ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 3

Άσκηση 1 Ο αριθμός ζημιών ακολουθεί $N \sim Poisson(2)$

$$\Rightarrow P_N(j) = e^{-2}\frac{2^j}{j!}, \quad j=0,1,2\ldots$$

Η ζημιά ακολουθεί διακριτή κατανομή με $P(X=x)=p(x)=\frac{x}{10}$, $x=1,2,3,4$.

Για την πιθανότητα $P(S=k)$, όπου $S=X_1+\ldots+X_N$, εφαρμόζουμε τον τύπο ολικής πιθανότητας

$$P[S=k]=\sum_{j=0}^{\infty} P[S=k \mid N=j]\cdot P[N=j]$$

Για $k=0$, προφανώς πρέπει $N=0$ (επειδή κάθε ζημιά είναι αυστηρά θετική)

Επίσης επειδή κάθε ζημιά $X_j \in \{1,2,3,4\} \Rightarrow X_j \geq 1$

για να ισχύει $S=k$, $(k>0)$ θα πρέπει $k \in \mathbb{N}$, και $N \leq k$, επομένως

$$P[S=k \mid N=j]=0 \quad \forall\, j>k.$$

Από τα παραπάνω παίρνουμε:

$$P[S=0]=P[N=0]$$

$$P[S=k] = \sum_{j=1}^{k} P[S=k \mid N=j]\cdot P(N=j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} P(X_1+\cdots+X_j=k)\cdot P(N=j), \quad \text{για } k\in\mathbb{N}.$$

Για $k=0,1,2,3,4$ έχουμε τώρα·

$$P(S=0) = P(N=0) = e^{-2}$$

$$P(S=1) = P(N=1)\cdot P(X_1=1) = 2e^{-2}\,\frac{1}{10} = \frac{2}{10}e^{-2}$$

$$P(S=2) = P(N=1)\cdot P(X_1=2) + P(N=2)\cdot P(X_1+X_2)=2$$

Όμως $P(X_1=2) = \frac{2}{10}$

$$P(X_1+X_2=2) = P(X_1=1, X_2=1) = P(X_1=1)P(X_2=1) = \left(\frac{1}{10}\right)^2$$

$$\Rightarrow P(S=2) = 2e^{-2}\cdot\frac{2}{10} + \frac{4e^{-2}}{2}\cdot\frac{1}{100} = \frac{42}{100}e^{-2}$$

$$P(S=3) = P(N=1)P(X_1=3) + P(N=2)P(X_1+X_2=3) + P(N=3)P(X_1+X_2+X_3=3)$$

$$P(X_1=3) = \frac{3}{10}$$

$$P(X_1+X_2=3) = P(X_1=1, X_2=2) + P(X_1=2, X_2=1) = \frac{2}{100} + \frac{2}{100} = \frac{4}{100}$$

$$P(X_1+X_2+X_3=3) = P(X_1=1, X_2=1, X_3=1) = \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{1000}$$

$$\Rightarrow P(S=3) = \frac{3}{10}2e^{-2} + \frac{4}{100}\cdot\frac{4}{2}e^{-2} + \frac{1}{1000}\cdot\frac{9}{6}e^{-2} = 0{,}682\,e^{-2}$$

$$P(S=4) = \sum_{j=1}^{4} P(N=j)P(X_1+\cdots+X_j=4)$$

$$P(X_1=4) = \frac{4}{10}$$

$$P(X_1+X_2=4) = P(X_1=1,X_2=3) + P(X_1=2, X_2=2) + P(X_1=1, X_2=3) = \frac{10}{100}$$

$$P(X_1+X_2+X_3=4) = P(X_1=1, X_2=1, X_3=2) + P(X_1=1, X_2=2, X_3=1) + P(X_1=2, X_2=1, X_3=1) = \ldots$$

(το υπόλοιπο να συμπληρωθεί)

Άσκηση 2 Σωστή εκφώνηση: Η S είναι σύνθετη Poisson(λ) με κατανομή ζημιάς $p_X(x) = \frac{-1}{\log(1-\theta)} \frac{\theta^x}{x}$, $x = 1, 2, \dots$ όπου θ σταθερά με $0<\theta<1$. Να δειχθεί ότι όταν $\lambda = m[-\log(1-\theta)]$, για κάποιο $m \in \mathbb{N}$, η S ακολουθεί αρνητική διωνυμική $NB(p,r)$ με $p = 1-\theta$, και $r = m$.

