Θέμα 1. Έστω ότι το ποσοστό των ατόμων μιας ορισμένης περιοχής που πάσχουν από μία σοβαρή ασθένεια είναι 0,01. Ένα άτομο, το οποίο εκλέγεται τυχαία από την περιοχή αυτή, υποβάλλεται σ' ένα διαγνωστικό τεστ, το οποίο κάνει ορθή διάγνωση με πιθανότητα 0,90. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες

(α) το τεστ να είναι θετικό (**5 μ.**)

(β) να πάσχει το άτομο δεδομένου ότι το τεστ είναι θετικό. (**5 μ.**)

Έστω ότι μετά το πρώτο τεστ αποφασίζεται το άτομο να υποβληθεί σ' ένα δεύτερο διαγνωστικό τεστ, ανεξάρτητο από το πρώτο και το οποίο κάνει ορθή διάγνωση με πιθανότητα 0,95. Να υπολογισθεί η πιθανότητα

(γ) να πάσχει το άτομο δεδομένου ότι και τα δύο τεστ είναι θετικά. (**6 μ.**)

Απάντηση: (α) Ας θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα A το άτομο να πάσχει και B το τεστ να είναι θετικό. Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα της ολικής πιθανότητας,

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(A')P(B|A') = \frac{1}{100} \cdot \frac{9}{10} + \frac{99}{100} \cdot \frac{1}{10} = \frac{108}{1000} = 0{,}108.$$

(β) Σύμφωνα με τον τύπο της δεσμευμένης πιθανότητας (ή του Bayes)

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(A')P(B|A')} = \frac{\frac{1}{100} \cdot \frac{9}{10}}{\frac{108}{1000}} = \frac{9}{108} = 0{,}083.$$

(γ) Ας θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα B_1 και B_2 το πρώτο και δεύτερο τεστ να είναι θετικό, αντίστοιχα. Τα ενδεχόμενα αυτά έχουν υποτεθεί ότι είναι ανεξάρτητα, είτε το άτομο πάσχει είτε δεν πάσχει, δηλαδή

$$P(B_1B_2|A) = P(B_1|A)P(B_2|A), \quad P(B_1B_2|A') = P(B_1|A')P(B_2|A').$$

Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο του Bayes,

$$\begin{aligned} P(A|B_1B_2) &= \frac{P(A)P(B_1B_2|A)}{P(A)P(B_1B_2|A) + P(A')P(B_1B_2|A')} \\ &= \frac{P(A)P(B_1|A)P(B_2|A)}{P(A)P(B_1|A)P(B_2|A) + P(A')P(B_1|A')P(B_2|A')} \\ &= \frac{\frac{1}{100} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{95}{100}}{\frac{1}{100} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{95}{100} + \frac{99}{100} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{100}} \\ &= \frac{\frac{855}{100000}}{\frac{855}{100000} + \frac{495}{100000}} = \frac{855}{1350} = 0{,}633. \end{aligned}$$

Θέμα 2. Έστω ότι ο αριθμός X_t των ιών που παρατηρούνται σε συγκεκριμένο υπολογιστικό κέντρο σε διάστημα t εβδομάδων ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέση τιμή $E(X_t) = \partial t$. Αν η πιθανότητα να παρατηρηθεί το πολύ ένας ιός είναι τα $3/2$ της πιθανότητας να παρατηρηθουν δύο ακριβώς ιοί σε μια βδομάδα, να υπολογισθούν:

(α) η παράμετρος ∂, (**5 μ.**)

(β) η πιθανότητα να παρατηρηθούν τουλάχιστο δύο ιοί σε διάστημα δύο εβδομάδων, (**5 μ.**)

(γ) η πιθανότητα να υπάρξουν το πολύ δύο εβδομάδες, με τουλάχιστο ένα ιό στην κάθε μια, σε μια ακολουθία 10 εβδομάδων. (**6 μ.**)

Απάντηση: (α) Η τ.μ. X_t, σύμφωνα με τα δεδομένα, ακολουθεί την κατανομή Poisson με συνάρτηση πιθανότητας

$$P(X_t = x) = e^{-\partial t}\frac{(\partial t)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \dots, \quad (\partial > 0)$$

Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη $P(X_1 \leq 1) = \frac{3}{2} \cdot P(X_1 = 2)$, παίρνουμε διαδοχικά

$$e^{-\partial}(1 + \partial) = \frac{3}{2}e^{-\partial}\frac{\partial^2}{2}, \quad 3\partial^2 - 4\partial - 4 = 0, \quad \partial = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{6} = \frac{4 \pm 8}{6},$$

όπου η λύση $\partial = -2/3$ απορρίπτεται επειδή πρέπει $\partial > 0$. Επομένως $\partial = 2$.

