ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

Χαράλαμπος Α. Χαραλαμπίδης

30 Νοεμβρίου 2009

ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Ας θεωρήσουμε μια συνεχή τυχαία μεταβλητή X ορισμένη στον Ω με πεδίο τιμών το διάστημα $[\alpha, \beta]$, όπου $\alpha < \beta$ πραγματικοί αριθμοί. Η ομοιόμορφη εκχώρηση πιθανότητας εκφράζεται από τη σχέση

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = c\,(x_2 - x_1), \quad \alpha \leq x_1 \leq x_2 \leq \beta, \tag{1}$$

όπου c προσδιοριστέα σταθερά. Θέτοντας $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$ και χρησιμοποιώντας τη σχέση $P(\alpha \leq X \leq \beta) = 1$, συμπεραίνουμε ότι

$$c = \frac{1}{\beta - \alpha}. \tag{2}$$

Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση αυτή, στην οποία η τυχαία μεταβλητή X είναι συνεχής, οπότε $P(X = x) = 0$ για κάθε $x \in R$, η εκχώρηση πιθανότητας δεν γίνεται σε σημεία αλλά σε διαστήματα και είναι ανάλογη του μήκους των. Τούτο είναι ισοδύναμο με το ότι διαστήματα του ιδίου μήκους είναι ισοπίθανα.

Η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X, όπως προκύπτει από τις (1) και (2), δίνεται από την

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < a, \\ \dfrac{x-a}{\beta-a}, & a \le x < \beta, \\ 1, & \beta \le x < \infty. \end{cases} \tag{3}$$

Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής και έτσι παραγωγίζοντάς την συνάγουμε την συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής X:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta-a}, & a \le x \le \beta \\ 0, & x < a \text{ ή } x > \beta. \end{cases} \tag{4}$$

Ορισμός

Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα την (4). Η κατανομή της τ.μ. X συμβολίζεται με $U(\alpha, \beta)$ και καλείται ομοιόμορφη ή ορθογώνια στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Τα σημεία α και β είναι παράμετροι της κατανομής.

Θεώρημα

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει την ομοιόμορφη κατανομή $U(\alpha, \beta)$. Τότε η μέση τιμή και η διασπορά αυτής δίνονται από τις

$$\mu = E(X) = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \sigma^2 = V(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}. \tag{5}$$

Απόδειξη.

Η μέση τιμή της τ.μ. X, σύμφωνα με τον ορισμό, είναι

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\beta - a} \int_a^\beta x dx = \left[\frac{x^2}{2(\beta - a)} \right]_a^\beta = \frac{\beta^2 - a^2}{2(\beta - a)}$$

και επειδή $(\beta^2 - a^2) = (\beta - a)(\beta + a)$,

$$\mu = E(X) = \frac{a + \beta}{2}.$$

$\square$

Επίσης είναι

$$E(X^2) = \frac{1}{\beta - a}\int_a^\beta x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3(\beta - a)}\right]_a^\beta = \frac{\beta^3 - a^3}{3(\beta - a)}$$

και επειδή $\beta^3 - a^3 = (\beta - a)(\beta^2 + a\beta + a^2)$,

$$E(X^2) = \frac{a^2 + a\beta + \beta^2}{3}.$$

Η διασπορά της τ.μ. X είναι τότε

$$\begin{aligned} \sigma^2 = V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 &= \frac{a^2 + a\beta + \beta^2}{3} - \frac{a^2 + 2a\beta + \beta^2}{4} \\ &= \frac{a^2 - 2a\beta + \beta^2}{12} = \frac{(\beta - a)^2}{12}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα

Έστω ότι ο συρμός φθάνει σε συγκεκριμένο σταθμό του μετρό κάθε 10 λεπτά, αρχίζοντας τα δρομολόγιά του στις 5 π.μ. Αν ένας επιβάτης φθάνει στο σταθμό σε χρόνο ο οποίος κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα 7:20 ως 7:40, να υπολογισθούν οι πιθανότητες να περιμένει το συρμό (α) το πολύ 4 λεπτά και (β) τουλάχιστον 7 λεπτά.