Απόδειξη: [Γνωρίζουμε τον τύπο $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\theta^j}{j} = -\log(1-\theta)$ για $|\theta|<1$]. Η πιθανογεννήτρια της κατανομής ζημιάς είναι:

$$P_X(z) = \sum_{x=1}^{\infty} p_X(x) z^x = -\frac{1}{\log(1-\theta)} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(\theta z)^x}{x} = \frac{\log(1-\theta z)}{\log(1-\theta)}, \quad |z| < \frac{1}{\theta}$$

Επειδή $N \sim Poisson(\lambda) \Rightarrow P_N(z) = e^{\lambda(z-1)}$.

Επομένως από τον τύπο της σύνθεσης πιθανογεννητριών έχουμε:

$$P_S(z) = P_N(P_X(z)) = e^{\lambda(P_X(z)-1)} = e^{\lambda\left[\frac{\log(1-\theta z)}{\log(1-\theta)} - 1\right]} =$$

$$= e^{(\lambda/\log(1-\theta))\cdot[\log(1-\theta z) - \log(1-\theta)]} = e^{\frac{\lambda}{\log(1-\theta)} \cdot \log\frac{1-\theta z}{1-\theta}} =$$

$$= \left(\frac{1-\theta z}{1-\theta}\right)^{\frac{\lambda}{\log(1-\theta)}} = \left(\frac{1-\theta z}{1-\theta}\right)^{m}.$$

Γνωρίζουμε ότι η πιθανογεννήτρια της $NB(p,r)$ είναι $\left(\frac{p}{1-(1-p)z}\right)^r$

Επομένως, λόγω της ιδιότητας χαρακτηρισμού, η S ακολουθεί Αρνητική Διωνυμική $NB(1-\theta, m)$

Άσκηση 3

$S^{(1)}: N^{(1)} \sim Poisson(2), \quad X^{(1)} = \begin{cases} 1, & 0.2 \\ 2 & 0.6 \\ 3 & 0.2 \end{cases}$

$S^{(2)}: N^{(2)} \sim Poisson(6), \quad X^{(2)} = \begin{cases} 3, & 0.5 \\ 4, & 0.5 \end{cases}$

Από την ιδιότητα της πρόσθεσης σύνθετων Poisson (ανεξάρτητων) η $S = S^{(1)} + S^{(2)}$ ακολουθεί σύνθετη Poisson με $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 8$ και κατανομή ζημιάς X τη μείξη των $X^{(1)}, X^{(2)}$ με βάρη $\frac{\lambda_1}{\lambda} = \frac{1}{4}$, $\frac{\lambda_2}{\lambda} = \frac{3}{4}$ αντίστοιχα, δηλαδή

$$X = \begin{cases} X^{(1)} & \text{μπ } 0,25 \\ X^{(2)} & \text{μπ. } 0,75 \end{cases}$$, ισοδύναμα

$$X = \begin{cases} 1, & \text{μπ. } 0,25 \cdot 0.2 = 0.05 \\ 2, & \text{μπ } 0,25 \cdot 0.6 = 0.15 \\ 3, & \text{μπ } 0,25 \cdot 0,2 + 0,75 \cdot 0.5 = 0.425 \\ 4, & \text{μπ. } 0.75 \cdot 0,5 = 0.375 \end{cases}$$

Άσκηση 4 [Σωστή εκφώνηση: $\tilde{p}(x) = \begin{cases} \alpha p(x), & x = 1, 2, \dots \\ 1-\alpha, & x = 0 \end{cases}$]]

Στο πρώτο μοντέλο $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $X \sim p(x)$

