ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ (Συνέχεια)

Χαράλαμπος Α. Χαραλαμπίδης

18 Νοεμβρίου 2009

2.16. *Έστω ότι το ετήσιο εισόδημα X ενός μισθωτού μπορεί να θεωρηθεί ως μία συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας*

$$f_X(x) = \frac{4 \cdot 10^4}{x^5}, \quad 10 \leq x < \infty,$$

Να υπολογισθούν (α) η συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$, $-\infty < x < \infty$ και (β) το μέσο εισόδημα $E(X)$ και η διασπορά του εισοδήματος $V(X)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(α)

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{10}^{x} \frac{4\cdot 10^4}{t^5}dt = -\left[\frac{10^4}{t^4}\right]_{10}^{x} = 1-\frac{10^4}{x^4}, \quad 10 \le x < \infty,$$

$$F_X(x) = 0, \quad -\infty < x < 10.$$

(β)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \int_{10}^{\infty} \frac{4\cdot 10^4}{x^4}dx = -\left[\frac{4\cdot 10^4}{3x^3}\right]_{10}^{\infty} = \frac{40}{3},$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_{10}^{\infty} \frac{4\cdot 10^4}{x^3}dx = -\left[\frac{4\cdot 10^4}{2x^2}\right]_{10}^{\infty} = 200,$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 200 - \left(\frac{40}{3}\right)^2 = \frac{1800-1600}{9} = \frac{200}{9}.$$

2.20. *Η θερμοκρασία X απόσταξης πετρελαίου καθορίζει την ποιότητα του τελικού προϊόντος. Έστω ότι η X είναι μία συνεχής ομοιόμορφη τυχαία μεταβλητή στο διάστημα $[160, 280]$ και ότι η παραγωγή ενός λίτρου κοστίζει r ευρώ. Αν $X \leq 200$ το προϊόν καλείται νάφθα και πωλείται προς $r + \kappa$ ευρώ το λίτρο, ενώ αν $X > 200$ καλείται απόσταγμα πετρελαίου και πωλείται προς $r + \upsilon$ ευρώ το λίτρο. Να υπολογισθεί το μέσο κέρδος και η διασπορά του κέρδους ανά λίτρο.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Το κέρδος ανά λίτρο είναι μια τ.μ. Y η οποία συνδέεται με τη X με τη σχέση

$$Y = \begin{cases} \kappa, & X \leq 200, \\ \upsilon, & X > 200. \end{cases}$$

και επειδή

$$P(X \leq 200) = \int_{-\infty}^{200} f_X(x)dx = \frac{1}{120}\int_{160}^{200} dx = \left[\frac{x}{120}\right]_{160}^{200} = \frac{1}{3}$$

η συνάρτηση πιθανότητας της είναι η

$$f_Y(\kappa) = \frac{1}{3}, \;\; f_Y(\upsilon) = \frac{2}{3}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Επομένως

$$E(Y) = \kappa \cdot \frac{1}{3} + \upsilon \cdot \frac{2}{3} = \frac{\kappa + 2\upsilon}{3}$$

$$E(Y^2) = \kappa^2 \cdot \frac{1}{3} + \upsilon^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{\kappa^2 + 2\upsilon^2}{3}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{\kappa^2 + 2\upsilon^2}{3} - \left(\frac{\kappa + 2\upsilon}{3}\right)^2 = \frac{2(\upsilon - \kappa)^2}{9}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Θέμα 1. Έστω ότι από μια κληρωτίδα που περιέχει 10 σφαιρίδια, φέροντα τους αριθμούς $1, 2, \ldots, 10$, εξάγονται διαδοχικά το ένα μετά το άλλο, με επανάθεση, 5 σφαιρίδια. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες (ορίζοντας κατάλληλα ενδεχόμενα)

(α) εξαγωγής του αριθμού 1 δύο τουλάχιστο φορές,

(β) εξαγωγής των αριθμών $1, 2$ και 3 μια τουλάχιστο φορά τον καθένα

(γ) ο μεγαλύτερος αριθμός που εξάγεται να είναι το 4.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(α) Έστω B_2 ενδεχόμενο εξαγωγής του αριθμού 1 δύο τουλάχιστο φορές και A_κ ενδεχόμενο εξαγωγής του αριθμού 1 κ ακριβώς φορές, για $\kappa = 0, 1$. Τότε η ζητούμενη πιθανότητα δίνεται από την

$$P(B_2) = 1 - P(A_0) - P(A_1) = 1 - \frac{9^5}{10^5} - \frac{5 \cdot 9^4}{10^5}.$$

