ΒΑΣΙΚΕΣ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ (Συνέχεια)

Χαράλαμπος Α. Χαραλαμπίδης

25 Νοεμβρίου 2009

Ορισμός

Έστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

όπου $0 < \lambda < \infty$. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X καλείται κατανομή Poisson με παράμετρο λ.

Σημειώνουμε ότι

$$f(x) > 0, \quad x = 0, 1, \dots, \quad f(x) = 0, \quad x \notin \{0, 1, \dots, \}$$

και χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της εκθετικής συνάρτησης e^z σε δυναμοσειρά,

$$e^z = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{z^x}{x!}, \tag{2}$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1,$$

όπως απαιτείται από τον ορισμό της συνάρτησης πιθανότητας.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

Κατανομή Poisson

Η κατανομή Poisson μελετήθηκε από το Γάλλο μαθηματικό Simeon Denia Poisson (1781-1840) ως προσεγγιστική κατανομή της διωνυμικής κατανομής. Σχετικά ο Poisson απέδειξε το 1837 το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους υ και p.
Αν, για $\upsilon \to \infty$, το $p \to 0$ έτσι ώστε $\upsilon p = \lambda$ (ή γενικότερα $\lim_{\upsilon\to\infty} \upsilon p = \lambda$), όπου $\lambda > 0$ σταθερά, τότε

$$\lim_{\upsilon\to\infty} \binom{\upsilon}{x} p^x (1-p)^{\upsilon - x} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots . \tag{3}$$

Απόδειξη.

Η συνάρτηση πιθανότητας της διωνυμικής κατανομής, σύμφωνα με την υπόθεση $p = \lambda/\upsilon$, $\upsilon = 1, 2, \ldots,$ δύναται να γραφεί ως εξής:

$$\binom{\upsilon}{x} p^x (1-p)^{\upsilon - x} = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot \frac{(\upsilon)_x}{\upsilon^x} \left(1 - \frac{\lambda}{\upsilon}\right)^{\upsilon} \Big/ \left(1 - \frac{\lambda}{\upsilon}\right)^{x}.$$

Χρησιμοποιώντας τις οριακές σχέσεις

$$\lim_{\upsilon \to \infty} \frac{(\upsilon)_x}{\upsilon^x} = \lim_{\upsilon \to \infty} \cdot \left(1 - \frac{1}{\upsilon}\right) \cdots \left(1 - \frac{x-1}{\upsilon}\right) = 1,$$

$$\lim_{\upsilon \to \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\upsilon}\right)^{\upsilon} = e^{-\lambda}, \quad \lim_{\upsilon \to \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\upsilon}\right)^{x} = 1,$$

συνάγουμε την (3). □

Παρατήρηση

Η προσέγγιση (3) είναι ικανοποιητική για $\upsilon \geq 20$ και $p \leq 10/\upsilon$.
Επειδή η πιθανότητα p εμφάνισης ενός ενδεχομένου (επιτυχίας) υποτίθεται μικρή (θεωρητικά $p \to 0$ για $\upsilon \to \infty$), η κατανομή Poisson θεωρείται ως **κατανομή των σπάνιων ενδεχομένων**.
Επίσης αναφέρεται και ως **νόμος των μικρών αριθμών**.

Θεώρημα

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει την κατανομή Poisson με συνάρτηση πιθανότητας την (1). Τότε η μέση τιμή και η διασπορά αυτής δίνονται από τις

$$\mu = E(X) = \lambda, \quad \sigma^2 = V(X) = \lambda. \tag{4}$$

Απόδειξη.

