# ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ (Συνέχεια)

Χαράλαμπος Α. Χαραλαμπίδης

21 Οκτωβρίου 2009

# ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

Η ανάγκη εισαγωγής της δεσμευμένης πιθανότητας αναφύεται στις περιπτώσεις όπου μία μερική γνώση ως προς την έκβαση ενός στοχαστικού πειράματος μειώνει την αβεβαιότητα συρρικνώνοντας το δειγματικό χώρο.

Συγκεκριμένα, ας θεωρήσουμε ένα στοχαστικό πείραμα με δειγματικό χώρο $\Omega$ και πιθανότητα $P(A)$, για κάθε ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$.
Ας υποθέσουμε ότι σε κάποιο στάδιο της εκτέλεσής του πραγματοποιήθηκε ένα συγκεκριμένο ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$.

# ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ (Συνέχεια)

Τότε, όσον αφορά την τελική του έκβαση, ο δειγματικός χώρος συρρικνώνεται στο σύνολο $A$ και ένα οποιονδήποτε ενδεχόμενο $B$ (ως προς το δειγματικό χώρο $\Omega$) συρρικνώνεται στο ενδεχόμενο $\Gamma = AB$, το οποίο συμβολίζεται με $B|A$ και διαβάζεται: το ενδεχόμενο $B$ δεδομένου του (ενδεχομένου) $A$.

Η πιθανότητα του ενδεχομένου $B$ δεδομένου του $A$, η οποία συμβολίζεται με $P(B|A)$, $B \subseteq \Omega$, και καλείται δεσμευμένη πιθανότητα (δεδομένου του $A$) συνδέεται, όπως είναι φυσικό, με τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(AB)$.
Το επόμενο παράδειγμα χρησιμεύει στην καλύτερη κατανόηση του πλαισίου στο οποίο τοποθετείται η δεσμευμένη πιθανότητα.

# ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ (Συνέχεια)

## Παράδειγμα

*Ας θεωρήσουμε μία κληρωτίδα η οποία περιέχει 5 σφαιρίδια αριθμημένα από το 1 μέχρι το 5.*
*Τα σφαιρίδια 1 και 2 είναι άσπρα, ενώ τα σφαιρίδια 3, 4 και 5 είναι μαύρα.*

*(α) Έστω ότι σε μία πρώτη κλήρωση ένα σφαιρίδιο εξάγεται τυχαία και ας θεωρήσουμε το ενδεχόμενο* $A$ *εξαγωγής σ' αυτήν άσπρου σφαιριδίου. Ο δειγματικός χώρος του στοχαστικού αυτού πειράματος περιλαμβάνει τα ισοπίθανα δειγματικά σημεία:* $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *και το ενδεχόμενο της εξαγωγής άσπρου σφαιριδίου περιλαμβάνει τα σημεία:* $A = \{1, 2\}$. *Επομένως, σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας,*

$$P(A) = \frac{2}{5}, \quad P(A') = \frac{3}{5}.$$

# ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ (Συνέχεια)

(β) Έστω ότι, χωρίς επανάθεση στην κληρωτίδα του σφαιριδίου που εξάγεται στην πρώτη κλήρωση, σε μία δεύτερη κλήρωση ένα σφαιρίδιο εξάγεται τυχαία και ας θεωρήσουμε το ενδεχόμενο $B$ εξαγωγής σ' αυτήν άσπρου σφαιριδίου. Ο υπολογισμός της πιθανότητας $P(B)$ απαιτεί τη γνώση της σύνθεσης των σφαιριδίων στην κληρωτίδα τη στιγμή της εξαγωγής του δευτέρου σφαιριδίου.

Συγκεκριμένα, η γνώση της πραγματοποίησης ή μη πραγματοποίησης του ενδεχομένου $A$ κατά την πρώτη εξαγωγή επιτρέπει τον υπολογισμό της πιθανότητας $P(B)$, σύμφωνα με το θεώρημα της ολικής πιθανότητας, το οποίο εξετάζουμε πιο κάτω.

