Πιθανότητες και Αναλογισμός

3^{η} Σειρά Ασκήσεων – Δεκέμβριος 2018

Στοχαστική Ανέλιξη Πλεονάσματος - Χρεοκοπία

1. **(α)** Έστω ΣΑΠ $U(t),\ t \geq 0$ με σα. αποζημιώσεων $S(t) \sim$ σύνθετη Poisson(λ).
Αν $\phi(t) = \frac{\sqrt{Var(U(t))}}{E(U(t))}$ να αποδείξετε ότι

$$\lim_{t\to\infty} \phi(t) = \begin{cases} 0, & \text{αν } \theta > 0 \\ \infty, & \text{αν } \theta = 0 \end{cases}$$

(β) Έστω δύο ανεξάρτητες ΣΑΠ $U_1(t), U_2(t),\ t \geq 0$ με το ίδιο αρχικό κεφάλαιο $u = U_1(0) = U_2(0)$, το ίδιο περιθώριο ασφαλείας θ και με ισόνομες σύνθετες Poisson(λ) στοχαστικές ανελίξεις αποζημιώσεων $S_1(t), S_2(t)$, αντίστοιχα.
Αν θεωρήσουμε τη συγχώνευσή τους σε μία ΣΑΠ $U(t) = U_1(t) + U_2(t)$ με αρχικό κεφάλαιο u' και περιθώριο ασφαλείας θ', αλλά με το λόγο $\frac{\sqrt{Var(U(t))}}{E(U(t)}$ να είναι ίδιος για κάθε t με τον αντίστοιχο λόγο είτε για την $U_1(t)$ είτε για την $U_2(t)$, να αποδείξετε ότι $u' = u\sqrt{2}$ και $\theta' = \theta\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Έστω ΣΑΠ $U(t),\ t \geq 0$ με σα. αποζημιώσεων $S(t) \sim$ σύνθετη Poisson(λ) με αρχικό κεφάλαιο $u = U(0)$, περιθώριο ασφαλείας θ, ισόνομους και ανεξάρτητους τυχαίους κινδύνους X_i και συντελεστή Προσαρμογή R.

(α) Να βρεθεί το θ στις παρακάτω περιπτώσεις από την εξίσωση του συντελεστή προσαρμογής.

ι. Αν ο κίνδυνος $X \sim P[X = ln2] = 1$ και $R = 1$. $(\theta = \frac{1-ln2}{ln2})$

ιι. Αν $P(X = 1) = \frac{1}{4}$ και $P(X = 2) = \frac{3}{4}$ για επιθυμητό $R = ln2$. $(\theta = \frac{10-7ln2}{7ln2})$

ιιι. Αν ο κίνδυνος $X \sim f(x) = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}e^{-x},\ x \geq 0\ (k = 1, 2, \ldots)$ και $R = \frac{1}{2}$. $(\theta = \frac{2^{k+1}-(k+2)}{k})$

(β) Αν ο κίνδυνος $X \sim b(2, \frac{1}{2})$ να βρεθεί η προσέγγιση πρώτης τάξης για το συντελεστή προσαρμογής. $(R \approx \frac{2\theta\mu_1}{\mu_2})$

(γ) Αν ο κίνδυνος X έχει ργ την $M_X(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{2}\right)^k$ να βρεθεί ο συντελεστής προσαρμογής για $\theta = \frac{1}{10}$. Αν θέλουμε να επιτύχουμε το ίδιο R για κίνδυνο με ργ $M_X(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{3}\right)^k$, να βρεθεί το θ.

(δ) Ο συντελεστής προσαρμογής για τους κινδύνους X και $Y = X + 1$ με $E[X] = 1$ και περιθώρια ασφαλείας $\theta = 1$ και θ', αντίστοιχα, είναι $R = 1$, να βρείτε το θ'. Αν ο συντελεστής προσαρμογής για το κίνδυνο X με $\theta = \frac{3}{2}(e-1)$ είναι $R = 2$, να αποδείξετε ότι $M_X(2) = 3e$.

3. Έστω ΣΑΠ διακριτού χρόνου $U_n = u + G_1 + G_2 + \ldots + G_n$ όπου $G_i, i = 1, 2, \ldots$ ακολουθία ανεξ. και ισόν. τ.μ. για τα αποτελέσματα των διαδοχικών περιόδων.

