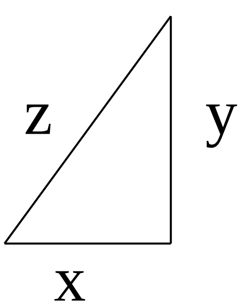
Σύνδεση της Θεωρίας Αριθμών με τη Γεωμετρία

Παναγιώτης Τσαγκάρης

Οι Πυθαγόρειοι συνδέανε την Θεωρία Αριθμών με την Γεωμετρία. Μία τέτοια σύνδεση με έχει προκύψει από το **Πυθαγόρειο θεώρημα**.

Οι Πυθαγόρειοι ενδιαφέρθηκαν για ορθογώνια τρίγωνα που τα μήκη των πλευρών τους είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί. Τα οποία σήμερα ονομάζονται **Πυθαγόρεια τρίγωνα**.

Αν x, y, z είναι οι πλευρές ενός Πυθαγορείου τριγώνου τότε η τριάδα (x, y, z) λέγεται **Πυθαγόρεια τριάδα**, δηλαδή οι x, y, z είναι φυσικοί αριθμοί με την ιδιότητα $\mathbf{x^2 + y^2 = z^2}$



Πρόβλημα 1: Ζητείται το πλήθος των **Πυθαγόρειων τριγώνων**, δηλαδή ζητείται το πλήθος των **Πυθαγόρειων τριάδων**.

Οι Πυθαγόρειοι ήταν οι πρώτοι που έδωσαν μια μέθοδο προσδιορισμού (άπειρων) Πυθαγόρειων τριάδων. Η μέθοδος αυτή είναι η εξής.

Έστω $\mathbf{n>1}$ περιττός αριθμός και

$$\mathbf{x = n\ , \quad y = 1/2\ (n^2-1)\ , \quad z = 1/2\ (n^2+1)}$$

τότε η τριάδα **(x, y, z)** είναι Πυθαγόρεια.

Αριθμητικό παράδειγμα

n=3 => **(3, 4, 5)**

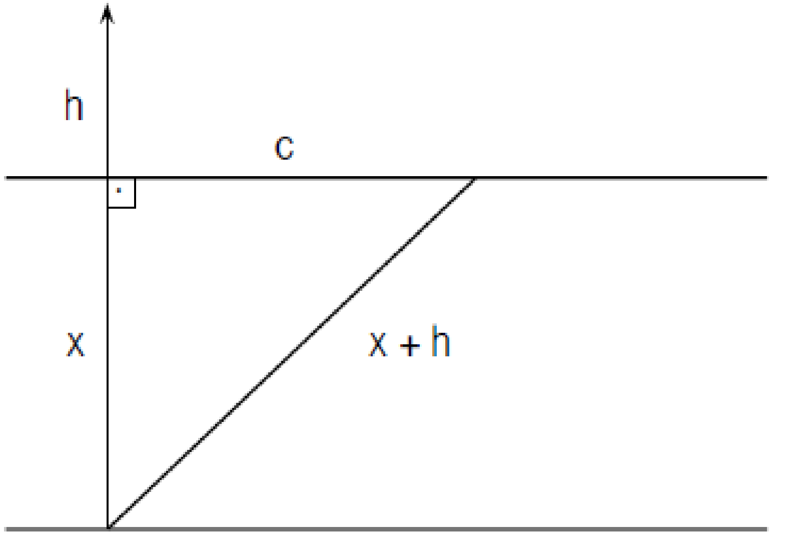
n=5 => **(5, 12, 13)**

n=7 => **(7, 24, 25)**

Πρόβλημα 2: Να βρεθούν όλες οι Πυθαγόρειες τριάδες.
Η λύση που έδωσαν οι Πυθαγόρειοι στο Πρόβλημα 2 είναι παράλληλη με τη λύση Βαβυλωνίων.

Το Πρόβλημα του καλαμιού των Βαβυλωνίων: (βλ. Α. και Ε. Ζαχαρίου [43]). Ένα καλάμι που έχει φυτρώσει στον πυθμένα ενός ποταμού προεξέχει απόσταση h πάνω από τη στάθμη του νερού. Αν το καλάμι υποστεί μία κλίση σε σχέση με την κατακόρυφό του, ώστε η κορυφή του να βρεθεί στο ίδιο επίπεδο με τη στάθμη του νερού, η απόσταση της κορυφής στη νέα αυτή θέση από την κατακόρυφο είναι c. Να βρεθεί το βάθος του ποταμού και το ύψος του καλαμιού.

