ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
(ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ) 02/09/10

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Θέμα 1. (α) Αν A_i είναι το ενδεχόμενο να μη είναι το φωνήεντο ω_i ανάμεσα στα 5 εκλεγόμενα φωνήεντα, τότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι (a_1)

$$P(A_1'A_2') = 1 - P(A_1) - P(A_2) + P(A_1A_2) = 1 - 2\left(\frac{19}{20}\right)^5 + \left(\frac{18}{20}\right)^5$$

και (a_2)

$$\begin{aligned} P(A_1'A_2'A_3') &= 1 - P(A_1) - P(A_2) - P(A_3) + P(A_1A_2) + P(A_1A_3) + P(A_2A_3) - P(A_1A_2A_3) \\ &= 1 - 3\left(\frac{19}{20}\right)^5 + 3\left(\frac{18}{20}\right)^5 - \left(\frac{17}{20}\right)^5. \end{aligned}$$

(β) Οι διαδοχικές εκλογές γραμμάτων από το αλφάβητο αποτελούν ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας $p = 1/4$ και έτσι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με $\nu = 5$ και $p = 1/4$. Επομένως (β_1)

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) &= 1 - \binom{5}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^5 - \binom{5}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^4 \\ &= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^5 - \left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^4 = 1 - 2\left(\frac{3}{4}\right)^4 \end{aligned}$$

και (β_2)

$$E(X) = \nu p = 5\frac{1}{4} = \frac{5}{4}, \quad V(X) = \nu p(1-p) = 5\frac{1}{4}\frac{3}{4} = \frac{15}{16}.$$

Θέμα 2. (α) Η μέση τιμή υπολογίζεται ως εξής:

$$E(X) = \int_{-1}^{2} \frac{1}{3} x dx = \left[\frac{x^2}{6}\right]_{-1}^{2} = \frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Επίσης

$$E(X^2) = \int_{-1}^{2} \frac{1}{3} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{9}\right]_{-1}^{2} = \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = 1,$$

και έτσι η διασπορά είναι

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

(β) Η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής $Y = |X|$ δίνεται από την

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(-y) + f_X(y), & 0 < y < 1, \\ f_X(y), & 1 \le y < 2, \end{cases}$$

επειδή $f_X(x) = 0$, $-2 < x \le -1$, οπότε $f_X(-y) = 0$, $1 \le y < 2$. Επομένως

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2/3, & 0 < y < 1, \\ 1/3, & 1 \le y < 2. \end{cases}$$

Επίσης η ζητούμενη μέση τιμή, χρησιμοποιώντας το ότι $E(X^2) = 1$, υπολογίζεται ως εξής:

$$E(Y^2) = E(|Y|^2) = E(X^2) = 1$$

ή εναλλακτικά ως εξής:

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \int_0^2 y^2 f_Y(y) dy = \frac{2}{3}\int_0^1 y^2 dy + \frac{1}{3}\int_1^2 y^2 dy = \left[\frac{2y^3}{9}\right]_0^1 + \left[\frac{y^3}{9}\right]_1^2 \\ &= \frac{2}{9} + \frac{8}{9} - \frac{1}{9} = 1. \end{aligned}$$

Θέμα 3. (α) Η τυχαία μεταβλητή X_t, σύμφωνα με τα δεδομένα, ακολουθεί την κατανομή Poisson με συνάρτηση πιθανότητας

$$P(X_t = x) = e^{-\vartheta t}\frac{(\vartheta t)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots, \quad (\vartheta > 0)$$

Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη $P(X_1 \leq 1) = \frac{3}{2} \cdot P(X_1 = 2)$, παίρνουμε διαδοχικά

$$e^{-\vartheta}(1 + \vartheta) = \frac{3}{2}e^{-\vartheta}\frac{\vartheta^2}{2}, \quad 3\vartheta^2 - 4\vartheta - 4 = 0, \quad \vartheta = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{6} = \frac{4 \pm 8}{6},$$

όπου η λύση $\vartheta = -2/3$ απορρίπτεται επειδή πρέπει $\vartheta > 0$. Επομένως $\vartheta = 2$.

(β) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση πιθανότητας της κατανομής Poisson με $\vartheta = 2$ και $t = 1/2$,

$$P(X_{1/2} = x) = e^{-1}\frac{1}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots,$$

παίρνουμε

$$P(X_{1/2} \geq 1) = 1 - P(X_2 = 0) = 1 - e^{-1}.$$

(γ) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση πιθανότητας της κατανομής Poisson με $\vartheta = 2$ και $t = 1$,

$$P(X_1 = x) = e^{-2}\frac{2^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots,$$

η ζητούμενη μέση τιμή υπολογίζεται ως εξής

$$E[X_1(X_1 - 1)] = \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)e^{-2}\frac{2^x}{x!} = 2^2 e^{-2}\sum_{x=2}^{\infty}\frac{2^{x-2}}{(x-2)!} = 4e^{-2}e^2 = 4,$$

ή, εναλλακτικά, χρησιμοποιώντας το ότι $E(X_1) = 2$ και $V(X_1) = 2$,

$$E[X_1(X_1 - 1)] = E[X_1^2] - E(X_1) = V(X_1) + [E(X_1)]^2 - E(X_1) = 2 + 4 - 2 = 4.$$

Θέμα 4. (α) Η περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας της X, επειδή η από κοινού συναρτηση πιθανότητας των X και Y, $f_{X,Y}(x,y)$, για δεδομένο $x = 1,2,\ldots,5$, δεν μηδενίζεται για $y = x, x+1, \ldots, 5$ και έτσι

$$f_X(x) = \sum_{y=x}^{5} \frac{1}{15} = \frac{6-x}{15}, \quad x = 1,2,\ldots,5.$$

Η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Y δεδομένης της $X = x$ είναι

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{6-x}, \quad y = x, x+1, \ldots, 5, \quad (x = 1,2,\ldots,5).$$

(β) Η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της Y, επειδή η από κοινού συναρτηση πυκνότητας των X και Y, $f_{X,Y}(x,y)$, για δεδομένο $0 < y < 1$, δεν μηδενίζεται για $0 < x < 1-y$ και έτσι

$$f_Y(y) = 2\int_0^{1-y} dx = 2(1-y), \quad 0 < y < 1.$$

Η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής X δεδομένης της $Y = y$ είναι

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{1-y}, \quad 0 < x < 1-y, \quad (0 < y < 1).$$

(β) Η $E(XY)$ υπολογίζεται ως εξής:

$$E(XY) = 2\int_0^1 y\left\{\int_0^y x dx\right\} dy = 2\int_0^1 y\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^y dy = \int_0^1 y^3 dy = \left[\frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$