(α) Να αποδείξετε ότι η προσέγγιση του σπ. $\tilde{R} \approx \frac{2\mu}{\sigma^2}$ είναι ακριβής

ι. αν $G \sim N(\mu, \sigma^2)$,

ιι. αν $G = c - S$ με συνολική αποζημίωση $S \sim$ σύνθετη Poisson(λ). Στη περίπτωση αυτή $\tilde{R} = \frac{2\theta\mu_1}{\mu_2}$ με $\mu_1 = E[X]$ και $\mu_2 = E[X^2]$.

(β) Αν η σπ της τ.μ. G δίνεται από τις

$$P(G = -1) = q \text{ και } P(G = n) = qp^{n+1},\ p > q,$$

να αποδείξετε ότι $\tilde{R} = ln\frac{p}{q}$.

(γ) Αν η σππ της συνεχούς τ.μ. G είναι η

$$f(g) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{g}, & g < 0 \\ \frac{1}{3}e^{-g}, & g \geq 0 \end{cases},$$

να αποδείξετε ότι $\tilde{R} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(δ) Αν $G = c + I - S$ με συνολική αποζημίωση $S \sim$ σύνθετη Poisson$(\lambda,\ Exp(\beta))$ και συνολικό έσοδο από επενδύσεις ασφαλίστρων $I \sim$ σύνθετη Poisson$(\lambda,\ Exp(2\beta))$, ανεξάρτητη της S, να αποδείξετε ότι $\tilde{R} = \frac{2\beta}{5}$.

4. Για τη κάλυψη των παρακάτω μοναδικών ζημιογόνων γεγονότων X από τη ΣΑΠ $U(t) = u + ct - S(t)$ ισχύει ότι $P(T \leq t) = \frac{t}{t+1}$.

   (α) Αν $X \sim U(0, 100)$ και $u = 50,\ c = 10$, να δείξετε ότι $\psi(50) = \frac{1}{2} - ln6^{\frac{1}{10}}$.

   (β) Αν $X \sim U(a, b)$ και $u > a$, να δείξετε ότι

$$\psi(u) = \frac{b-u}{b-a} - \frac{c}{b-a} ln\left(1 + \frac{b-u}{c}\right).$$

   (γ) Αν $X \sim f(x) = 2x,\ 0 \leq x \leq 1$, να δείξετε ότι

$$\psi(u) = (1 - u^2) - 2c(1-u) - ln\left(\frac{c+1-u}{c}\right)^{2c(u-c)}.$$

5. Για τη περίπτωση της κάλυψης εκθετικού κινδύνου $X \sim Exp(\beta)$ από ΣΑΠ $U(t),\ t \geq 0$ με σα. συνολικών αποζημιώσεων $S(t)$ σύνθετη Poisson(λ), να αποδείξετε τα παρακάτω

   (α) Οι τ.μ. L_1 και $-U(T)|T < \infty$ είναι επίσης εκθετικές με παράμετρο β.

   (β) Η ροπογεννήτρια της μέγιστης σωρευτικής απώλειας είναι $M_L(r) = \frac{\theta\beta - \theta r}{\theta\beta - (1+\theta)r}$ και η συνάρτηση κατανομής της $F_L(x) = 1 - \frac{1}{1+\theta}\exp\{-\frac{\theta}{1+\theta}\beta x\}$.

6. Για τη περίπτωση της κάλυψης κινδύνου X από ΣΑΠ $U(t),\ t \geq 0$ με σα. συνολικών αποζημιώσεων $S(t)$ σύνθετη Poisson(λ), να βρείτε:

   (α) το συντελεστή προσαρμογής αν $\theta = 3$ και η σππ της X είναι η $f(x) = \frac{1}{4}(1+x+x^2)e^{-x},\ x > 0$.

   (β) την πιθανότητα χρεοκοπίας αν $\theta = \frac{3}{2}$ και η X είναι μίξη δύο εκθετικών με

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + e^{-2x},\ x > 0.$$

Επιμέλεια Ασκήσεων: Γιάννης Δημητρακόπουλος