ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ (Συνέχεια)

Χαράλαμπος Α. Χαραλαμπίδης

11 Νοεμβρίου 2009

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.1. *Έστω ότι ο χρόνος αναμονής* X, *σε λεπτά, σε συγκεκριμένο σταθμό του μετρό είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0, \\ x/2, & 0 \leq x < 1, \\ 1/2, & 1 \leq x < 2, \\ x/4, & 2 \leq x < 4, \\ 1, & 4 \leq x < \infty. \end{cases}$$

Να υπολογισθούν (α) οι πιθανότητες $P(X \leq 3/2)$, $P(X > 3)$ *και* $P(3 < X \leq 5)$ *και (β) η συνάρτηση πυκνότητας* $f(x)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(α)

$$P(X \leq 3/2) = F(3/2) = \frac{1}{2},$$

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4},$$

$$P(3 < X \leq 5) = F(5) - F(3) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

(β)

$$f(x) = \begin{cases} 1/2, & 0 \leq x < 1, \\ 1/4, & 2 \leq x < 4, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.2. *Ας θεωρήσουμε το στοχαστικό πείραμα της ρίψης δύο κύβων και έστω* X *το άθροισμα των εμφανιζομένων αριθμών. Να υπολογισθούν (α) η συνάρτηση πιθανότητας* $f_X(x) = P(X = x)$, $x = 2, 3, \ldots, 12$, *και (β) η συνάρτηση κατανομής* $F_X(x) = P(X \leq x)$, $x \in R$, *της τυχαίας μεταβλητής* X.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{36}, & x = 2, 3, \ldots, 7, \\ \dfrac{13-x}{36}, & x = 8, 9, \ldots, 12, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \sum_{\kappa=2}^{[x]} f_X(\kappa) = \sum_{\kappa=2}^{[x]} \frac{\kappa-1}{36} = \frac{[x]([x]-1)}{2 \cdot 36}, \quad 2 \leq x < 8$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 2 \\ \dfrac{[x]([x]-1)}{72}, & 2 \leq x < 8, \\ \dfrac{42 + ([x]-7)(18-[x])}{72}, & 8 \leq x < 12, \\ 1, & 12 \leq x < \infty. \end{cases}$$

2.4. *Έστω X μία αρνητική ακέραιη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας*

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 4p^3, & x = 0, \\ 5p(1 - 3p), & x = 1, \\ 2p(p + 3) - 1, & x = 2, \\ 0, & x \neq 0, 1, 2. \end{cases}$$

Να υπολογισθούν οι πιθανότητες p, $P(X \leq 1)$ και $P(0 < X \leq 2)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$$\sum_{x=0}^{2} f(x) = 1, \;\; 4p^3 - 13p^2 + 11p - 2 = 0$$

Η $p = 1$ είναι λύση, οπότε

$$4p^3 - 13p^2 + 11p - 2 = (p-1)(4p^2 - 9p + 2), \;\; 4p^2 - 9p + 2 = 0$$

και $p = 2$, $p = 1/4$ είναι οι δύο άλλες λύσεις.
Η μόνη αποδεκτή λύση είναι η $p = 1/4$ και έτσι

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 1/16, & x = 0, \\ 5/16, & x = 1, \\ 10/16, & x = 2, \\ 0, & x \neq 0, 1, 2, \end{cases}$$

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 3/8,$$

$$P(0 < X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = 15/16.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.6. *Η ποσότητα βενζίνης X (σε χιλιόλιτρα) που πωλεί πρατήριο βενζίνης σε μία μέρα είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας*

$$f(x) = \begin{cases} cx, & 0 \leq x < 1, \\ c, & 1 \leq x < 2, \\ c(3-x), & 2 \leq x < 3, \\ 0, & 3 \leq x < \infty. \end{cases}$$

Να υπολογισθούν (α) η σταθερά c και (β) οι πιθανότητες $P(X \leq 3/4)$, $P(1/2 < X \leq 5/2)$ και $P(X > 9/4)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$$(\alpha)\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = c\int_0^1 xdx + c\int_1^2 dx + c\int_2^3 (3-x)dx$$

$$= c\left\{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[x\right]_1^2 - \left[\frac{(3-x)^2}{2}\right]_2^3\right\} = 2c, \quad c = 1/2.$$

$$(\beta)\ P(X \leq 3/4) = \frac{1}{2}\int_0^{3/4} xdx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{3/4} = \frac{9}{64},$$

$$P(1/2 < X \leq 5/2) == \frac{1}{2}\int_{1/2}^{1} xdx + \frac{1}{2}\int_1^2 dx + \frac{1}{2}\int_2^{5/2} (3-x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{x^2}{2}\right]_{1/2}^1 + \left[x\right]_1^2 - \left[\frac{(3-x)^2}{2}\right]_2^{5/2}\right\} = \frac{7}{8},$$

$$P(X > 9/4) = \frac{1}{2}\int_{9/4}^{3} (3-x)dx = -\left[\frac{(3-x)^2}{4}\right]_{9/4}^3 = \frac{9}{64}.$$