(β) Έστω A_κ το ενδεχόμενο να μη εξαχθεί ο αριθμός κ, για $\kappa = 1, 2, 3$. Τότε η ζητούμενη πιθανότητα δίνεται από την

$$\begin{aligned} P(A_1' A_2' A_3') = & 1 - \{P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)\} \\ & + \{P(A_1 A_2) + P(A_1 A_3) + P(A_2 A_3)\} - P(A_1 A_2 A_3) \\ = & 1 - 3\frac{9^5}{10^5} + 3\frac{8^5}{10^5} - \frac{7^5}{10^5}. \end{aligned}$$

(γ) Έστω A_κ το ενδεχόμενο ο μεγαλύτερος αριθμός που εξάγεται να είναι μικρότερος ή ίσος του κ, για $\kappa = 3, 4$.
Τότε $A_4 - A_3$ το ενδεχόμενο ο μεγαλύτερος αριθμός που εξάγεται να είναι ίσος με 4, με $A_3 \subset A_4$, και έτσι η ζητούμενη πιθανότητα δίνεται από την

$$P(A_4 - A_3) = P(A_4) - P(A_3) = \frac{4^5}{10^5} - \frac{3^5}{10^5}.$$

Θέμα 2. Οι ηλεκτρικοί λαμπτήρες που κατασκευάζει συγκεκριμένη εταιρεία προωθούνται στην αγορά συσκευασμένοι σε χαρτοκιβώτια των 30 λαμπτήρων.

Ας υποθέσουμε ότι από ένα χαρτοκιβώτιο που περιέχει 2 ελαττωματικούς λαμπτήρες εξάγονται διαδοχικά ο ένας μετά τον άλλο, χωρίς επανάθεση, 3 λαμπτήρες.

Έστω A_υ το ενδεχόμενο εξαγωγής ελαττωματικού λαμπτήρα στη υ-οστή εξαγωγή, για $\upsilon = 1, 2, 3$.

Να υπολογισθούν οι πιθανότητες

(α) $P(A_1|A_2)$,

(β) $P(A_3)$.

(γ) Αν $P(A) = 1/2$, $P(B) = 3/4$ και $P(AB') = 1/8$, να εξετασθεί κατά πόσον τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(α) Σύμφωνα τον τύπο του Bayes η ζητούμενη πιθανότητα δίνεται από την

$$P(A_1|A_2) = \frac{P(A_1)P(A_2|A_1)}{P(A_1)P(A_2|A_1) + P(A_1')P(A_2|A_1')} = \frac{\frac{2}{30}\frac{1}{29}}{\frac{2}{30}\frac{1}{29} + \frac{28}{30}\frac{2}{29}} = \frac{1}{29}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(β) Σύμφωνα με τον τύπο της ολικής πιθανότητας και στη συνέχεια τον πολλαπλασιαστικό τύπο, η ζητούμενη πιθανότητα δίνεται από την

$$\begin{aligned} P(A_3) &= P(A_1A_2)P(A_3|A_1A_2) + P(A_1A_2')P(A_3|A_1A_2') \\ &\quad + P(A_1'A_2)P(A_3|A_1'A_2) + P(A_1'A_2')P(A_3|A_1'A_2') \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) + P(A_1)P(A_2'|A_1)P(A_3|A_1A_2') \\ &\quad + P(A_1')P(A_2|A_1')P(A_3|A_1'A_2) + P(A_1')P(A_2'|A_1')P(A_3|A_1'A_2') \\ &= \frac{2}{30}\cdot\frac{1}{29}\cdot\frac{0}{28} + \frac{2}{30}\cdot\frac{28}{29}\cdot\frac{1}{28} + \frac{28}{30}\cdot\frac{2}{29}\cdot\frac{1}{28} + \frac{28}{30}\cdot\frac{27}{29}\cdot\frac{2}{28} = \frac{2}{30}. \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(γ) Χρησιμοποιώντας τον τύπο

$$P(AB') = P(A - B) = P(A) - P(AB),$$

παίρνουμε

$$P(AB) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

Επίσης

$$P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

και επομένως ισχύει η σχέση

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

η οποία συνεπάγεται ότι τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

Χαράλαμπος Α. Χαραλαμπίδης

18 Νοεμβρίου 2009

Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο πείραμα με δειγματικό χώρο Ω και ένα ενδεχόμενο A στον Ω.
Αν A' είναι το συμπληρωματικό ενδεχόμενο του A στον Ω, τότε τα ενδεχόμενα (A, A') αποτελούν μια διαίρεση του δειγματικού χώρου Ω, εφ᾽ όσον $A \cap A' = \emptyset$ και $A \cup A' = \Omega$.
Το ενδεχόμενο A χαρακτηρίζεται συνήθως ως επιτυχία και το A' ως αποτυχία.
Παριστάνοντας με ε την επιτυχία και a την αποτυχία ο δειγματικός χώρος δύναται να παρασταθεί ως $\Omega = \{a, \varepsilon\}$.
Ένα τέτοιο τυχαίο πείραμα καλείται *δοκιμή Bernoulli*.
Έστω ότι η πιθανότητα επιτυχίας είναι $P(\{\varepsilon\}) = p, 0 < p < 1$, οπότε η πιθανότητα αποτυχίας είναι $P(\{a\}) = 1 - P(\{\varepsilon\}) = 1 - p = q$.