οπότε $P_N(z) = e^{\lambda(z-1)}$ και $P_X(z) = \sum_{x=1}^{\infty} p(x) z^x$,

$P_S(z) = P_N(P_X(z)) = e^{\lambda(P_X(z)-1)}$

Στο δεύτερο μοντέλο $\tilde{N} \sim \text{Poisson}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)$, $\tilde{X} = \begin{cases} X & \text{μ.π. } \alpha \\ 0 & \text{μ.π. } 1-\alpha \end{cases}$

$P_{\tilde{N}}(z) = e^{\frac{\lambda}{\alpha}(z-1)}$, $P_{\tilde{X}}(z) = E(z^{\tilde{X}}) = \alpha E(z^X) + (1-\alpha) E(z^0) =$

$= \alpha P_X(z) + (1-\alpha) \Rightarrow P_{\tilde{S}}(z) = P_{\tilde{N}}(P_{\tilde{X}}(z)) = e^{\frac{\lambda}{\alpha}(\alpha P_X(z) + 1 - \alpha - 1)} =$

$= e^{\frac{\lambda}{\alpha} \cdot \alpha (P_X(z) - 1)} = e^{\lambda(P_X(z)-1)} = P_S(z)$

Επομένως οι S και $\tilde{S}$ ακολουθούν την ίδια κατανομή.

Ερμηνεία: Στο δεύτερο μοντέλο ο ρυθμός ατυχημάτων είναι

$\frac{\lambda}{\alpha} > \lambda$, αλλά ένα ποσοστό $1-\alpha$ των ατυχημάτων είναι χωρίς

ζημιά, ενώ για τα υπόλοιπα η ζημιά ακολουθεί κατανομή X.

Αυτό είναι ισοδύναμο με το μοντέλο όπου ποσοστό α των $\frac{\lambda}{\alpha}$ ατυχημάτων, δηλαδή λ ατυχήματα κατά μέσο όρο, έχουν κατανομή ζημιάς X, ενώ τα υπόλοιπα ατυχήματα δε λαμβάνονται υπόψη. Έχουμε δηλαδή ισοδυναμία με το πρώτο μοντέλο.

Άσκηση 5 Από το Πόρισμα 3 κ' τις (11) - (14)

έχουμε ότι για $N \sim Geom(p)$ (δηλ. $NB(p,1)$)

και $X \sim Exp(1)$, η S ακολουθεί μεικτή κατανομή

με πιθανότητα $P(S=0)=p$ και $S \sim Exp(p)$ με πιθανότητα $q=1-p$.

Έστω τώρα $\tilde{N} \sim NB(p,r)$ και $X \sim Exp(1)$, $\tilde{S} = X_1 + \dots + X_{\tilde{N}}$.

Τότε $P_{\tilde{N}}(z) = \left[P_N(z)\right]^r$ και επομένως

$M_{\tilde{S}}(t) = P_{\tilde{N}}(M_X(t)) = \left[P_N(M_X(t))\right]^r = \left(M_S(t)\right)^r$,

δηλαδή η $\tilde{S}$ ακολουθεί την κατανομή του αθροίσματος r ανεξ.

και ισόνομων S : $\tilde{S} = S_1 + \dots + S_r$

όπου S_i, $i=1,\dots,r$ ατπ, S : μεικτή εκθετική όπως παραπάνω.

Άσκηση 8 $\quad N \sim B(240, 1/2)$, $X \sim U(0, A)$, $S = X_1 + \cdots + X_N$

$E(N) = 240 \cdot \frac{1}{2} = 120$, $Var(N) = 240 \cdot \frac{1}{4} = 60$,

$EX = \mu = \frac{A}{2}$, $Var(X) = \sigma^2 = \frac{A^2}{12}$.