Λύση:



Σχήμα α.

Από το σχήμα (α) έχουμε ότι

$$(x + h)^2 = x^2 + c^2,$$

επομένως το βάθος του ποταμού είναι

$$x = \frac{c^2 - h^2}{2h}.$$

Άρα το ύψος του καλαμιού είναι

$$x + h = \frac{c^2 + h^2}{2h}.$$

Επομένως οι πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου στο σχήμα (α) έχουν μήκος

$$x = \frac{c^2 - h^2}{2h}, \quad c = c \text{ και } x + h = \frac{c^2 + h^2}{2h}.$$

Πολλαπλασιάζοντας τις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου με 2h προκύπτει ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές που έχουν μήκος

$$x' = c^2 - h^2, \quad c' = 2hc \quad \text{και} \quad (x+h)' = c^2 + h^2.$$

Αν c, h είναι (θετικοί) ακέραιοι με $c > h$, τότε η τριάδα

$$(c^2 - h^2, 2hc, c^2 + h^2)$$

είναι Πυθαγόρεια. Αν t είναι αυθαίρετος θετικός ακέραιος, τότε και η τριάδα

$$((c^2 - h^2)t, 2hct, (c^2 + h^2)t)$$

είναι Πυθαγόρεια.

Θεώρημα: Όλες οι ακέραιες (θετικές) λύσεις της Δ.Ε.

$$x^2 + y^2 = z^2$$

δίνονται από τους εξής τύπους:

$$x = (c^2 - h^2)t, \quad y = 2hct \quad \text{και} \quad z = (c^2 + h^2)t,$$

όπου t, h, c είναι αυθαίρετοι (θετικοί) ακέραιοι με $c > h$, οι $(c, h) = 1$ και επιπλέον, ο ένας από τους c, h είναι περιττός και ο άλλος είναι άρτιος.

Εικασία Fermat (Τελευταίο θεώρημα του Fermat)

Έστω $\mathbf{n \geq 3}$ ακέραιος. Τότε η Διοφαντική εξίσωση

$\mathbf{x^n + y^n = z^n}$, με $\mathbf{xyz \neq 0}$

δεν έχει ακέραιες λύσεις.

Έχει λυθεί στις 24-6-1993 από τον Andrew Wiles και δημοσιεύτηκε στο Annals of Math. 141(1995) p.p 443-551

Έστω xoy ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο R^2 . Αν M τυχόν σημείο του R^2 με συντεταγμένες x, y τότε το σημείο M = (x,y) **λέγεται συνδεσμικό σημείο (lattice point),** αν x, y είναι ακέραιοι αριθμοί.

Αν P τυχόν πολύγωνο στο επίπεδο R^2 , τότε το P λέγεται **συνδεσμικό πολύγωνο**, αν όλες οι κορυφές του είναι **συνδεσμικά σημεία**.

Μια άλλη σύνδεση με την Γεωμετρία είναι η εξής:

Το 1899 ο **G. Pick** (βλ. [21]) απέδειξε το εξής: Έστω P συνδεσμικό πολύγωνο, i ο αριθμός των συνδεσμικών σημείων στο εσωτερικό του P, r ο αριθμός των συνδεσμικών σημείων επάνω στη περίμετρο του P και E το εμβαδό του P. Τότε ισχύει:

$$E = i - 1 + r/2.$$

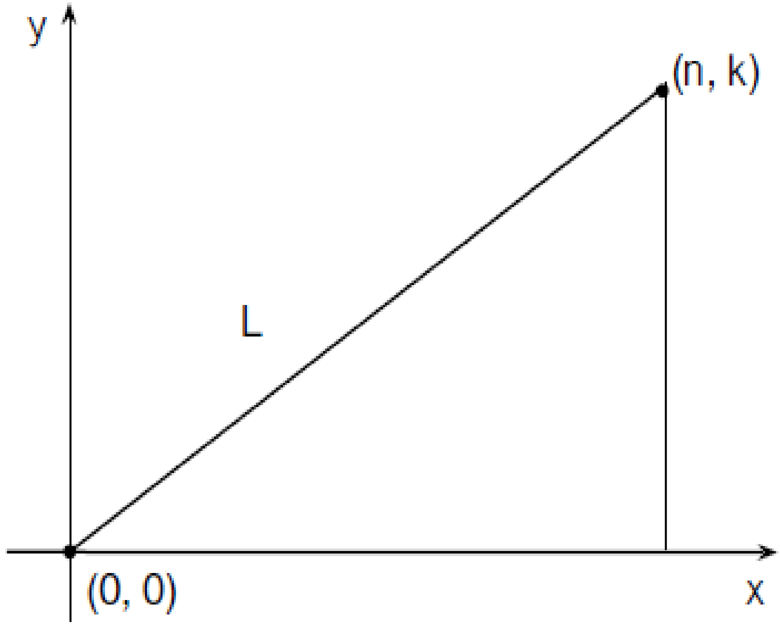
(βλέπε I. Niven, Lattice points and polygonal area, Amer. Math. Monthly 74(1967) pp 1195-1200.)