Ορισμός

Έστω X ο αριθμός των επιτυχιών σε μια δοκιμή Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p (και αποτυχίας $q = 1 - p$). Η κατανομή της δίτιμης τυχαίας μεταβλητής X καλείται κατανομή Bernoulli με παράμετρο p.

Θεώρημα

Η συνάρτηση πιθανότητας της κατανομής Bernoulli με παράμετρο p δίνεται από την

$$f(x) = P(X = x) = p^x q^{1-x}, \quad x = 0, 1. \tag{1}$$

και η συνάρτηση κατανομής από την

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ q, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < \infty. \end{cases} \tag{2}$$

Η μέση τιμή και διασπορά δίνονται από τις

$$\mu = E(X) = p, \quad \sigma^2 = V(X) = pq. \tag{3}$$

Απόδειξη.

Ο αριθμός X των επιτυχιών σε μια δοκιμή Bernoulli είναι μια τυχαία μεταβλητή ορισμένη στον $\Omega = \{a, \varepsilon\}$ με

$$X(a) = 0, \;\; X(\varepsilon) = 1,$$

και έτσι συνάγουμε τις πιθανότητες

$$P(X = 0) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 0\}) = P(\{a\}) = q,$$

$$P(X = 1) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 1\}) = P(\{\varepsilon\}) = p,$$

οι οποίες συνεπάγονται τη συνάρτηση πιθανότητας (1).
Η συνάρτηση κατανομής (2) προκύπτει άμεσα από την (1). $\square$

Η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X είναι

$$\mu = E(X) = \sum_{x=0}^{1} x p^x q^{1-x} = p$$

και η διασπορά αυτής συνάγεται ως εξής:

$$\sigma^2 = V(X) = E[(X-\mu)^2] = \sum_{x=0}^{1} (x-p)^2 p^x q^{1-x} = p^2 q + q^2 p = pq.$$

Ορισμός

Έστω X ο αριθμός των επιτυχιών σε μια ακολουθία υ ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p (και αποτυχίας $q = 1 - p$) σταθερή (ίδια) σε όλες τις δοκιμές.
Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X καλείται διωνυμική με παραμέτρους υ και p.

Θεώρημα

Η συνάρτηση πιθανότητας της διωνυμικής κατανομής με παραμέτρους υ και p δίνεται από την

$$f(x) = P(X = x) = \binom{\upsilon}{x} p^x q^{\upsilon - x}, \quad x = 0, 1, \ldots, \upsilon. \tag{4}$$

Απόδειξη.

Ο δειγματικός χώρος του συνθέτου στοχαστικού πειράματος των υ ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli, σύμφωνα με το Εδάφιο 1.9, είναι το υ-πλό καρτεσιανό γινόμενο του $\Omega = \{\alpha, \varepsilon\}$ με τον εαυτό του,

$$\Omega^{\upsilon} = \{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{\upsilon}) : \omega_i \in \{\alpha, \varepsilon\}, \ \ i = 1, 2, \ldots, \upsilon\}.$$

Το ενδεχόμενο $\{X = x\}$ να πραγματοποιηθούν x επιτυχίες στις υ δοκιμές περιλαμβάνει $\binom{\upsilon}{x}$ στοιχειώδη ενδεχόμενα, όσα και ο αριθμός των επιλογών των x θέσεων για τις επιτυχίες από τις υ θέσεις.
Επιπλέον κάθε τέτοιο στοιχειώδες ενδεχόμενο, επειδή οι δοκιμές είναι ανεξάρτητες, έχει πιθανότητα $p^x q^{\upsilon - x}$.
Επομένως

$$f(x) = P(X = x) = \binom{\upsilon}{x} p^x q^{\upsilon - x}, \ \ x = 0, 1, \ldots, \upsilon.$$

Σημειώνουμε ότι

$$f(x) > 0, \quad x = 0, 1, \ldots, \upsilon, \quad f(x) = 0, \quad x \notin \{0, 1, \ldots, \upsilon\}$$

και, σύμφωνα με τον τύπο του διωνύμου του Νεύτωνα

$$(t+u)^{\upsilon} = \sum_{x=0}^{\upsilon} \binom{\upsilon}{x} t^{x} u^{\upsilon - x}, \quad \upsilon = 1, 2, \ldots ,$$

συνάγουμε ότι

$$\sum_{x=0}^{\upsilon} f(x) = \sum_{x=0}^{\upsilon} \binom{\upsilon}{x} p^{x} q^{\upsilon - x} = (p+q)^{\upsilon} = 1,$$

όπως απαιτείται από τον ορισμό της συνάρτησης πιθανότητας.