Επομένως $E(S) = E(N) \cdot E(X) = 120 \cdot \frac{A}{2} = 60A$

$V(S) = \mu^2 V(N) + \sigma^2 E(N) = \frac{A^2}{4} \cdot 60 + \frac{A^2}{12} \cdot 120 = 25A^2 \Rightarrow \sigma_S = 5A$

Επομένως το διάστημα $(\mu_S \pm 3\sigma_S)$ είναι το $(60 \pm 15)A = (45A, 75A)$

Σωστή Απάντηση : Γ

Άσκηση 9 $\quad f_S(x) = \frac{3}{x^4}$, $x \geq 1 \Rightarrow ES = \int_1^\infty x f_S(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{3}{x^3}\,dx = \frac{3}{2}$

$F_S(x) = \int_1^x f_S(y)\,dy = \int_1^x \frac{3}{y^4}\,dy = 1 - \frac{1}{x^3}$, $ES^2 = \int_1^\infty \frac{3}{x^2}\,dx = 3 \Rightarrow V(S) = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$

$P(S \leq (1+\theta)E(S)) = F\left((1+\theta)\frac{3}{2}\right) = 1 - \frac{1}{\frac{27}{8}(1+\theta)^3} = 1 - \frac{8}{27(1+\theta)^3} = 0.95 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{8}{27(1+\theta)^3} = 0.05 \Rightarrow (1+\theta)^3 = \frac{8}{(0.05) \cdot 27} = 20 \cdot \frac{2^3}{3^3} \Rightarrow (1+\theta) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{20}$

$\Rightarrow \theta = \frac{2}{3}\sqrt[3]{20} - 1.$

Επίσης $P[S \leq ES + \lambda V(S)] = P\left(S \leq \frac{3}{2} + \lambda \cdot \frac{3}{4}\right) = F\left(\frac{6+3\lambda}{4}\right) = 1 - \frac{4^3}{(6+3\lambda)^3} = 0.95 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{4^3}{(6+3\lambda)^3} = \frac{1}{20} \Rightarrow 6 + 3\lambda = 4\sqrt[3]{20} \Rightarrow 3\lambda = 4\sqrt[3]{20} - 6 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{3}\sqrt[3]{20} - 2 = 2\theta$

Επομένως μόνο η I είναι σωστή κ' η απάντηση είναι το (A).

Άσκηση 10

$N \sim B(n,p)$, $p=\frac{1}{2} \Rightarrow E(N)=np=\frac{n}{2}$, $V(N)=np(1-p)=\frac{n}{4}$

$f(x)=x$, $0\le x\le \sqrt{2} \Rightarrow \mu=E(X)=\int_0^{\sqrt{2}} x^2\,dx=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $E(X^2)=\int_0^{\sqrt{2}} x^3\,dx=1$, $\sigma^2=V(X)=1-\frac{8}{9}=$

$$E(S)=\mu E(N)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{n}{2}=\frac{n\sqrt{2}}{3}$$

$$V(S)=\mu^2 V(N)+\sigma^2 E(N)=\frac{8}{9}\cdot\frac{n}{4}+\frac{1}{9}\cdot\frac{n}{2}=\frac{5n}{18}$$

Αν υποτεθεί προσεγγιστικά (για n μεγάλο) ότι η S ακολουθεί κανονική κατανομή, τότε

$$S\sim \mathcal{N}\left(\frac{n\sqrt{2}}{3},\ \frac{5n}{18}\right)$$

Επομένως $P\big(S>(1+\theta)E(S)\big)=P\left(\frac{S-E(S)}{\sigma(S)}>\frac{(1+\theta)E(S)-E(S)}{\sigma(S)}\right)$

$$=P\left(Z>\frac{\theta E(S)}{\sigma(S)}\right)=1-\Phi\left(\frac{\theta\frac{n\sqrt{2}}{3}}{\frac{\sqrt{5n}}{\sqrt{18}}}\right)=1-\Phi\left(2\theta\sqrt{\frac{n}{5}}\right)=\kappa \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi\left(2\theta\sqrt{\frac{n}{5}}\right)=1-\kappa \Rightarrow 2\theta\sqrt{\frac{n}{5}}=z_{1-\kappa} \Rightarrow \theta=\frac{z_{1-\kappa}}{2}\sqrt{\frac{5}{n}}$$

δηλ. η σωστή απάντηση είναι η (A).