Έστω X ο χρόνος άφιξης του επιβάτη στο σταθμό, μετρούμενος σε λεπτά με αρχή τη χρονική στιγμή 7:20. Τότε η τ.μ. X έχει την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, 20]$ και έτσι

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{x}{20}, & 0 \leq x < 20 \\ 1, & x \geq 20. \end{cases}$$

(α) Το ενδεχόμενο A ο επιβάτης να περιμένει το πολύ 4 λεπτά είναι ισοδύναμο με το ενδεχόμενο να φθάσει στο σταθμό στο διάστημα 7:26 ως 7:30 ή στο διάστημα 7:36 ως 7:40. Επομένως

$$P(A)=P(6 < X \leq 10)+P(16 < X \leq 20)=\{F(10)-F(6)\}+\{F(20)-F(16)\}=\frac{2}{5}.$$

(β) Το ενδεχόμενο B ο επιβάτης να περιμένει τουλάχιστο 7 λεπτά είναι ισοδύναμο με το ενδεχόμενο να φθάσει στο σταθμό στο διάστημα 7:20 ως 7:23 ή 7:30 ως 7:33. Επομένως

$$P(B)=P(0 < X \leq 3)+P(10 < X \leq 13)=\{F(3)-F(0)\}+\{F(13)-F(10)\}=\frac{3}{10}.$$

Ορισμός

Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} \vartheta e^{-\vartheta x}, & 0 \leq x < \infty \\ 0, & -\infty < x < 0, \end{cases} \tag{6}$$

όπου $0 < \vartheta < \infty$. Η κατανομή της τ.μ. X καλείται εκθετική με παράμ. ϑ.

Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση (6) είναι μη αρνητική και

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{\infty} \vartheta e^{-\vartheta x} dx = \Big[- e^{-\vartheta x} \Big]_0^{\infty} = 1,$$

όπως απαιτείται από τον ορισμό της συνάρτησης πυκνότητας.
Η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X είναι η

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ 1 - e^{-\vartheta x}, & 0 \leq x < \infty. \end{cases} \tag{7}$$

Θεώρημα

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει την εκθετική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας την (6). Τότε η μέση τιμή και η διασπορά αυτής δίνονται από τις

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\partial}, \quad \sigma^2 = V(X) = \frac{1}{\partial^2}. \tag{8}$$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Απόδειξη.

Η μέση τιμή της τ.μ. X, σύμφωνα με τον ορισμό, δίνεται από την

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{0}^{\infty} \partial x e^{-\partial x} dx = \frac{1}{\partial} \int_{0}^{\infty} y e^{-y} dy,$$

όπου χρησιμοποιήθηκε ο μετασχηματισμός $y = \partial x$. Εφαρμόζοντας την ολοκλήρωση κατά παράγοντες, το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι

$$\int_{0}^{\infty} y e^{-y} dy = -\int_{0}^{\infty} y de^{-y} = -\left[y e^{-y} \right]_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} e^{-y} dy = -\left[e^{-y} \right]_{0}^{\infty} = 1$$

και έτσι

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\partial}.$$

$\square$

Ομοίως

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{\infty} y^2 e^{-y} dy$$

και επειδή

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} y^2 e^{-y} dy = -\int_0^{\infty} y^2 de^{-y} &= -\left[y^2 e^{-y}\right]_0^{\infty} + 2\int_0^{\infty} ye^{-y} dy \\ &= -\left[y^2 e^{-y} + 2ye^{-y} + 2e^{-y}\right]_0^{\infty} = 2 \end{aligned}$$

έχουμε

$$E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Επομένως

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Θεώρημα

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει την εκθετική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας την (6). Τότε

$$P(X > x + y | X > x) = P(X > y), \quad x \geq 0, \quad y \geq 0. \tag{9}$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} P(X > x + y | X > x) &= \frac{P(X > x + y, X > x)}{P(X > x)} = \frac{P(X > x + y)}{P(X > x)} \\ &= \frac{1 - F(x + y)}{1 - F(x)} = \frac{e^{-\partial(x+y)}}{e^{-\partial x}} = e^{-\partial y} \end{aligned}$$

και επειδή $P(X > y) = 1 - F(y) = e^{-\partial y}$ έπεται η (9). □

Παρατήρηση

Ας θεωρήσουμε μια ανέλιξη Poisson X_t, $t \geq 0$, με μέση τιμή $E(X_t) = \partial t$ και ας παραστήσουμε με T το χρόνο αναμονής μέχρι την πραγματοποίηση της πρώτης επιτυχίας (εμφάνισης του ενδεχομένου A). Επειδή το ενδεχόμενο $\{T > t\}$, είναι ισοδύναμο με το ενδεχόμενο $\{X_t = 0\}$, συνάγουμε τη σχέση

$$P(T > t) = P(X_t = 0) = e^{-\partial t}, \quad t \geq 0$$

και από αυτή τη συνάρτηση κατανομής της τ.μ. T,

$$F(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < 0 \\ 1 - e^{-\partial t}, & 0 \leq t < \infty. \end{cases} \tag{10}$$