2.8. *Έστω X μία συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας*

$$f_X(x) = 1 - |x|, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Να υπολογισθούν (α) η συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$, $x \in R$, (β) η πιθανότητα $P(|X| \leq 1/2)$ και (γ) οι συναρτήσεις κατανομής $F_Y(y)$, $y \in R$, και πυκνότητας $f_Y(y)$, $y \in R$, της τυχαίας μεταβλητής $Y = X + 1$.

$$(a)\ \ F_X(x) = \int_{-1}^{x} (1-|t|)dt = \int_{-1}^{x} (1+t)dt$$
$$= \left[\frac{(1+t)^2}{2}\right]_{-1}^{x} = \frac{(1+x)^2}{2}, \quad -1 \leq x < 0,$$

$$F_X(x) = \int_{-1}^{x} (1-|t|)dt = \int_{-1}^{0} (1+t)dt + \int_{0}^{x} (1-t)dt$$
$$= \left[\frac{(1+t)^2}{2}\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{(1-t)^2}{2}\right]_{0}^{x} = 1 - \frac{(1-x)^2}{2}, 0 \leq x < 1,$$

$$F_X(x) = 0, \ \ -\infty < x < -1, \ \ F_X(x) = 1, \ \ 1 \leq x < \infty.$$

$$(\beta)\ P(|X| \leq 1/2) = P(-1/2 \leq X \leq 1/2) = F_X(1/2) - F_X(-1/2) = \frac{7}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{4}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$$(\gamma)\;\; F_Y(y) = P(X+1 \le y) = P(X \le y-1) = F_X(y-1)$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & -\infty < y < 0 \\ \dfrac{y^2}{2}, & 0 \le y < 1 \\ 1 - \dfrac{(2-y)^2}{2}, & 1 \le y < 2 \\ 1, & 2 \le y < \infty. \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} y, & 0 \le y < 1 \\ 2-y, & 1 \le y \le 2 \\ 0, & y < 0, \;\; \text{ή} \;\; y > 2. \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.9. *Η διακύμανση ηλεκτρικού ρεύματος μπορεί να θεωρηθεί ως μία συνεχής τυχαία μεταβλητή* X *που κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα* $[10, 12]$. *Αν το ρεύμα αυτό διέρχεται από αντίσταση 2 ohm να προσδιορισθεί η συνάρτηση πυκνότητας της τάσης* $Y = 2X^2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(2X^2 \le y) = P(-\sqrt{y/2} \le X \le \sqrt{y/2})$$
$$= F_X(\sqrt{y/2}) - F_X(-\sqrt{y/2})$$

Παραγωγίζοντας την $F_Y(y)$, παίρνουμε

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{2y}}\left\{f_X(\sqrt{y/2}) + f_X(-\sqrt{y/2})\right\}$$

και επειδή $f_X(x) = 1/2$, $10 \le x \le 12$,

$$f_Y(y) = \frac{1}{4\sqrt{2y}}, \quad 200 \le y \le 288.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.11. *Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει την τυποποιημένη κανονική συνάρτηση πυκνότητας*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Να προσδιορισθεί η συνάρτηση πυκνότητας της τ.μ. $Y = |X|$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$f_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y)$$

και το ότι $f_X(-x) = f_X(x)$, παίρνουμε

$$f_Y(y) = 2f_X(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-y^2/2}, \quad 0 \leq y < \infty.$$

2.14. *Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας*

$$f_X(x) = \frac{1}{3}, \quad -1 \leq x \leq 2.$$

Να υπολογισθεί η συνάρτηση πυκνότητας $f_Y(y)$ της τ.μ. $Y = |X|$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$f_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y)$$

και επειδή $f_X(-y) = 0$, για $1 \leq y \leq 2$, παίρνουμε

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}, & 0 \leq y < 1, \\ \dfrac{1}{3}, & 1 \leq y \leq 2. \end{cases}$$