Θέμα 1. Ας θεωρήσουμε το στοχαστικό πείραμα των διαδοχικών ρίψεων ενός ζεύγους διακεκριμένων κύβων.

(α) Έστω X ο αριθμός εμφανίσεων του ενδεχομένου $A = \{(5,6),(6,5),(6,6)\}$ σε 12 ρίψεις. Να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας $f_X(x)$ της τυχαίας μεταβλητής X (**διαπιστώνοντας** ότι ικανοποιούνται οι απαιτούμενες προϋποθέσεις) και να υπολογισθεί η μέση τιμή $E(X)$ (**υπολογίζοντας** το σχετικό άθροισμα). ((3 + 3) μ.)

(β) Έστω Y ο αριθμός των ρίψεων που απαιτούνται μέχρι την πρώτη πραγματοποίηση του ενδεχομένου $A = \{(5,6),(6,5),(6,6)\}$. Να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας $f_Y(y)$ της τυχαίας μεταβλητής Y (**διαπιστώνοντας** ότι ικανοποιούνται οι απαιτούμενες προϋποθέσεις) και να υπολογισθεί η μέση τιμή $E(Y)$ (**υπολογίζοντας** το σχετικό άθροισμα). ((3 + 3) μ.)

Απάντηση: (α) Το στοχαστικό πείραμα μιας ρίψης ενός ζεύγους κύβων αποτελεί δοκιμή Bernoulli με επιτυχία την πραγματοποίηση του ενδεχομένου A. Οι διαδοχικές ρίψεις ενός ζεύγους κύβων αποτελούν μια ακολουθία ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας

$$p = P(\{\varepsilon\}) = P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Επομένως ο αριθμός X των επιτυχιών (εμφανίσεων του ενδ. A) σε $\nu = 12$ δοκιμές Bernoulli (ρίψεις του ζεύγους των κύβων) ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f_X(x) = \binom{12}{x}\left(\frac{1}{12}\right)^x\left(\frac{11}{12}\right)^{12-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, 12$$

και

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=1}^{12} x\binom{12}{x}\left(\frac{1}{12}\right)^x\left(\frac{11}{12}\right)^{12-x} = 12\cdot\frac{1}{12}\sum_{x=1}^{12}\binom{11}{x-1}\left(\frac{1}{12}\right)^{x-1}\left(\frac{11}{12}\right)^{11-(x-1)} \\ &= \sum_{y=0}^{11}\binom{11}{y}\left(\frac{1}{12}\right)^y\left(\frac{11}{12}\right)^{11-y} = \left(\frac{1}{12}+\frac{11}{12}\right)^{11} = 1. \end{aligned}$$

(β) Οι διαδοχικές ρίψεις ενός ζεύγους κύβων αποτελούν μια ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας $p = 1/12$. Επομένως ο αριθμός Y των δοκιμών (ρίψεων) που απαιτούνται μέχρι την πρώτη επιτυχία (πραγματοποίηση του ενδ. A) ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f_Y(y) = \frac{1}{12}\left(\frac{11}{12}\right)^{y-1}, \quad y = 1, 2, \ldots$$

και

$$E(Y) = \sum_{y=1}^{\infty} y\frac{1}{12}\left(\frac{11}{12}\right)^{y-1} = \frac{1}{12}\sum_{y=1}^{\infty} y\left(\frac{11}{12}\right)^{y-1} = \frac{1/12}{(1-11/12)^2} = 12,$$

επειδή παραγωγίζοντας τη γεωμετρική σειρά $\sum_{j=0}^{\infty} t^y = (1-t)^{-1}$, ως προς t, παίρνουμε $\sum_{y=1}^{\infty} yt^{y-1} = (1-t)^{-2}$.

Θέμα 2. (α) Έστω ότι η τ.μ. X ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_X(x) = \frac{1}{5}, \quad -2 < x < 3.$$

Να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας της τ.μ. $Y = |X|$ και να υπολογισθούν η μέση τιμή $E(Y)$ και η διασπορά $V(Y)$. ((3 + 2 + 2) μ.)

(β) Η επίδοση X των μαθητών στις Πανελλήνιες εξετάσεις στα μαθηματικά γενικής παιδείας ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 120$ μόρια και τυπική απόκλιση $\sigma = 20$ μόρια. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες $P(X > 161)$ και $P(79 < X \leq 161)$. ((3 + 3) μ.)

[Δίνονται $\Phi(1{,}96) = 0{,}975$, $\Phi(2{,}05) = 0{,}98$, $\Phi(2{,}33) = 0{,}99$]

Απάντηση: (α) Η συνάρτηση πυκνότητας της $Y = |X|$ δίνεται από την

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(-y) + f_X(y), & 0 < y < 2 \\ f_X(y), & 2 \leq y < 3 \end{cases}$$

επειδή $f_X(x) = 0$, $-3 < x \leq -2$, οπότε $f_X(-y) = 0$, $2 \leq y < 3$. Επομένως

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2/5, & 0 < y < 2 \\ 1/5, & 2 \leq y < 3. \end{cases}$$

Επίσης

$$E(Y) = \int_0^3 y f_Y(y)dy = \frac{1}{5}\int_0^2 ydy + \frac{1}{5}\int_2^3 ydy = \left[\frac{y^2}{5}\right]_0^2 + \left[\frac{y^2}{10}\right]_2^3$$
$$= \frac{4}{5} + \frac{9}{10} - \frac{4}{10} = \frac{13}{10},$$

$$E(Y^2) = \int_0^3 y^2 f_Y(y)dy = \frac{2}{5}\int_0^2 y^2dy + \frac{1}{5}\int_2^3 y^2dy = \left[\frac{2y^3}{15}\right]_0^2 + \left[\frac{y^3}{15}\right]_2^3$$
$$= \frac{16}{15} + \frac{27}{15} - \frac{8}{15} = \frac{35}{15} = \frac{7}{3},$$
$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{7}{3} - \left(\frac{13}{10}\right)^2 = \frac{7}{3} - \frac{169}{100} = \frac{700 - 507}{300} = \frac{193}{300}.$$

(β) Η τυποποιημένη τ.μ. $Z = (X - \mu)/\sigma$ ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική και έτσι

$$P(X > 161) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{161 - 120}{20}\right) = P(Z > 2{,}05)$$
$$= 1 - \Phi(2{,}05) = 1 - 0{,}98 = 0{,}02.$$

$$P(79 < X \leq 161) = P\left(\frac{79 - 120}{20}\right) < \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{161 - 120}{20}\Bigg) = P(-2,05 < Z \leq 2,05)$$
$$= \Phi(2{,}05) - \Phi(-2{,}05) = 2\Phi(2{,}05) - 1 = 2 \cdot (0{,}98) - 1 = 0{,}96.$$