ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ (Συνέχεια)

Χαράλαμπος Α. Χαραλαμπίδης

23 Δεκεμβρίου 2009

5.1. Στο τυχαίο πείραμα της ρίψης δύο διακεκριμένων κύβων έστω X η ένδειξη του πρώτου κύβου και Y η μεγαλύτερη από τις δύο ενδείξεις. Να προσδιορισθούν (α) η συνάρτηση πιθανότητας της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X, Y) και (β) η περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας της Y.

(α) Έστω Z η ένδειξη του δευτέρου κύβου. Αν $x = y = 1, 2, \ldots, 6$, τότε

$$f_{X,Y}(x,x) = P(X = x, Y = x) = P(X = x, Z \leq x) = \frac{x}{36},$$

ενώ αν $x = 1, 2, \ldots, 5$ και $y = x + 1, x + 2, \ldots, 6$, τότε

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= P(X = x, Y = y) = P(X = x, \max\{x, Z\} = y) \\ &= P(X = x, Z = y) = \frac{1}{36}. \end{aligned}$$

Επομένως

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x/36, & x = y = 1, 2, \ldots, 6, \\ 1/36, & x = 1, 2, \ldots, 5, \quad y = x + 1, x + 2, \ldots, 6 \\ 0, & \text{διαφορετικά}, \end{cases}$$

(β) Η περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας της Y είναι η

$$f_Y(y) = \sum_{x=1}^{y} f_{X,Y}(x,y) = \sum_{x=1}^{y-1} f_{X,Y}(x,y) + f_{X,Y}(y,y)$$
$$= \sum_{x=1}^{y-1} \frac{1}{36} + \frac{y}{36} = \frac{2y-1}{36}, \quad y = 1, 2, \ldots, 6.$$

$f_{X,Y}(x,y)$							
$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$f_X(x)$
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
2	0	2/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
3	0	0	3/36	1/36	1/36	1/36	1/6
4	0	0	0	4/36	1/36	1/36	1/6
5	0	0	0	0	5/36	1/36	1/6
6	0	0	0	0	0	6/36	1/6
$f_Y(y)$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36	1

Πίνακας Η από κοινού και οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας

5.2. Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των τυχαίων μεταβλητών X και Y δίνεται από τον τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x-2y} & \text{αν } \ x>0, \quad y>0, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(α) Να βρεθούν οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ και να εξετασθεί κατά πόσον οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες.
(β) Να υπολογισθούν οι πιθανότητες $P(X>2)$, $P(Y<1)$, $P(X>2, Y<1)$, $P(X>2|Y<1)$ και $P(X<Y)$.

(a)

$$f_X(x) = 2e^{-x}\int_0^\infty e^{-2y}dy = e^{-x}\Big[-e^{-2y}\Big]_0^\infty = e^{-x}, \quad x > 0,$$

$$f_Y(y) = 2e^{-2y}\int_0^\infty e^{-x}dx = 2e^{-2y}\Big[-e^{-x}\Big]_0^\infty = 2e^{-2y}, \quad y > 0.$$

Επειδή

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y), \quad x, y \in R,$$

οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες.

(β)

$$P(X > 2) = \int_2^{\infty} e^{-x} dx = \left[- e^{-x} \right]_2^{\infty} = e^{-2},$$

$$P(Y < 1) = \int_0^1 2e^{-2y} dy = \left[- e^{-2y} \right]_0^3 = 1 - e^{-2},$$

$$P(X > 2, Y < 1) = P(X > 2)P(Y < 1) = e^{-2}(1 - e^{-2}),$$

$$P(X > 2 | Y < 1) = P(X > 2) = e^{-2}.$$

$$P(X < Y) = \int_0^{\infty} \int_0^{y} f(x, y) dx dy,$$

$$\int_0^{y} f(x, y) dx = 2e^{-2y} \int_0^{y} e^{-x} dx = 2e^{-2y} \Big[- e^{-x} \Big]_0^{y} = 2e^{-2y}(1 - e^{-y}),$$

$$P(X < Y) = \int_0^{\infty} (2e^{-2y} - 2e^{-3y}) dy = \left[-e^{-2y} + \frac{2}{3} e^{-3y} \right]_0^{\infty} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