Η μέση τιμή της τ.μ. X, σύμφωνα με τον ορισμό, δίνεται από την

$$\mu = E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!},$$

οπότε, χρησιμοποιώντας την (2), συνάγουμε την πρώτη από τις (4). □

Η δεύτερης τάξης παραγοντική ροπή της τ.μ. X δίνεται από την

$$\mu_{(2)} = E[(X)_2] = E[X(X-1)] = \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{x=2}^{\infty}\frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!},$$

οπότε, χρησιμοποιώντας την (2), συμπεραίνουμε ότι

$$\mu_{(2)} = E[(X)_2] = \lambda^2.$$

Επομένως

$$\sigma^2 = V(X) = E[(X)_2] + E(X) - [E(X)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι η παραγωγή ενός βιομηχανικού προϊόντος γίνεται κάτω από στατιστικό έλεγχο ποιότητας έτσι ώστε να πληρούνται οι υποθέσεις του στοχαστικού προτύπου (μοντέλου) των ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli. Μια μονάδα του προϊόντος αυτού θεωρείται ελαπωματική αν δεν πληροί όλες τις καθορισμένες προδιαγραφές και η πιθανότητα γι΄ αυτό έστω ότι είναι $p = 0{,}01$.
Να υπολογισθεί η πιθανότητα όπως σε ένα κιβώτιο 100 μονάδων του προϊόντος αυτού υπάρχει μια το πολύ ελαπωματική.

Έστω X ο αριθμός των ελαπωματικών μονάδων του προϊόντος στο κιβώτιο των 100 μονάδων. Η τυχαία αυτή μεταβλητή έχει τη διωνυμική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας

$$P(X = x) = \binom{100}{x}(0{,}01)^x(0{,}99)^{100-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, 100.$$

Επειδή το $\nu = 100$ είναι μεγάλο και το $p = 0{,}01$ μικρό έτσι ώστε $\lambda = \nu p = 1$ είναι μικρότερο του 10, η προσέγγιση αυτής από την Poisson με

$$P(X = x) = e^{-1}/x!, \quad x = 0, 1, \ldots,$$

είναι ικανοποιητική. Συνεπώς

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) \cong 2e^{-1} = 2 \cdot 0{,}3679 = 0{,}7358.$$

Σημειώνουμε ότι χρησιμοποιώντας τη διωνυμική συνάρτηση πιθανότητας, παίρνουμε

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}3660 + 0{,}3697 = 0{,}7357.$$

Στοχαστική ανέλιξη (διαδικασία) Poisson.
Στο στοχαστικό πρότυπο (μοντέλο) μιας ακολουθίας ανεξαρτήτων και ισονόμων δοκιμών Bernoulli, το ενδεχόμενο επιτυχίας $A = \{\varepsilon\}$ δύναται να πραγματοποιείται σε διακεκριμένα σημεία (δοκιμές) της εξέλιξής του.
Η δυνατότητα ενός ενδεχομένου A να πραγματοποιείται σε συνεχή σημεία (χρονικά ή χωρικά) της εξέλιξης ενός στοχαστικού προτύπου, παρουσιάζει ιδιαίτερο θεωρητικό ενδιαφέρον και ποικιλία εφαρμογών.
Σχετικά, ας θεωρήσουμε ένα στοχαστικό πρότυπο εξελισσόμενο σε χρονικό ή χωρικό διάστημα, στο οποίο ένα ενδεχόμενο A δύναται να πραγματοποιείται σε συνεχή χρονικά ή χωρικά σημεία.

Ας υποθέσουμε ότι οι αριθμοί πραγματοποίησης του ενδεχομένου A σε ξένα χρονικά ή χωρικά διαστήματα είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και οι πιθανότητές τους εξαρτώνται μόνο από το μήκος των αντιστοίχων διαστημάτων.

Το στοχαστικό αυτό πρότυπο αναφέρεται ως *στοχαστική ανέλιξη (διαδικασία) με ανεξάρτητες και ομογενείς προσαυξήσεις*.

Επιπλέον υποθέτουμε ότι σε μικρά (απειροστά) χρονικά ή χωρικά διαστήματα πραγματοποιείται είτε το ενδεχόμενο A με πιθανότητα, κατά προσέγγιση, ανάλογη του μήκους του διαστήματος είτε το συμπληρωματικό ενδεχόμενο A' με την συμπληρωματική πιθανότητα.