Το παράδειγμα αυτό υποδεικνύει την ανάγκη εισαγωγής της δεσμευμένης πιθανότητας $P(B|A)$, του $B$ δεδομένου του $A$.

Περαιτέρω, η σύνδεση της πιθανότητας $P(B|A)$ με τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(AB)$, η οποία συνάγεται από τη σύνθεση των δύο κληρώσεων στο ακόλουθο (σύνθετο) στοχαστικό πείραμα, υποδεικνύει τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας μέσω της (μη δεσμευμένης) πιθανότητας.

# ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ (Συνέχεια)

(γ) Έστω ότι από την ανωτέρω κληρωτίδα εξάγονται τυχαία δύο σφαιρίδια, το ένα μετά το άλλο, χωρίς επανάθεση. Ο δειγματικός χώρος $\Omega$ του συνθέτου αυτού στοχαστικού πειράματος περιλαμβάνει τις διατάξεις του συνόλου $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ανά 2 (χωρίς επανάληψη):

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),\\&(3,4),(3,5),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)\}.\end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι τα $N = N(\Omega) = (5)_2 = 20$ δειγματικά σημεία, είναι ισοπίθανα.

# ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ (Συνέχεια)

Το ενδεχόμενο $A$ (ως προς το δειγματικό χώρο $\Omega$), εξαγωγής άσπρου σφαιριδίου στην πρώτη κλήρωση, περιλαμβάνει τα ακόλουθα $N(A) = 8$ δειγματικά σημεία:

$$A = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5)\},$$

ενώ το ενδεχόμενο $B$ (ως προς το δειγματικό χώρο $\Omega$), εξαγωγής άσπρου σφαιριδίου στη δεύτερη κλήρωση, περιλαμβάνει τα ακόλουθα $N(B) = 8$ δειγματικά σημεία:

$$B = \{(1,2),(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(5,1),(5,2)\}.$$

Έτσι, σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας, η πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου $A$ είναι ίση με

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5},$$

σε συμφωνία με το αποτέλεσμα της περίπτωσης του τυχαίου πειράματος της μιας (πρώτης) κλήρωσης.

# ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ (Συνέχεια)

Ας υποθέσουμε ότι στην πρώτη κλήρωση του συνθέτου στοχαστικού πειράματος πραγματοποιήθηκε το ενδεχόμενο $A$, της εξαγωγής άσπρου σφαιριδίου. Η γνώση της πραγματοποίησης του $A$ μειώνει την αβεβαιότητα ως προς την τελική έκβαση του συνθέτου στοχαστικού πειράματος συρρικνώνοντας το δειγματικό χώρο $\Omega$ στο σύνολο $A$ και το ενδεχόμενο $B$ στο ενδεχόμενο

$$AB = \{(1,2),(2,1)\},$$

με $N(AB) = 2$. Επομένως η δεσμευμένη πιθανότητα του $B$ δεδομένου του $A$ είναι ίση με

$$P(B|A) = \frac{N(AB)}{N(A)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

# ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ (Συνέχεια)

Παρατηρούμε ότι, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$P(AB) = \frac{N(AB)}{N}, \quad P(A) = \frac{N(A)}{N},$$

συνάγουμε για τη δεσμευμένη πιθανότητα την έκφραση

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Σημειώνουμε ότι, σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό, η (μη δεσμευμένη) πιθανότητα του $B$ είναι ίση με

$$P(B) = \frac{N(B)}{N} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$

## Ορισμός

*Έστω $\Omega$ ένας δειγματικός χώρος στοχαστικού πειράματος και $A \subseteq \Omega$ ένα ενδεχόμενο με $P(A) > 0$. Η δεσμευμένη πιθανότητα, δεδομένου του $A$, είναι μία συνάρτηση $P(B|A)$, $B \subseteq \Omega$, που ορίζεται από τη σχέση*

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \quad B \subseteq \Omega. \tag{1}$$

*Όταν $P(A) = 0$, η $P(B|A)$ δεν ορίζεται. Για συγκεκριμένο ενδεχόμενο $B \subseteq \Omega$, η $P(B|A)$ καλείται δεσμευμένη πιθανότητα του ενδεχομένου $B$ δεδομένου του (ενδεχομένου) $A$.*

Άμεση συνέπεια του ορισμού αυτού είναι ότι η $P(B|A)$, $B \subseteq \Omega$, για δεδομένο $A \subseteq \Omega$, ικανοποιεί τα τρία αξιώματα της πιθανότητας και ως γνήσια πιθανότητα ικανοποιεί και όλες τις ιδιότητες της (απόλυτης) πιθανότητας $P(A)$, $A \subseteq \Omega$.

# ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ (Συνέχεια)

## Θεώρημα

*Έστω* $A_i \subseteq \Omega$, $i = 1, 2, \ldots, \upsilon$ *ενδεχόμενα με* $P(A_1 A_2 \cdots A_{\upsilon-1}) > 0$. *Τότε*

$$P(A_1 A_2 \cdots A_\upsilon) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_\upsilon|A_1A_2\cdots A_{\upsilon-1}). \quad (2)$$

## Απόδειξη.

Σύμφωνα με τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας η σχέση αυτή ισχύει για $\upsilon = 2$,

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1).$$

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει για κάποιο $\upsilon > 2$. Τότε ισχύει και για $\upsilon + 1$,

$$\begin{aligned} P(A_1A_2\cdots A_\upsilon A_{\upsilon+1}) &= P[(A_1A_2\cdots A_\upsilon)A_{\upsilon+1}] \\ &= P(A_1A_2\cdots A_\upsilon)P(A_{\upsilon+1}|A_1A_2\cdots A_\upsilon) \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_{\upsilon+1}|A_1A_2\cdots A_\upsilon), \end{aligned}$$

και σύμφωνα με την αρχή της μαθ. επαγωγής ισχύει για κάθε $\upsilon \geq 2$. $\square$

# ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ (Συνέχεια)

## Παράδειγμα

*Ας θεωρήσουμε μία κληρωτίδα η οποία περιέχει $\upsilon$ σφαιρίδια αριθμημένα από το 1 μέχρι το $\upsilon$ και έστω ότι $r$ από τα σφαιρίδια αυτά είναι άσπρα. Εξάγουμε τυχαία και χωρίς επανάθεση το ένα μετά το άλλο $\kappa$ σφαιρίδια. Να υπολογισθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου και τα $\kappa$ εξαγόμενα σφαιρίδια να είναι άσπρα.*

*Έστω $A_j$ το ενδεχόμενο εξαγωγής άσπρου σφαιριδίου στην $j$-οστή εξαγωγή, $j = 1, 2, \ldots, \kappa$. Τότε $A_1 A_2 \cdots A_\kappa$ είναι το ενδεχόμενο και τα $\kappa$ εξαγόμενα σφαιρίδια να είναι άσπρα και η ζητούμενη πιθανότητα, σύμφωνα με τη (2), είναι*

$$\begin{aligned} P(A_1 A_2 \cdots A_\kappa) &= P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_\kappa|A_1A_2\cdots A_{\kappa-1}) \\ &= \frac{r}{\upsilon}\cdot\frac{r-1}{\upsilon-1}\cdots\frac{r-\kappa+1}{\upsilon-\kappa+1} = \frac{(r)_\kappa}{(\upsilon)_\kappa}. \end{aligned}$$

# ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ (Συνέχεια)

Στην περίπτωση του Ελληνικού Lotto η κληρωτίδα περιέχει $\nu = 49$ σφαιρίδια και κληρώνονται $\kappa = 6$ αριθμοί. Τα $r$ άσπρα σφαιρίδια φέρουν τους αριθμούς στους οποίους στοιχηματίζει κάποιος. Έτσι, αν στοιχηματίσει σε $r = 6$ αριθμούς, η πιθανότητα να πετύχει και τους 6 αριθμούς που κληρώνονται είναι ίση με

$$p = \frac{1}{13.998.816} \cong 0{,}00000007,$$

και θεωρείται πρακτικά μηδενική.

# ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ (Συνέχεια)

## Τύπος ολικής πιθανότητας

Η πιθανότητα οποιουδήποτε ενδεχομένου δύναται να αναλυθεί σε άθροισμα πιθανοτήτων με τη χρησιμοποίηση δεσμευμένων πιθανοτήτων του ενδεχομένου αυτού. Η ανάλυση αυτή απαιτεί την έννοια της διαμέρισης του δειγματικού χώρου $\Omega$.

Σχετικά, μια συλλογή $\{A_1, A_2, \ldots, A_\upsilon\}$ $\upsilon$ ενδεχομένων $A_\kappa \subseteq \Omega$, $\kappa = 1, 2, \ldots, \upsilon$, τα οποία είναι κατά ζεύγη ξένα, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, και η ένωσή τους είναι $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_\upsilon = \Omega$, καλείται *διαμέριση* του $\Omega$.

Το σχετικό θεώρημα αναφέρεται ως *Θεώρημα ή τύπος ολικής πιθανότητας*.

# ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ (Συνέχεια)

## Τύπος ολικής πιθανότητας

### Θεώρημα

*Έστω* $A_\kappa \subseteq \Omega$, $\kappa = 1, 2, \ldots, \upsilon$ *μία διαμέριση του δειγματικού χώρου* $\Omega$ *με* $P(A_\kappa) > 0$, $\kappa = 1, 2, \ldots, \upsilon$. *Τότε, για κάθε ενδεχόμενο* $B \subseteq \Omega$, *ισχύει*

$$P(B) = \sum_{\kappa=1}^{\upsilon} P(A_\kappa) P(B|A_\kappa). \tag{3}$$

### Απόδειξη.

Παρατηρούμε ότι, για οποιοδήποτε ενδεχόμενο $B \subseteq \Omega$, τα ενδεχόμενα $A_\kappa B \equiv A_\kappa \cap B$, $\kappa = 1, 2, \ldots, \upsilon$ είναι κατά ζεύγη ξένα και

$$B = B\Omega = (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_\upsilon)B = (A_1 B) \cup (A_2 B) \cup \cdots \cup (A_\upsilon B).$$

Επομένως, σύμφωνα με την προσθετική ιδιότητα, έχουμε

$$P(B) = P(A_1 B) + P(A_2 B) + \ldots + P(A_\upsilon B)$$

και επειδή $P(A_\kappa) > 0$, $\kappa = 1, 2, \ldots$, χρησιμοποιώντας το πολλαπλασιαστικό θεώρημα με $\upsilon = 2$, $P(A_\kappa B) = P(A_\kappa)P(B|A_\kappa)$, $\kappa = 1, 2, \ldots$, συνάγουμε την (3). $\square$

Μία ενδιαφέρουσα συνέπεια της δεσμευμένης πιθανότητας, σε συνδυασμό με το θεώρημα της ολικής πιθανότητας, είναι γνωστή ως *Θεώρημα ή τύπος του Bayes*.

### Θεώρημα

*Έστω $A_\kappa \subseteq \Omega$, $\kappa = 1, 2, \ldots, \upsilon$ μία διαμέριση του δειγματικού χώρου $\Omega$ με $P(A_\kappa) > 0$, $\kappa = 1, 2, \ldots,$ και $B \subseteq \Omega$ ενδεχόμενο με $P(B) > 0$. Τότε*

$$P(A_r|B) = \frac{P(A_r)P(B|A_r)}{\sum_{\kappa=1}^{\upsilon} P(A_\kappa)P(B|A_\kappa)}, \quad r = 1, 2, \ldots, \upsilon. \tag{4}$$

## Απόδειξη.

Σύμφωνα με τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε

$$P(A_r|B) = \frac{P(A_r B)}{P(B)}.$$

Χρησιμοποιώντας το πολλαπλασιαστικό θεώρημα με $\upsilon = 2$, ο αριθμητής δύναται να γραφεί στη μορφή

$$P(A_r B) = P(A_r)P(B|A_r),$$

οπότε, αναλύνοτας τον παρονομαστή σύμφωνα με το θεώρημα της ολικής πιθανότητας, συνάγουμε τη ζητούμενη έκφραση. $\square$