5.3. Έστω ότι η διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X, Y) κατανέμεται ομοιόμορφα στο τρίγωνο $0 < x < \vartheta, 0 < y < \vartheta, 0 < x + y < \vartheta$, όπου $\vartheta > 0$ παράμετρος. Δείξτε ότι η συνάρτηση πυκνότητας αυτής δίνεται από την

$$f(x, y) = \frac{2}{\vartheta^2}, \quad 0 < x < \vartheta - y, \quad 0 < y < \vartheta$$

και υπολογίστε τη δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας $f_{X|Y}(x|y)$, $0 < x < \vartheta - y$, της τυχαίας μεταβλητής X δεδομένης της $Y = y$, για $y \in (0, \vartheta)$.

Η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της Y είναι η

$$f_Y(y) = \frac{2}{\vartheta^2}\int_0^{\vartheta - y} dx = \frac{2(\vartheta - y)}{\vartheta^2}, \quad 0 < y < \vartheta.$$

Επομένως, η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής X δεδομένης της $Y = y$ είναι η

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{\vartheta - y}, \quad 0 < x < \vartheta - y, \quad (0 < y < \vartheta).$$

5.4. Έστω (X, Y) μία συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x, y) = x(y - x)e^{-y}, \;\; 0 < x < y < \infty.$$

Να υπολογισθούν (α) οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ και (β) οι δεσμευμένες συναρτήσεις πυκνότητας $f_{X|Y}(x|y)$ και $f_{Y|X}(y|x)$.

(α) Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $t = y - x$, οπότε $y = x + t$ και $dy = dt$, παίρνουμε

$$f_X(x) = x\int_x^{\infty}(y-x)e^{-y}dy = xe^{-x}\int_0^{\infty} te^{-t}dt$$

και επειδή

$$\int_0^{\infty} te^{-t}dt = -\int_0^{\infty} tde^{-t} = \Big[-te^{-t}\Big]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-t}dt = \Big[-e^{-t}\Big]_0^{\infty} = 1,$$

$$f_X(x) = xe^{-x}, \ \ 0 < x < \infty.$$

$$f_Y(y) = e^{-y}\int_0^y x(y-x)dx = ye^{-y}\int_0^y xdx - e^{-y}\int_0^y x^2dx$$
$$= ye^{-y}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^y - e^{-y}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^y = \frac{1}{6}y^3e^{-y}, \ \ 0 < y < \infty.$$

(β)

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{6x(y-x)}{y^3}, \ \ 0 < x < y, \ \ (0 < y < \infty),$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = (y-x)e^{-(y-x)}, \ \ x < y < \infty, \ \ (0 < x < \infty)$$

5.5. Έστω ότι η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής X όταν γνωρίζουμε ότι $Y = y$ είναι διωνυμική με παραμέτρους (y, p), ενώ η Y ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$. Να προσδιορισθεί η συνάρτηση πιθανότητας της X.

ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Ασκήσεις

Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των X και Y δίνεται από την

$$f_{X,Y}(x,y) = f_Y(y) f_{X|Y}(x|y) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^y}{y!}\binom{y}{x}p^x q^{y-x}, \;\; x = 0,1,\ldots,y, \;\; y = 0,1,\ldots$$

και επομένως η περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας της X είναι η

$$f_X(x) = \sum_{y=x}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) = e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^x}{x!}\sum_{y=x}^{\infty}\frac{(\lambda q)^{y-x}}{(y-x)!} = e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^x}{x!}e^{\lambda q}$$

$$f_X(x) = e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^x}{x!}, \quad x = 0,1,\ldots.$$

5.6. Έστω ότι η δεσμευμένη κατανομή της X δεδομένης της $Y = y$ είναι διωνυμική με παραμέτρους (ν, y), ενώ η κατανομή της Y είναι ομοιόμορφη στο διάστημα $(0, 1)$. Δείξτε ότι η κατανομή της X είναι η διακριτή ομοιόμορφη στο σύνολο $\{0, 1, \ldots, \nu\}$.

Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των X και Y δίνεται από την

$$f_{X,Y}(x,y)=f_Y(y)f_{X|Y}(x|y)=\binom{\upsilon}{x}y^x(1-y)^{\upsilon-x},\ \ x=0,1,\ldots,\upsilon,\ \ 0<y<1$$

και επομένως η περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας της X είναι

$$f_X(x)=\binom{\upsilon}{x}\int_0^1 y^x(1-y)^{\upsilon-x}dy.$$

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες συνάγουμε για το ολοκλήρωμα

$$I_{\upsilon,x}=\int_0^1 y^x(1-y)^{\upsilon-x}dy,$$

την αναγωγική σχέση

$$\begin{aligned} I_{\upsilon,x} &= -\frac{1}{\upsilon-x+1}\int_0^1 y^x d(1-y)^{\upsilon-x+1} \\ &= \left[-\frac{1}{\upsilon-x+1}y^x(1-y)^{\upsilon-x+1}\right]_0^1 + \frac{x}{\upsilon-x+1}\int_0^1 y^{x-1}(1-y)^{\upsilon-x+1}dy \\ &= \frac{x}{\upsilon-x+1}I_{\upsilon,x-1}, \quad x = 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

με

$$I_{\upsilon,0} = \int_0^1 (1-y)^{\upsilon}dy = \left[-\frac{1}{\upsilon+1}(1-y)^{\upsilon+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\upsilon+1}$$

Επομένως

$$I_{\upsilon,x} = \int_0^1 y^x(1-y)^{\upsilon-x}dy = \frac{x!(\upsilon-x)!}{(\upsilon+1)!}$$

και

$$f_X(x) = \frac{1}{\upsilon+1}, \quad x = 0, 1, \ldots, \upsilon.$$

5.7. Έστω ότι η συνάρτηση πυκνότητας της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X, Y) δίνεται από την

$$f(x, y) = 1, \quad |x| < y < 1.$$

Δείξτε ότι οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ασυσχέτιστες αλλά όχι ανεξάρτητες.

$$f_X(x) = \int_{|x|}^{1} dy = [y]_{|x|}^{1} = 1 - |x|, \quad -1 < x < 1,$$

$$f_Y(y) = \int_{-y}^{y} dx = [x]_{-y}^{y} = 2y, \quad 0 < y < 1.$$

Επειδή $f(x, y) \neq f_X(x) f_Y(y)$, $x, y \in R$, οι τυχαίες μεταβλητές X και Y δεν είναι ανεξάρτητες.

$$E(XY) = \int_0^1 \left[\int_{-y}^{y} x dx \right] y dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-y}^{y} y dy = 0,$$

$$E(X) = \int_{-1}^{1} x(1 - |x|) dx = 0.$$

Επειδή $C(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$, οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ασυσχέτιστες.

5.8. Έστω X και Y δύο διακριτές τυχαίες μεταβλητές των οποίων η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας δίνεται στον ακόλουθο πίνακα.

$f_{X,Y}(x,y)$			
$x \backslash y$	0	1	2
-1	0	$1/4$	0
0	$1/4$	0	$1/4$
1	0	$1/4$	0

(α) Να υπολογισθούν οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας $f_X(x)$, $f_Y(y)$ και να δειχθεί ότι οι τυχαίες μεταβλητές X και Y δεν είναι ανεξάρτητες. (β) Να δειχθεί ότι $E(XY) = E(X)E(Y)$ παρά το ότι οι τυχαίες μεταβλητές X και Y δεν είναι ανεξάρτητες.