Παράδειγμα

Έστω ότι η διάρκεια σε λεπτά ενός τηλεφωνήματος, σ' ένα δημόσιο τηλεφωνικό θάλαμο, ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 10 λεπτά.
Επίσης, έστω ότι τη στιγμή που κάποιος μπαίνει στον τηλεφωνικό αυτό θάλαμο για ένα τηλεφώνημα ένας άλλος φθάνει εκεί και δεν συναντά κανένα να περιμένει.
Να υπολογισθούν οι πιθανότητες ο δεύτερος να περιμένει (α) περισσότερο από 10 λεπτά (β) μεταξύ 10 και 20 λεπτών.

Αν X είναι η διάρκεια του τηλεφωνήματος του πρώτου ατόμου, τότε

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-x/10}, & x \geq 0, \end{cases}$$

και οι ζητούμενες πιθανότητες είναι (α)

$$P(X > 10) = 1 - F(10) = e^{-1} = 0{,}3679,$$

και (β)

$$P(10 < X \leq 20) = F(20) - F(10) = e^{-1} - e^{-2} = 0{,}3679 - 0{,}1353 = 0{,}2326.$$

Ορισμός

Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\vartheta^{\upsilon}}{(\upsilon-1)!} x^{\upsilon-1} e^{-\vartheta x}, & 0 \leq x < \infty \\ 0, & -\infty < x < 0, \end{cases} \tag{11}$$

όπου υ θετικός ακέραιος και $0 < \vartheta < \infty$. Η κατανομή της τ.μ. X καλείται κατανομή Erlang με παραμέτρους υ και ϑ.

Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση (11) είναι μη αρνητική και επειδή

$$I_\upsilon = \int_0^\infty x^{\upsilon-1} e^{-x} dx = (\upsilon - 1)!, \quad \upsilon = 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{\vartheta^\upsilon}{(\upsilon-1)!} \int_0^\infty x^{\upsilon-1} e^{-\vartheta x} dx = \frac{1}{(\upsilon-1)!} \int_0^\infty y^{\upsilon-1} e^{-y} dy = 1,$$

όπως απαιτείται από τον ορισμό της συνάρτησης πυκνότητας.

Το ολοκλήρωμα I_υ, $\upsilon = 1, 2, \ldots$, δύναται να υπολογισθεί εφαρμόζοντας την ολοκλήρωση κατά παράγοντες ως εξής:

$$I_{\upsilon+1} = \int_0^\infty x^\upsilon e^{-x} dx = -\int_0^\infty x^\upsilon de^{-x} = -\left[x^\upsilon e^{-x}\right]_0^\infty + \upsilon \int_0^\infty x^{\upsilon-1} e^{-x} dx$$

και έτσι

$$I_{\upsilon+1} = \upsilon I_\upsilon, \quad \upsilon = 1, 2, \ldots . \tag{13}$$

Εφαρμόζοντας διαδοχικά την αναγωγική αυτή σχέση και επειδή

$$I_1 = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1,$$

συνάγουμε την (12).

Θεώρημα

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει την κατανομή Erlang με συνάρτηση πυκνότητας την (11). Τότε η μέση τιμή και η διασπορά αυτής δίνονται από τις

$$\mu = E(X) = \frac{\upsilon}{\vartheta}, \quad \sigma^2 = V(X) = \frac{\upsilon}{\vartheta^2}. \tag{14}$$

Απόδειξη.

Η μέση τιμή της τ.μ. X δίνεται από την

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{\vartheta^{\upsilon}}{(\upsilon-1)!}\int_0^{\infty} x^{\upsilon}e^{-\vartheta x}dfx = \frac{1}{\vartheta(\upsilon-1)!}\int_0^{\infty} y^{\upsilon}e^{-y}dy$$

και χρησιμοποιώντας την (12), συνάγουμε την

$$\mu = E(X) = \frac{\upsilon!}{\vartheta(\upsilon-1)!} = \frac{\upsilon}{\vartheta}.$$