Άσκηση 12

$$F_S(x) = P(S \le x) = P(S \le x \mid N=0)\cdot P(N=0) + P(S \le x \mid N=1)\cdot P(N=1)$$

$$+ P(S \le x \mid N=2)\cdot P(N=2) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(P(S \le x \mid N=0) + P(S \le x \mid N=1) + P(S \le x \mid N=2)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left[1 + P(X \le x) + P(X_1 + X_2 \le x)\right]$$

Όμως $X \sim Exp(1)$, $f_X(x) = e^{-x}$, $F_X(x) = 1 - e^{-x}$

$$X_1 + X_2 \sim Gamma(2,1), \quad f_{X_1+X_2}(x) = xe^{-x}, \quad F_{X_1+X_2}(x) = 1 - e^{-x} - xe^{-x}$$

Επομένως

$$F_S(x) = \frac{1}{3}\left(1 + F_X(x) + F_{X_1+X_2}(x)\right) = \frac{1}{3}\left[1 + 1 - e^{-x} + 1 - e^{-x} - xe^{-x}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[3 - 2e^{-x} - xe^{-x}\right] = 1 - \frac{2}{3}e^{-x} - \frac{1}{3}xe^{-x} = 1 - \frac{1}{3}(x+2)e^{-x}$$

Σωστή Απάντηση: Δ

Άσκηση 13

$$P(N=n) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} = \binom{n+2}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} = \binom{n+2}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} =$$

$$= \binom{n+3-1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \Rightarrow N \sim NB\left(\frac{1}{2}, 3\right), \quad \left(p=\frac{1}{2}, r=3\right)$$

$$\Rightarrow P_N(z) = \left(\frac{p}{1-qz}\right)^{3} = \left(\frac{1/2}{1-z/2}\right)^{3} = \frac{1}{(2-z)^3}$$

$$X \sim Exp(1) \Rightarrow M_X(t) = \frac{1}{1-t}$$

$$M_S(t) = P_N(M_X(t)) = \frac{1}{(2-M_X(t))^3} = \left(\frac{1}{2-\frac{1}{1-t}}\right)^3 = \left(\frac{1-t}{1-2t}\right)^3$$

Σωστή Απάντηση: Ε

Άσκηση 14

$$N \sim Geom(p) \Rightarrow E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, p q^n = \frac{q}{p},$$

$$E(N^2) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 p q^n = \frac{q(1+q)}{p^2}, \quad V(N) = \frac{q(1+q)-q^2}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

$$X \sim U(0,1) \Rightarrow \mu = E(X) = \frac{1}{2}, \quad \sigma^2 = V(X) = \frac{1}{12}$$

Τότε $E(S) = \mu E(N) = \frac{1}{2}\cdot\frac{q}{p} = \frac{q}{2p}$

$$V(S) = \sigma^2 E(N) + \mu^2 V(N) = \frac{1}{12}\frac{q}{p} + \frac{1}{4}\frac{q}{p^2} = \frac{pq+3q}{12p^2} = \frac{(p+3)q}{12p^2}$$

Σωστή Απάντηση: Α.

Άσκηση 15

$S_1 \quad \lambda_1 = 2 \,, \quad p_1(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \,, \quad x = 1, 2, 3, \ldots$

$S_2 \quad \lambda_2 = 1 \,, \quad p_2(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \,, \quad x = 1, 2, 3, \ldots$

$S = S_1 + S_2$

$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 3 \,, \qquad X = \begin{cases} X_1 & , \text{μ.π. } \frac{2}{3} \\ X_2 & \text{μ.π. } \frac{1}{3} \end{cases}$

$P(X = x) = \frac{2}{3} \cdot p_1(x) + \frac{1}{3} p_2(x) = \frac{2}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x\right] \,, \quad x = 1, 2, \ldots$

Επομένως η σωστή απάντηση είναι η Β.