### Παρατήρηση

*Οι πιθανότητες $P(A_\kappa)$ που γνωρίζουμε πριν την εκτέλεση του τυχαίου πειράματος καλούνται και* **εκ των προτέρων** *(a priori) πιθανότητες,*

*ενώ οι δεσμευμένες πιθανότητες $P(A_r|B)$ που υπολογίζουμε με δεδομένη την πραγματοποίηση του B και επομένως μετά την εκτέλεση του τυχαίου πειράματος καλούνται και* **εκ των υστέρων** *(a posteriori) πιθανότητες.*

*Αν τα ενδεχόμενα $A_\kappa$, $\kappa = 1, 2, \ldots, \nu$ θεωρηθούν ως* **αιτίες***, τότε ο τύπος του Bayes εκφράζει την πιθανότητα η πραγματοποίηση του ενδεχομένου B να οφείλεται στην* **αιτία** *$A_r$.*

*Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση που η διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω είναι άπειρη, $A_\kappa \subseteq \Omega$, $\kappa = 1, 2, \ldots$, η άθροιση στους τύπους της ολικής πιθανότητας και του Bayes εκτείνεται μέχρι το άπειρο.*

### Παράδειγμα

*Οι ηλεκτρικοί λαμπήρες προωθούνται στην αγορά συσκευασμένοι σε χαρτοκιβώτια των 25 λαμπήρων.*
*Ας υποθέσουμε ότι από ένα χαρτοκιβώτιο που περιέχει τρεις ελαπωματικούς λαμπτήρες εξάγουμε δύο λαμπτήρες.*
*Να υπολογισθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων A και B εξαγωγής ελαπωματικού λαμπτήρα στην πρώτη και δεύτερη εξαγωγή, αντίστοιχα.*

*(α) Αν οι εξαγωγές γίνονται με επανάθεση, τότε*

$$P(A) = \frac{3}{25}, \quad P(B) = \frac{3}{25}.$$

(β) Αν οι εξαγωγές γίνονται χωρίς επανάθεση, τότε

$$P(A) = \frac{3}{25}, \quad P(A') = \frac{22}{25}$$

και η πιθανότητα του ενδεχομένου $B$ υπολογίζεται με τη χρησιμοποιήση του θεωρήματος της ολικής πιθανότητας ως

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(A')P(B|A') = \frac{3}{25} \cdot \frac{2}{24} + \frac{22}{25} \cdot \frac{3}{24} = \frac{3}{25}.$$

Αξίζει ιδιαίτερης επισήμανσης το γεγονός ότι, σε αντίθεση με τη διαίσθηση μας, η πιθανότητα εξαγωγής ελαττωματικού λαμπτήρα είναι η ίδια είτε οι εξαγωγές γίνονται με επανάθεση είτε χωρίς επανάθεση.

### Παράδειγμα

*Στα διαγωνίσματα ερωτήσεων πολλαπλής επιλογής μετά από κάθε ερώτηση δίνονται $\upsilon$ εναλλακτικές απαντήσεις, από τις οποίες μόνο μία είναι ορθή.*
*Ο εξεταζόμενος σημειώνει για κάθε ερώτηση την ορθή απάντηση αν την γνωρίζει, ή εκλέγει κατά τύχη και σημειώνει μία από τις $\upsilon$ απαντήσεις.*
*Έστω ότι ένας εξεταζόμενος, σύμφωνα με τις γνώσεις του, έχει πιθανότητα p να γνωρίζει την απάντηση μιας συγκεκριμένης ερώτησης. Δεδομένου ότι απάντησε ορθά στη συγκεκριμένη αυτή ερώτηση, ποιά είναι η πιθανότητα να γνώριζε την απάντηση ;*

Έστω $A$ το ενδεχόμενο ο εξεταζόμενος να γνωρίζει την απάντηση της συγκεκριμένης ερώτησης και $B$ το ενδεχόμενο να απαντήσει ορθά σ' αυτή. Τότε, σύμφωνα με τον τύπο του Bayes, έχουμε

