{1 - M_\Delta(1)^n}{1 - M_\Delta(1)} = \frac{1 - \left(10\left(e^{\frac{1}{10}} - 1\right)\right)^n}{1 - 10\left(e^{\frac{1}{10}} - 1\right)}$$

7 $I_1, I_2, \ldots, I_n$ τ.μ. = ετήσια επιτόκια για τα επόμενα n έτη ανεξ. και ισον. $I_k \sim f(i) = 12000\, i^2 (1-10i)$, $0 < i < \frac{1}{10}$

(α) Έστω $G(\delta)$ η συνάρτηση κατανομής της ετήσιας ανατοκισμού.

$\Delta_j = \ln(1+I_j)$, $j=1\ldots n$. Για $0 < i < \frac{1}{10} \Rightarrow 0 < \ln(1+i) < \ln\frac{11}{10}$
$\Rightarrow 0 < \delta < \ln\frac{11}{10}$

$G(\delta) = P[\Delta \le \delta] = P[\ln(1+I) \le \delta]$

$= P[I \le e^\delta - 1] = F(e^\delta - 1)$, με $F(i)$ σ.κ.

$\xRightarrow{d/d\delta} g(\delta) = f(e^\delta - 1)\cdot e^\delta = 12000\,(e^\delta-1)^2\,(1-10(e^\delta-1))\,e^\delta$, $0<\delta<\ln\frac{11}{10}$

(β) F_n = μελλουσα αξία μιας μονάδας μετά από n έτη

τότε $F_n = 1.\,(1+I_1)(1+I_2)\ldots(1+I_n)$

$\Rightarrow E(F_n) = E\left((1+I_1)\cdot(1+I_2)\ldots(1+I_n)\right) \overset{I_j \text{ ανεξ.}}{=}$

$= \prod_{j=1}^{n} E(1+I_j) = \prod_{j=1}^{n} (1+EI_j) \underset{EI_j=\mu}{\overset{I_j \text{ ισον}}{=}} (1+\mu)^n$

όπου $\mu = EI_j = \int_0^{\frac{1}{10}} i.\,12000\,i^2(1-10i)\,di = 12000\left[\frac{i^4}{4} - 10.\frac{i^5}{5}\right]_0^{1/10}$

$= 12000\left[\left(\frac{1}{10}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)\right] = \frac{12000}{20\cdot 10^4} = 0.06$

άρα $E(F_n) = (1,06)^n$

$$Var(F_n) = E(F_n)^2 - (EF_n)^2 = (1,124)^n - (1,06)^{2n}$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι $EF_n^2 = E\left[(1+I_1)^2 \cdots (1+I_n)^2\right] =$

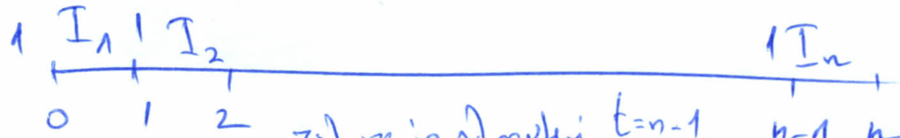
$$= \prod_{j=1}^{n} E(1+I_j)^2 = (1,124)^n$$

και $E(1+I_j)^2 = 1 + 2EI_j + EI_j^2 = 1 + 2\cdot 0.06 + 0.004 = 1.124$

$$EI_j^2 = \int_0^{1/10} i^2 \cdot 12000\, i^2 (1-10i)\, di = 12000 \left[\frac{i^5}{5} - 10\frac{i^6}{6}\right]_0^{1/10}$$

$$= \frac{12000}{30 \cdot 10^5} = 0.004$$

γ) Θεωρούμε προκαταβλητέα ράντα n πληρωμών με επιτόκια περιόδου $I_1, I_2, \dots I_n$



$$\ddot{S}_n = \text{μελλοντική αξία των n μοναδιαίων πληρωμών στη λήξη} = \overbrace{(1+I_n)}^{\text{τελευταία πληρωμή } t=n-1} + (1+I_n)(1+I_{n-1}) + \dots + \underbrace{(1+I_1)(1+I_2)\cdots(1+I_{n-1})(1+I_n)}_{\text{πρώτη πληρωμή } t=0}$$

$$\Rightarrow ES_n = E\left[(1+I_n) + (1+I_n)(1+I_{n-1}) + \dots + (1+I_1)(1+I_2)\cdots(1+I_n)\right]$$

$$\overset{\text{γραμμ.}}{=} E\left[1+I_n\right] + E\left[(1+I_n)(1+I_{n-1})\right] + \dots + E\left((1+I_1)(1+I_2)\cdots(1+I_n)\right]$$

$$\overset{\text{ανεξ}}{=} E[1+I_n] + E[1+I_n]E[1+I_{n-1}] + \dots + E[1+I_1]E[1+I_2]\dots E[1+I_n]$$

$$\overset{\text{ισον.}}{=} (1+\mu) + (1+\mu)^2 + \dots + (1+\mu)^n = (1+\mu)\left[1 + (1+\mu) + (1+\mu)^2 + \dots + (1+\mu)^{n-1}\right]$$

$E[1+I_j] = 1+\mu$

$$= (1+\mu)\cdot\frac{1-(1+\mu)^n}{1-(1+\mu)} = \frac{1+\mu}{\mu}\left((1+\mu)^n - 1\right)$$

$$= \frac{(1+\mu)^n - 1}{\dfrac{\mu}{1+\mu}} = \frac{(1+\mu)^n - 1}{d} = \ddot{s}_{n,\mu}$$

$$d = \frac{\mu}{1+\mu} = \frac{0.06}{1.06} = 0.566$$

$$ES_n = 1.766 \cdot \left((1.06)^n - 1\right)$$