Ομοίως

$$
\begin{aligned}
E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx &= \frac{\vartheta^{\upsilon}}{(\upsilon-1)!}\int_0^{\infty} x^{\upsilon+1}e^{-\vartheta x}dx \\
&= \frac{1}{\vartheta^2(\upsilon-1)!}\int_0^{\infty} y^{\upsilon+1}e^{-y}dy
\end{aligned}
$$

και

$$E(X^2) = \frac{(\upsilon+1)!}{\vartheta^2(\upsilon-1)!} = \frac{(\upsilon+1)\upsilon}{\vartheta^2}.$$

Επομένως η διασπορά της τ.μ. X είναι

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{(\upsilon+1)\upsilon}{\vartheta^2} - \frac{\upsilon^2}{\vartheta^2} = \frac{\upsilon}{\vartheta^2}.$$

Παρατήρηση

Ας θεωρήσουμε μια ανέλιξη Poisson X_t, $t \geq 0$, με μέση τιμή $E(X_t) = \vartheta t$ και ας παραστήσουμε με T_υ το χρόνο αναμονής μέχρι την πραγματοποίηση της υ-οστής επιτυχίας (εμφάνισης του ενδεχ. A). Επειδή το ενδεχόμενο $\{T_\upsilon > t\}$, είναι ισοδύναμο με το ενδεχόμενο $\{X_t < \upsilon\}$, συνάγουμε τη σχέση

$$P(T_\upsilon > t) = P(X_t < \upsilon) = \sum_{\kappa=0}^{\upsilon-1} P(X_t = \kappa) = \sum_{\kappa=0}^{\upsilon-1} e^{-\vartheta t} \frac{(\vartheta t)^\kappa}{\kappa!}, \quad t \geq 0.$$

Η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. T_υ δίνεται τότε από την

$$F(t) = 1 - e^{-\vartheta t} \sum_{\kappa=0}^{\upsilon-1} \frac{(\vartheta t)^\kappa}{\kappa!}, \quad t \geq 0, \tag{15}$$

με $F(t) = 0$, $t < 0$.

Παραγωγίζοντας αυτήν ως προς t, παίρνουμε

$$f(t) = \frac{d}{dt}F(t) = \vartheta e^{-\vartheta t} \sum_{\kappa=0}^{\nu-1} \frac{(\vartheta t)^{\kappa}}{\kappa!} - e^{-\vartheta t} \sum_{\kappa=0}^{\nu-1} \frac{\vartheta(\vartheta t)^{\kappa-1}}{(\kappa-1)!}$$

και επομένως η πυκνότητα της τ.μ. T_ν είναι η

$$f(t) = \frac{\vartheta^{\nu}}{(\nu-1)!} t^{\nu-1} e^{-\vartheta t}, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Η κατανομή αυτή μελετήθηκε από το Δανό μαθηματικό Α.Κ. Erlang (1878-1929).

Παράδειγμα

Έστω ότι ο αριθμός των τραυματιών σε αυτοκινητιστικά δυστυχήματα με σοβαρά κατάγματα που εισάγονται σε νοσοκομεία των Αθηνών ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέση τιμή 8 άτομα ανά ημέρα.
Να υπολογισθούν
(α) η πιθανότητα όπως ο χρόνος αναμονής μέχρι την άφιξη του τρίτου τραυματία, μετρούμενος από την αρχή της ημέρας, είναι τουλάχιστο 12 ώρες και
(β) ο μέσος χρόνος αναμονής μέχρι την άφιξη του τρίτου τραυματία.

(α) Ο αριθμός X_t των τραυματιών σε χρονικό διάστημα t ωρών ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέση τιμή $E(X_t) = \vartheta t$, όπου $\vartheta = 8/24 = 1/3$.
Ο χρόνος αναμονής T_3 ακολουθεί την κατανομή Erlang με συνάρτηση κατανομής

$$F(t) = 1 - e^{-t/3} \sum_{\kappa=0}^{2} \frac{(t/3)^{\kappa}}{\kappa!}.$$

Επομένως

$$P(T_3 > 12) = 1 - F(12) = 1 - e^{-4} \sum_{\kappa=0}^{2} \frac{4^{\kappa}}{\kappa!}$$

και έτσι

$$P(T_3 > 12) = 1 - (0{,}0183 + 0{,}0733 + 0{,}1465) = 0{,}7619.$$

(β) Η μέση τιμή της T_3, σύμφωνα με την πρώτη από τις (14), είναι

$$E(T_3) = \frac{3}{\vartheta} = 9.$$