Θεώρημα

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας την (4). Τότε η μέση τιμή και η διασπορά της αυτής δίνονται από τις

$$\mu = E(X) = \nu p, \quad \sigma^2 = V(X) = \nu p q. \tag{5}$$

Απόδειξη.

Η μέση τιμή της τ.μ. X, σύμφωνα με τον ορισμό, δίνεται από την

$$\mu = E(X) = \sum_{x=1}^{\upsilon} x \binom{\upsilon}{x} p^x q^{\upsilon - x}.$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$x \binom{\upsilon}{x} = x \frac{\upsilon!}{x!(\upsilon - x)!} = \upsilon \frac{(\upsilon - 1)!}{(x-1)!(\upsilon - x)!} = \upsilon \binom{\upsilon - 1}{x - 1},$$

παίρνουμε

$$\mu = E(X) = \upsilon \sum_{x=1}^{\upsilon} \binom{\upsilon - 1}{x - 1} p^x q^{\upsilon - x} = \upsilon p \sum_{y=0}^{\upsilon - 1} \binom{\upsilon - 1}{y} p^y q^{\upsilon - 1 - y} = \upsilon p.$$

$\square$

Επίσης

$$E[(X)_2] = E[X(X-1)] = \sum_{x=0}^{\upsilon} x(x-1)\binom{\upsilon}{x} p^x q^{\upsilon-x}$$

και επειδή

$$\begin{aligned} x(x-1)\binom{\upsilon}{x} &= x(x-1)\frac{\upsilon!}{x!(\upsilon-x)!} \\ &= \upsilon(\upsilon-1)\frac{(\upsilon-2)!}{(x-2)!(\upsilon-x)!} = \upsilon(\upsilon-1)\binom{\upsilon-2}{x-2}, \end{aligned}$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned} E[(X)_2] &= \upsilon(\upsilon-1)\sum_{x=2}^{\upsilon}\binom{\upsilon-2}{x-2} p^x q^{\upsilon-x} = \upsilon(\upsilon-1)p^2 \sum_{y=0}^{\upsilon-2}\binom{\upsilon-2}{y} p^y q^{\upsilon-2-y} \\ &= \upsilon(\upsilon-1)p^2(p+q)^{\upsilon-2} = \upsilon(\upsilon-1)p^2. \end{aligned}$$

Επομένως

$$\sigma^2 = V(X) = E[(X)_2] + E(X) - [E(X)]^2 = \upsilon(\upsilon-1)p^2 + \upsilon p - \upsilon^2 p^2 = \upsilon pq.$$

Παράδειγμα

Έστω ότι ένα νέο φάρμακο ρύθμισης της πίεσης χορηγείται πειραματικά σε υ υπερτασικούς ασθενείς. Σε κάθε ασθενή μετρείται η πίεση του αίματος πριν και μετά τη χορήγηση ενός ορισμένου φαρμάκου και τα αποτελέσματα είναι $(y_1, z_1), (y_2, z_2), \ldots, (y_\upsilon, z_\upsilon)$.
Αν $y_\kappa > z_\kappa$ θεωρούμε ότι η κ-οστή δοκιμή είχε αποτέλεσμα επιτυχία, ενώ αν $y_\kappa \leq z_\kappa$ αποτυχία, $\kappa = 1, 2, \ldots, \upsilon$.
Αν το φάρμακο δεν έχει καμμιά επίδραση, τότε η πιθανότητα επιτυχίας p είναι ίση με την πιθανότητα αποτυχίας $q = 1 - p$ και επομένως $p = 1/2$.
Έστω X ο αριθμός των επιτυχιών στις υ δοκιμές. Τότε, υποθέτοντας ότι το φάρμακο δεν έχει καμμιά επίδραση στην πίεση του αίματος,

$$f(x) = P(X = x) = \binom{\upsilon}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{\upsilon}, \quad x = 0, 1, \ldots, \upsilon.$$

Να υπολογισθούν οι πιθανότητες (α) 2 το πολύ επιτυχιών και (β) 7 τουλάχιστον επιτυχιών στην περίπτωση $\nu = 8$ ασθενών.

Οι ζητούμενες πιθανότητες είναι (α)

$$P(X \leq 2) = \sum_{x=0}^{2} \binom{8}{x} (0{,}5)^8 = 0{,}0039 + 0{,}0312 + 0{,}1094 = 0{,}1445$$

και (β)

$$P(X \geq 7) = \sum_{x=7}^{8} \binom{8}{x} (0{,}5)^8 = 0{,}0312 + 0{,}0039 = 0{,}0351.$$