Άσκηση 16 Η μετατοπισμένη κατανομή Γ ορίζεται ως εξής

$X = Y + \delta$, όπου $Y \sim \text{Γάμμα}(\alpha, \lambda)$,

Η κατανομή της Y είναι $f_Y(y) = \dfrac{\lambda^\alpha y^{\alpha-1} e^{-\lambda y}}{\Gamma(\alpha)}$

Επομένως η κατανομή της X:

$F_X(x) = P(X \le x) = P[Y + \delta \le x] = P(Y \le x - \delta) = F_Y(x - \delta)$ για $x \ge \delta$

επομένως $f_X(x) = F_X'(x) = F_Y'(x-\delta) = f_Y(x-\delta)$

$= \dfrac{\lambda^\alpha (x-\delta)^{\alpha-1} e^{-\lambda(x-\delta)}}{\Gamma(\alpha)}$

Για $\alpha \in \mathbb{N}$: $f_X(x) = \dfrac{e^{\lambda\delta} \lambda^\alpha (x-\delta)^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{(\alpha-1)!}$

Στο πρόβλημά μας γνωρίζουμε ότι $\delta = 5$

Από τις απαντήσεις αποκλείονται οι Α, Β, Δ γιατί δεν είναι της παραπάνω μορφής (λείπει όρος $e^{\lambda\delta}$)

Οι (Γ) είναι της μορφής μετατοπισμένης Γάμμα:
Η Γ : $\delta = 5$, $\lambda = 1/2$, $\alpha = 11$

Για την Ε πρέπει $\lambda = 2$, $\alpha = 11$, αλλά σ' αυτή την περίπτωση ο τύπος της σππ θα ήταν:
$\frac{2^{11} e^{10}}{10!} (x-5)^{10} e^{-2x}$. Επομένως ούτε η Ε είναι αυτής της μορφής.

Επομένως η σωστή απάντηση είναι η Γ.

Άσκηση 17 Ερμηνεία Συμβολισμού

n_K = αριθμός συμβολαίων κατηγορίας K, $K = 1, 2$.
g_K = πιθ. οποιοδήποτε συμβόλαιο της κατηγορίας K να έχει ατύχημα
b_K = αποζημίωση (σταθερή κ' γνωστή για το I) κάθε ατυχ. κατηγορίας K
μ_K, σ_K^2 = μέση τιμή κ' διασπορά αποζημίωσης (για το II) " " " K

Επομένως για συμβόλαια κατηγορίας K, ο αριθμός ατυχημάτων N_K ακολουθεί διωνυμική κατανομή $B(n_K, g_K)$
συνεπώς $E(N_K) = n_K g_K$, $V(N_K) = n_K g_K (1 - g_K)$
Επίσης υποθέτουμε ότι όλα τα ατυχήματα και οι αποζημιώσεις είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Χαρτοφυλάκιο (I) $S_I = S_I^{(1)} + S_I^{(2)} \Rightarrow$

$\Rightarrow V(S_I) = V(S_I^{(1)}) + V(S_I^{(2)})$

$$V(S_I^{(1)}) = b_1^2 V(N_1) + 0 \cdot E(N_1)$$ (επειδή η αποζημίωση έχει μηδενική διασπορά)

$$\left.\begin{aligned} &= b_1^2 n_1 g_1(1-g_1) \\ V(S_I^{(2)}) &= b_2^2 n_2 g_2(1-g_2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(S_I) = 275$$

$$V(S_{II}) = V(S_{II}^{(1)}) + V(S_{II}^{(2)}) =$$

$$= \mu_1^2 V(N_1) + \sigma_1^2 E(N_1) + \mu_2^2 V(N_2) + \sigma_2^2 E(N_2)$$

$$= \mu_1^2 n_1 g_1(1-g_1) + \sigma_1^2 n_1 g_1 + \mu_2^2 n_2 g_2(1-g_2) + \sigma_2^2 n_2 g_2 = 575$$

και $\frac{V(S_{II})}{V(S_I)} = \frac{575}{275} = \frac{23}{11}$, κ' η σωστή απάντηση είναι η (Γ).

Άσκηση 18

$$P_N(z) = e^{\lambda(z-1)}$$

$$X = \begin{cases} 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{cases} \Rightarrow P_X(z) = \frac{1}{2} \cdot z^0 + \frac{1}{2} z^1 = \frac{1}{2}(1+z)$$

$$\Rightarrow P_S(z) = P_N(P_X(z)) = e^{\lambda\left(\frac{z+1}{2} - 1\right)} = e^{\frac{\lambda}{2}(z-1)}$$

Δηλαδή η S ακολουθεί κατανομή Poisson $(\lambda/2)$
κ' η συνάρτηση πιθανότητας είναι

$$P_S(n) = P(S=n) = e^{-\lambda/2} \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n}{n!}$$, δηλ. η σωστή απάντηση είναι η (Ε).