(α) Οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας των X και Y δίνονται στον ακόλουθο πίνακα

$f_{X,Y}(x,y)$				
$x \backslash y$	0	1	2	$f_X(x)$
-1	0	$1/4$	0	$1/4$
0	$1/4$	0	$1/4$	$1/2$
1	0	$1/4$	0	$1/4$
$f_Y(y)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1

Επειδή $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, οι τυχαίες μεταβλητές X και Y δεν είναι ανεξάρτητες.

(β)

$$E(XY) = (-1)(1)\frac{1}{4} + (1)(1)\frac{1}{4} = 0, \quad E(X) = (-1)\frac{1}{4} + (1)\frac{1}{4} = 0$$

Επειδή $C(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$, οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ασυσχέτιστες.

5.9. Από ένα δοχείο που περιέχει 3 άσπρα, 4 μαύρα και 5 κόκκινα σφαιρίδια εξάγουμε χωρίς επανάθεση 3 σφαιρίδια. Έστω X ο αριθμός των εξαγομένων άσπρων και Y ο αριθμός των εξαγομένων μαύρων σφαιριδίων. Να υπολογισθούν

(α) η από κοινού και οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας των X και Y

(β) οι μέσες τιμές $E(X)$, $E(Y)$ και οι διασπορές $V(X)$, $V(Y)$ και

(γ) η συνδιακύμανση $C(X, Y)$ και ο συντελεστής συσχέτισης $\rho(X, Y)$.

(a)

$$f(x,y) = \frac{\binom{3}{x}\binom{4}{y}\binom{5}{3-x-y}}{\binom{12}{3}}, \quad x,y = 0,1,2,3, \quad x+y \le 3,$$

$$f_X(x) = \frac{\binom{3}{x}\binom{9}{3-x}}{\binom{12}{3}}, \quad x = 0,1,2,3,$$

$$f_Y(y) = \frac{\binom{4}{y}\binom{8}{3-y}}{\binom{12}{3}}, \quad y = 0,1,2,3.$$

$f_{X,Y}(x,y)$					
$x \backslash y$	0	1	2	3	$f_X(x)$
0	$10/220$	$40/220$	$30/220$	$4/220$	$84/220$
1	$30/220$	$60/220$	$18/220$	0	$108/220$
2	$15/220$	$12/220$	0	0	$27/220$
3	$1/220$	0	0	0	$1/220$
$f_Y(y)$	$56/220$	$112/220$	$48/220$	$4/220$	1

(β)

$$E(X) = 1 \cdot \frac{108}{220} + 2 \cdot \frac{27}{220} + 3 \cdot \frac{1}{220} = \frac{165}{220} = \frac{3}{4},$$

$$E(X^2) = 1^2 \cdot \frac{108}{220} + 2^2 \cdot \frac{27}{220} + 3^3 \cdot \frac{1}{220} = \frac{225}{220} = \frac{45}{44},$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{45}{44} - \frac{9}{16} = \frac{81}{176}.$$

$$E(Y) = 1 \cdot \frac{112}{220} + 2 \cdot \frac{48}{220} + 3 \cdot \frac{4}{220} = 1,$$

$$E(Y^2) = 1^2 \cdot \frac{112}{220} + 2^2 \cdot \frac{48}{220} + 3^2 \cdot \frac{4}{220} = \frac{340}{220} = \frac{17}{11},$$

$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{17}{11} - 1 = \frac{6}{11}.$$

(γ)

$$E(XY) = 1 \cdot \frac{60}{220} + 2 \cdot \frac{18}{220} + 2 \cdot \frac{12}{220} = \frac{120}{220} = \frac{6}{11},$$

$$C(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{6}{11} - \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{24-33}{44} = -\frac{9}{44},$$

$$\rho(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\,\sqrt{V(Y)}} = \frac{-9/44}{\sqrt{81/176}\,\sqrt{6/11}} = -0{,}408.$$