(β) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση πιθανότητας της κατανομής Poisson με $\partial = 2$ και $t = 2$,

$$P(X_2 = x) = e^{-4}\frac{4^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \dots,$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned} P(X_2 \geq 2) &= 1 - P(X_2 \leq 1) = 1 - P(X_2 = 0) - P(X_2 = 1) \\ &= 1 - e^{-4} - 4e^{-4} = 1 - 5e^{-2}. \end{aligned}$$

(γ) Ο αριθμός Y των εβδομάδων με ένα τουλάχιστο ιό, σε μια ακολουθία 10 εβδομάδων, ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $\nu = 10$ και

$$p = P(X_1 \geq 1) = 1 - P(X_1 = 0) = 1 - e^{-2},$$

οπότε

$$P(Y = y) = \binom{10}{y}(1 - e^{-2})^y(e^{-2})^{10-y}, \quad y = 0, 1, \dots, 10$$

και έτσι

$$\begin{aligned} P(Y \leq 2) &= P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) \\ &= \binom{10}{0}(1 - e^{-2})^0(e^{-2})^{10} + \binom{10}{1}(1 - e^{-2})(e^{-2})^9 + \binom{10}{2}(1 - e^{-2})^2(e^{-2})^8 \\ &= e^{-20} + 10(1 - e^{-2})e^{-18} + 45(1 - e^{-2})^2e^{-16}. \end{aligned}$$

Θέμα 3. Έστω (X, Y) μια συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X, Y) με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_{X,Y}(x, y) = 2, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < x + y < 1.$$

Να υπολογισθούν

(α) η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της X και η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας της Y δεδομένης της $X = x$, (**σημειώνοντας απαραίτητα** το πεδίο ορισμού τους), (**6 μ.**)

(β) η συνδιακύμανση $C(X, Y)$ των τ.μ. X και Y. (**6 μ.**)

(γ) ο συντελεστής συσχέτισης $\rho(X, Y)$ των τ.μ. X και Y. (**6 μ.**)

Απάντηση: (α) Η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της X επειδή η από κοινού συναρτηση πυκνότητας των X και Y, $f_{X,Y}(x, y)$, για δεδομένο $0 < x < 1$, δεν μηδενίζεται για $0 < y < 1 - x$ και έτσι

$$f_X(x) = 2\int_0^{1-x} dy = 2(1 - x), \quad 0 < x < 1,$$

Η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής Y δεδομένης της $X = x$ είναι

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} = \frac{1}{1 - x}, \quad 0 < y < 1 - x, \quad (0 < x < 1).$$

(β) Η συνδιακύμανση $C(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ υπολογίζεται ως εξής:

$$E(XY) = 2\int_0^1 y\Big\{\int_0^{1-y} x dx\Big\} dy = 2\int_0^1 y\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^{1-y} dy = \int_0^1 y(1 - y)^2 dy$$

$$= \int_0^1 (y - 2y^2 + y^3) dy = \Big[\frac{y^2}{2} - \frac{2y^3}{3} + \frac{y^4}{4}\Big]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12},$$

$$E(X) = 2\int_0^1 x(1 - x) dx = 2\int_0^1 (x - x^2) dx = \Big[x^2 - \frac{2x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{3},$$

Ομοίως, λόγω συμμετρίας, $E(Y) = 1/3$ και έτσι

$$C(X, Y) = \frac{1}{12} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{36}.$$

(γ) Ο συντελεστής συσχέτισης $\rho(X, Y) = \dfrac{C(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$ υπολογίζεται ως εξής:

$$E(X^2) = 2\int_0^1 x^2(1 - x) dx = 2\int_0^1 (x^2 - x^3) dx = \Big[\frac{2x^3}{3} - \frac{2x^4}{4}\Big]_0^1 = \frac{1}{6},$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{6} - \Big(\frac{1}{3}\Big)^2 = \frac{1}{18}.$$

Ομοίως, λόγω συμμετρίας, $V(Y) = 1/18$ και έτσι

$$\rho(X, Y) = \frac{-1/36}{\sqrt{1/18}\sqrt{1/18}} = \frac{-1/36}{1/18} = -\frac{1}{2}.$$