Έστω X_t, ο αριθμός πραγματοποιήσεων του ενδεχομένου A στο διάστημα $(0, t]$.

Η X_t, $t \geq 0$, καλείται *στοχαστική ανέλιξη (διαδικασία) Poisson* και η κατανομή της καλείται *κατανομή Poisson*.

Η συνάρτησης πιθανότητας της X_t δύναται να βρεθεί ως εξής:
Ας θεωρήσουμε μια διαμέριση του διαστήματος $(0, t]$ σ' ένα μεγάλο αριθμό υ υποδιαστημάτων μήκους $\delta t = t/\upsilon$.
Σε κάθε τέτοιο διάστημα θα έχουμε σύμφωνα με τις συνθήκες του πειράματος είτε μια πραγματοποίηση του A (επιτυχία) με πιθανότητα $p_\upsilon \cong \partial \delta t = \partial t/\upsilon, \partial > 0$, είτε καμμιά πραγματοποίηση του A (αποτυχία) με πιθανότητα $q_\upsilon = 1 - p_\upsilon$.
Η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού X_t εμφανίσεων του A στα υ υποδιαστήματα (ανεξάρτητες δοκιμές) είναι η

$$P(X_t = x) \cong \binom{\upsilon}{x} p_\upsilon^x q_\upsilon^{\upsilon - x}, \quad x = 0, 1, \ldots, \quad p_\upsilon \cong \frac{\partial t}{\upsilon}.$$

Επειδή για $\delta t \to 0$, το $\upsilon \to \infty$ και $\lim_{\upsilon \to \infty}$, η διωνυμική αυτή συνάρτηση πιθανότητας στο όριο γίνεται

$$P(X_t = x) = e^{-\partial t} \frac{(\partial t)^x}{x!} \quad x = 0, 1, \ldots, \quad (\partial > 0, \ t > 0). \tag{5}$$

Χαρακτηριστικά παραδείγματα στοχαστικών φαινομένων που ικανοποιούν τις συνθήκες του πιθανοθεωρητικού μοντέλου της κατανομής Poisson.

(α) Εκπομπή σωμάτια α από ραδιενεργό πηγή.

(β) Λανθασμένες τηλεφωνικές συνδέσεις.

(γ) Τροχαίων ατυχημάτων σε μια πόλη ή σε κάποιο τμήμα του οδικού δικτύου.

(δ) Ο αριθμός των επιβατών μιας αεροπορικής πτήσης που δεν εμφανίζονται την ώρα της αναχώρησης, ενώ έχουν κρατήσει θέσεις.

(ε) Ο αριθμός των βακτηριδίων σε επιφάνεια t τετραγωνιδίων μιας πλάκας Petri.

Παράδειγμα

Σε μια συγκεκριμένη αεροπορική πτήση που εξυπηρετείται από αεροπλάνο 80 θέσεων έχει παρατηρηθεί ότι 4 επιβάτες κατά μέσο όρο δεν εμφανίζονται κατά την αναχώρηση.
Ποιά είναι η πιθανότητα άτομο που βρίσκεται
(α) στη δεύτερη θέση και
(β) στην πέμπτη θέση του καταλόγου αναμονής να ταξιδεύσει ;

Ο αριθμός X των επιβατών που δεν εμφανίζονται κατά την αναχώρηση ακολουθεί την κατανομή Poisson με συνάρτηση πιθανότητας

$$P(X = x) = e^{-4}\frac{4^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots .$$

Επομένως, έχουμε για την περίπτωση (α)

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0{,}0183 - 0{,}0733 = 0{,}9084,$$

που σημαίνει ότι είναι σχεδόν βέβαιο ότι το άτομο θα ταξιδέψει.
Για την περίπτωση (β) παίρνουμε

$$\begin{aligned} P(X \geq 5) &= 1 - \sum_{x=0}^{4} P(X = x) = 1 - \sum_{x=0}^{4} e^{-4} \frac{4^x}{x!} \\ &= 1 - 0{,}0183 - 0{,}0733 - 0{,}1465 - 0{,}1954 - 0{,}1954 = 0{,}3711, \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι υπάρχει αρκετά μεγάλη πιθανότητα το άτομο να ταξιδέψει.