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(A')P(B|A')}$$

και επειδή

$$P(A) = p, \;\; P(A') = 1 - p, \;\; P(B|A) = 1, \;\; P(B|A') = 1/\upsilon,$$

συνάγουμε για τη ζητουμένη πιθανότητα την έκφραση

$$P(A|B) = \frac{p}{p + (1-p)(1/\upsilon)} = \frac{\upsilon p}{1 + (\upsilon - 1)p}.$$

Στην περίπτωση που $\upsilon = 3$ και $p = 9/10$, $P(A|B) = 27/28$.

# ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ (Συνέχεια)

## Παρατήρηση

*Η δεσμευμένη πιθανότητα, όπως έχουμε ήδη σημειώσει, ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες της (απόλυτης) πιθανότητας. Ο τύπος της ολικής πιθανότητας για τη δεσμευμένη πιθανότητα οποιουδήποτε ενδεχομένου διατυπωνεται ως εξής:*

*Έστω $A_\kappa \subseteq \Omega$, $\kappa = 1, 2, \ldots, \upsilon$ μία διαμέριση του δειγματικού χώρου $\Omega$ με $P(A_\kappa) > 0$ , $\kappa = 1, 2, \ldots, \upsilon$. Αν $A \subseteq \Omega$ είναι ένα ενδεχόμενο με $P(A) > 0$ και $B \subseteq \Omega$ είναι ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο, τότε*

$$P(B|A) = \sum_{\kappa=1}^{\upsilon} P(A_\kappa|A)P(B|AA_\kappa). \tag{5}$$

### Παράδειγμα

*Ας θεωρήσουμε ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα αποτελούμενο από έναν πομπό, έναν αναμεταδότη και ένα δέκτη.*
*Ο πομπός στέλλει τα σήματα στο δυαδικό σύστημα, στο οποίο τα γράμματα του αλφαβήτου είναι ακολουθίες από 0 και 1.*
*Ο αναμεταδότης και ο δέκτης, λόγω θορύβου, λαμβάνουν το σήμα* 0 *ως σήμα* 1 *με πιθανότητα* 0,02 *και το σήμα* 1 *ως σήμα* 0 *με πιθανότητα* 0,03.

*Να υπολογισθούν οι δεσμευμένες πιθανότητες λήψης από το δέκτη*
*(α) του σήματος* 0 *και*
*(β) του σήματος* 1 *δεδομένης, σε αμφότερες της περιπτώσεις, της αποστολής από τον πομπό του σήματος* 0.

(α) Ας θεωρήσουμε
το ενδεχόμενο $A$ αποστολής από τον πομπό του σήματος 0,
το ενδεχόμενο $A_1$ λήψης από τον αναμεταδότη του σήματος 0 και
το ενδεχόμενο $B$ λήψης από τον δέκτη του σήματος 0.
Η δεσμευμένη πιθανότητα $P(B|A)$, λήψης από το δέκτη του σήματος 0 δεδομένης της αποστολής από τον πομπό του σήματος 0, σύμφωνα με την προηγούμενη παρατήρηση, δίνεται από τη σχέση

$$P(B|A) = P(A_1|A)P(B|AA_1) + P(A_1'|A)P(B|AA_1'),$$

η οποία, επειδή $P(B|AA_1) = P(B|A_1)$, $P(B|AA_1') = P(B|A_1')$, δίνει

$$\begin{aligned} P(B|A) &= P(A_1|A)P(B|A_1) + P(A_1'|A)P(B|A_1') \\ &= 0{,}98 \cdot 0{,}98 + 0{,}02 \cdot 0{,}03 = 0{,}961. \end{aligned}$$

(β) Η δεσμευμένη πιθανότητα $P(B'|A)$, λήψης από το δέκτη του σήματος 1 δεδομένης της αποστολής από τον πομπό του σήματος 0, δίνεται από την

$$P(B'|A) = 1 - P(B|A) = 1 - 0{,}961 = 0{,}039.$$