Άσκηση 19

$N \sim Poisson(\lambda) \Rightarrow P_N(z) = e^{\lambda(z-1)} = e^{4(z-1)}$

$X \sim Exp(1) \Rightarrow EX = \mu = 1, \quad V(X) = \sigma^2 = 1.$

$\Rightarrow \quad E(S) = \mu E(N) = \lambda \cdot 1 = 4$

$V(S) = \mu^2 V(N) + \sigma^2 E(N) = \lambda + \lambda = 2\lambda = 8$

$\Rightarrow \quad G = E(S) + \theta\sqrt{V(S)} = 4 + \theta\sqrt{8} = 4 + 2\theta\sqrt{2}$

$R = \frac{S}{G} = \frac{S}{4+2\sqrt{2}\theta} \Rightarrow E(R) = \frac{E(S)}{4+2\sqrt{2}\theta} = \frac{4}{4+2\sqrt{2}\theta} = \frac{1}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}\theta} =$

$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\theta}$, δηλ. η σωστή απάντηση είναι η (B)

Άσκηση 20

$N \in \{0,1,2\}$ με $P_N(0) = \frac{1}{2}$, $P_N(1) = \frac{1}{4}$, $P_N(2) = \frac{1}{4}$

$X \in \{1, 2\}$, $p_X(1) = 1/2$, $p_X(2) = 1/2$.

$S \in \{0,1,2,3,4\}$

$p_S(0) = P(S=0) = P(N=0) = \frac{1}{2}$ $\qquad F_S(0) = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$p_S(1) = P(N=1, X_1=1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ $\qquad F_S(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} = 0{,}625$

$p_S(2) = P(N=1, X_1=2) + P(N=2, X_1+X_2=2) =$

$= p_N(1)p_X(2) + p_N(2)p_X(1)p_X(1) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{16} \Rightarrow F_S(2) = \frac{5}{8} + \frac{3}{16} = \frac{13}{16} = 0{,}8125$

Η μόνη επιλογή που έχει $F_S(0) = 0{,}5$, $F_S(1) = 0{,}625$, $F_S(2) = 0{,}8125$ είναι η (Δ)
Επαληθεύστε ότι είναι η σωστή απάντηση υπολογίζοντας τα $p_S(3)$, $p_S(4)$.

Άσκηση 21

Η κατανομή του N είναι αρνητική διωνυμική

Για να προσδιορίσουμε τα r κ' p έχουμε

$$P_N(n) = \binom{n+r-1}{r-1} p^r (1-p)^n \quad , n = 0,1,2\ldots$$

Επειδή εδώ $P_N(n) = 4(n+1)(n+2)\left(\frac{1}{3}\right)^{n+3} = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$= \binom{n+2}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^n$, συμπεραίνουμε ότι $r=3$, $p=\frac{2}{3}$

Επομένως $E(N) = \frac{r(1-p)}{p} = \frac{3\cdot\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$, $Var(N) = \frac{rq}{p^2} = \frac{3\cdot\frac{1}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}$

Επίσης $X \sim U(0,\alpha)$ με $\alpha = 120\cdot 10^3$ επομένως

$E(X) = \frac{\alpha}{2} = 60\cdot 10^3 = \mu$, $\sigma^2 = V(X) = \frac{\alpha^2}{12} = \frac{12^2\, 10^8}{12} = 12\cdot 10^8$

Επομένως $E(S) = E(N)\cdot \mu = \frac{3}{2}\, 60\cdot 10^3 = 9\cdot 10^4$

$V(S) = \mu^2 V(N) + \sigma^2 E(N) = 36\cdot 10^8\, \frac{9}{4} + 12\cdot 10^8\, \frac{3}{2} = 99\cdot 10^8$

Επομένως η σωστή απάντηση είναι η (Γ).