Παράδειγμα

Έχει παρατηρηθεί ότι 3 άτομα το μήνα κατά μέσο όρο πεθαίνουν στην Αθήνα από μια σπάνια ασθένεια. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες:
(α) να υπάρξουν το πολύ 2 θάνατοι από την ασθένεια αυτή σε ένα μήνα,
(β) να υπάρξουν το πολύ 4 θάνατοι από την ασθένεια αυτή σε χρονικό διάστημα 2 μηνών,
(γ) να υπάρξουν 2 τουλάχιστο μήνες με 2 το πολύ θανάτους στο επόμενο τρίμηνο.

Ο αριθμός X_t των θανάτων από την ασθένεια αυτή σε διάστημα t μηνών ακολουθεί την κατανομή Poisson με

$$P(X_t = x) = e^{-3t}\frac{(3t)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots, .$$

Επομένως, για το (α) έχουμε

$$P(X_1 \leq 2) = \sum_{x=0}^{2} e^{-3}\frac{3^x}{x!} = 0{,}0498 + 0{,}1494 + 0{,}2240 = 0{,}4232$$

και (β)

$$P(X_2 \leq 4) = \sum_{x=0}^{4} e^{-6}\frac{6^x}{x!}$$
$$= 0{,}0025 + 0{,}0149 + 0{,}0446 + 0{,}0892 + 0{,}1339 = 0{,}2851.$$

Ο αριθμός Y των μηνών με 2 το πολύ θανάτους ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με $\upsilon = 3$ και $p = 0{,}4232$, οπότε

$$P(Y = y) = \binom{3}{y}(0{,}4232)^y(0{,}5768)^{3-y}, \quad y = 0, 1, 2, 3$$

και έτσι (γ)

$$P(Y \geq 2) = \binom{3}{2}(0{,}4232)^2(0{,}5768) + \binom{3}{3}(0{,}4232)^3 = 0{,}3857.$$

3.1. *Έστω ότι δύο διακεκριμένοι κύβοι ρίχνονται 12 φορές. Να προσδιορισθεί η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού X των ρίψεων στις οποίες ο αριθμός του πρώτου κύβου υπερβαίνει τον αριθμό του δευτέρου κύβου.*

Χαρακτηρίζοντας ως επιτυχία το ενδεχόμενο A ο αριθμός του πρώτου κύβου να υπερβαίνει τον αριθμό του δευτέρου κύβου, η ρίψη των κύβων αποτελεί δοκιμή Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας

$$p = P(A) = \frac{15}{36}, \quad q = P(A') = \frac{21}{36}.$$

Επομένως

$$f(x) = P(X = x) = \binom{12}{x}\left(\frac{15}{36}\right)^x\left(\frac{21}{36}\right)^{12-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, 12.$$

3.2. *Έστω ότι σε 10 ρίψεις ενός μη αμερόληπτου νομίσματος η πιθανότητα να εμφανισθεί 5 φορές κεφαλή είναι διπλάσια της πιθανότητας να εμφανισθεί 4 φορές κεφαλή.*
Να υπολογισθεί η πιθανότητα σε 5 ρίψεις του νομίσματος να εμφανισθεί μια τουλάχιστο φορά κεφαλή.

$$P(X_\upsilon = x) = \binom{\upsilon}{x} p^x (1-p)^{\upsilon - x}, \quad x = 0, 1, \ldots, \upsilon,$$

$$\binom{10}{5} p^5 (1-p)^5 = 2 \binom{10}{4} p^4 (1-p)^6,$$

$$\binom{10}{5} = \frac{6}{5} \binom{10}{4}$$

$$6p = 5 \cdot 2(1-p), \quad 3p + 5p = 5, \quad p = 5/8.$$

$$P(X_5 \geq 1) = 1 - P(X_5 = 0) = 1 - \binom{5}{0} (5/8)^0 (3/8)^5 = 1 - (3/8)^5.$$

3.3. *Ας θεωρήσουμε έναν ανελκυστήρα πενταόροφου συγκροτήματος γραφείων, ο οποίος ξεκινά από το ισόγειο με 10 άτομα, και έστω X ο αριθμός των ατόμων που αποβιβάζονται στον πέμπτο όροφο. Να υπολογισθούν*

(α) η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X,

(β) η πιθανότητα αποβίβασης το πολύ δύο ατόμων στον πέμπτο όροφο και

(γ) ο μέσος αριθμός των ατόμων που αποβιβάζονται στον πέμπτο όροφο.

(α) Κάθε αποβίβαση ατόμου αποτελεί μια δοκιμή Bernoulli με επιτυχία το ενδεχόμενο αποβίβασης ατόμου στον πέμπτο όροφο. Επομένως

$$P(X = x) = \binom{10}{x}(1/5)^x(4/5)^{10-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, 10,$$

(β)

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= \binom{10}{0}(1/5)^0(4/5)^{10} + \binom{10}{1}(1/5)(4/5)^9 + \binom{10}{2}(1/5)^2(4/5)^8 \end{aligned}$$

και (γ)

$$E(X) = \upsilon p = 10 \cdot \frac{1}{5} = 2.$$

3.5 *Έστω ότι η πιθανότητα επιτυχούς βολής κατά στόχου είναι* $p = 0{,}3$. *Να υπολογισθεί ο αριθμός* υ *των βολών που απαιτούνται έτσι ώστε η πιθανότητα να κτυπηθεί ο στόχος τουλάχιστο μια φορά να είναι μεγαλύτερη ή ίση του* $0{,}9$.

Κάθε βολή κατά του στόχου αποτελεί μια δοκιμή Bernoulli με επιτυχία το ενδεχόμενο να κτυπηθεί ο στόχος. Ο αριθμός X των επιτυχών βολών κατά του στόχου σε υ βολές ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή:

$$P(X_\upsilon = x) = \binom{\upsilon}{x}(0{,}3)^x(0{,}7)^{\upsilon - x}, \quad x = 0, 1, \ldots, \upsilon,$$

$$P(X_\upsilon \geq 1) = 1 - P(X_\upsilon = 0) = 1 - (0{,}7)^\upsilon, \quad P(X_\upsilon \geq 1) \geq 0{,}9$$

$$1 - (0{,}7)^\upsilon \geq 0{,}9, \quad (0{,}7)^\upsilon \leq 0{,}1, \quad \upsilon \geq 7.$$

3.10. *Από τους 125 εργαζόμενους σε μια επιχείρηση 50 είναι γυναίκες. Έστω ότι για κάποια συγκεκριμένη εργασία επιλέγονται τυχαία 5 εργαζόμενοι.*
Να υπολογισθεί η πιθανότητα όπως μεταξύ των 5 οι 2 είναι γυναίκες, χρησιμοποιώντας
(α) την ακριβή κατανομή του αριθμού X των γυναικών μεταξύ των 5 και
(β) κατάλληλη προσέγγιση της κατανομής αυτής.

(α)

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{50}{x}\binom{75}{5-x}}{\binom{125}{5}}, \quad x = 0, 1, \ldots, 5$$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{50}{2}\binom{75}{3}}{\binom{125}{5}} = 0{,}3527.$$

(β) Διωνυμική προσέγγιση της υπεργεωμετρικής με $\upsilon = 5$, $p = 50/25 = 2/5$

$$f(x) = P(X = x) \cong \binom{5}{x}(2/5)^x(3/5)^{5-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, 5,$$

$$P(X = 2) \cong \binom{5}{2}(2/5)^2(3/5)^3 = 0{,}3456.$$

3.15. *Μια ασφαλιστική εταιρεία έχει διαπιστώσει ότι* 0,1% *του πληθυσμού εμπλέκεται σε ένα τουλάχιστο δυστύχημα το χρόνο. Αν η εταιρεία αυτή έχει ασφαλίσει 5000 άτομα να υπολογισθούν οι πιθανότητες να εμπλακούν σε δυστύχημα*
(α) το πολύ 3 πελάτες της τον επόμενο χρόνο
(β) το πολύ 2 σε κάθε ένα από τα επόμενα δύο χρόνια και
(γ) το πολύ 4 στα επόμενα δύο χρόνια.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

Ασκήσεις

Ο αριθμός X των πελατών που εμπλέκονται σε ένα τουλάχιστο δυστύχημα το χρόνο ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με $\upsilon = 5000$ και $p = 1/1000$. Η κατανομή αυτή προσεγγίζεται από την κατανομή Poisson με $\partial = \upsilon p = 5$ και έτσι (α)

$$f_X(x) = e^{-5}\frac{5^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots, \quad P(X \leq 3) = \sum_{x=0}^{3} e^{-5}\frac{5^x}{x!} = 0{,}2650.$$

(β)

$$[P(X \leq 2)]^2 = \left[\sum_{x=0}^{2} e^{-5}\frac{5^x}{x!}\right]^2 = 0{,}0155$$

(γ) Ο αριθμός Y των πελατών που εμπλέκονται σε ένα τουλάχιστο δυστύχημα σε μια διετία ακολουθεί την κατανομή Poisson με ƛ $= 2\partial = 10$ και έτσι

$$f_Y(y) = e^{-10}\frac{10^y}{y!}, \quad y = 0, 1, \ldots, \quad P(Y \leq 4) = \sum_{y=0}^{3} e^{-10}\frac{10^y}{y!} = 0{,}0293.$$

3.16. *Έστω ότι ο αριθμός των θανάτων σε νοσοκομείο των Αθηνών σε ένα μήνα ακολουθεί την κατανομή Poisson.*
Αν η πιθανότητα να συμβεί το πολύ ένας θάνατος είναι τετραπλάσια της πιθανότητας να συμβούν δύο ακριβώς θάνατοι σε ένα μήνα να υπολογισθούν οι πιθανότητες
(α) να μη συμβεί θάνατος σε ένα μήνα και
(β) να συμβούν το πολύ δύο θάνατοι σε δύο μήνες.

(α) Ο αριθμός X_1 των θανάτων σ' ένα μήνα ακολουθεί την κατανομή Poisson με

$$f_{X_1}(x) = P(X_1 = x) = e^{-\vartheta}\frac{\vartheta^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots, \quad 0 < \vartheta < \infty.$$

Η συνθήκη $P(X_1 \leq 1) = 4P(X_1 = 2)$ συνεπάγεται τη σχέση

$$1 + \vartheta = 2\vartheta^2, \;\; 0 < \vartheta < \infty,$$

και έτσι $\vartheta = 1$. Επομένως

$$f_{X_1}(x) = P(X_1 = x) = e^{-1}\frac{1}{x!}, \; x = 0, 1, \ldots, \; P(X_1 = 0) = e^{-1} = 0{,}9048.$$

(β) Ο αριθμός X_2 των θανάτων σ΄ ένα δίμηνο ακολουθεί την κατανομή Poisson με

$$f_{X_2}(x) = P(X_2 = x) = e^{-2}\frac{2^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots, \quad 0 < \partial < \infty.$$

και έτσι

$$P(X_2 \leq 2) = \sum_{x=0}^{2} e^{-2}\frac{2^x}{x!} = 0{,}6767.$$