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Pick στο τρίγωνο με κορυφές τα σημεία (0, 0), (n, 0) και (n, k) καταλήγουμε:

Πρόταση 1: Έστω T ορθογώνιο τρίγωνο με κορυφές τα σημεία (0, 0), (n, 0),(n, k), όπου n, k είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί και i o αριθμός των συνδεσμικών σημείων στο εσωτερικό του T. Να δειχτεί ότι :

$$\mathbf{kn = 2i - 2 + d + n + k}$$

όπου **d = (n, k)**



Σχήμα 1.

Απόδειξη: Έστω L το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία (0, 0) και (n, k) (βλ. Σχ. 1). Η εξίσωση της αντίστοιχης ευθείας είναι:

$$y = \frac{k}{n} x,$$

δηλαδή

$$kx-ny = 0 \qquad\qquad (*)$$

Έστω $d=(k,n)$ και $d|0$, τότε η (*) έχει ακέραιες λύσεις και δίνονται ως εξής:

$$x=x_0- (n/d)t$$

$$y=y_0- (k/d)t$$

$t=0,\pm1, \pm2,..$ και (x_0, y_0) μια ακέραια λύση της.

Επομένως οι μη αρνητικές ακέραιες λύσεις της (*) δίνονται από τους εξής περιορισμούς

$$0\leq x \leq n \text{ και } 0 \leq y \leq k$$

δηλαδή

$$0\leq -(n/d)t \leq n \text{ και } 0 \leq -(k/d)t \leq k$$

Συνεπώς $0 \leq -t \leq d$

Άρα ο $-t$ λαμβάνει $d+1$ τιμές τις εξής $-t = 0,1,\ldots,d$

Επομένως το (L) έχει συνολικά $d+1$ συνδεσμικά σημεία.

Έστω **r** ο αριθμός των συνδεσμικών σημείων επάνω στην περίμετρο του T. Τότε θα είναι **r = n + k -1 +d +1 = n +k +d**

Επομένως

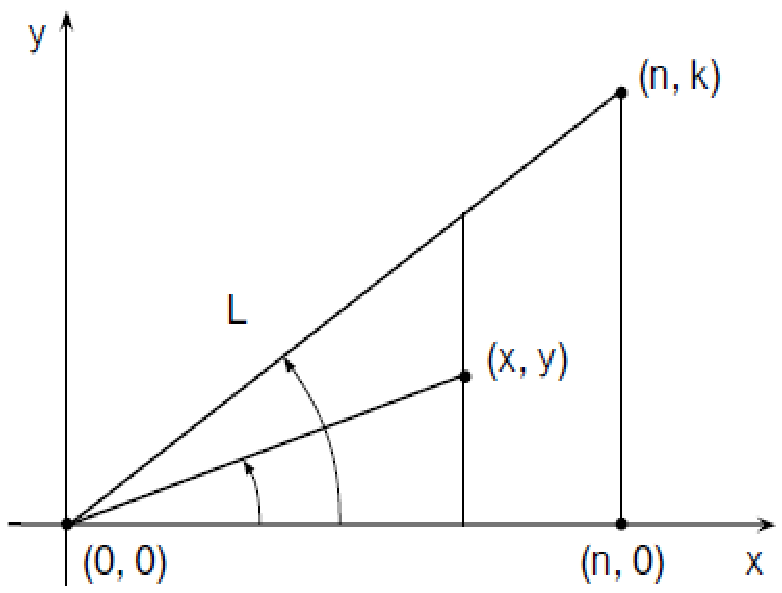
E = 1/2 kn και **E = i – 1 + r/2 = i -1 + (n + k + d) / 2**

Άρα **kn = 2i -2 + n + k +d**

Πρόταση 2: Έστω Τ ορθογώνιο τρίγωνο με κορυφές τα σημεία (0, 0), (n, 0),(n, k), όπου n, k είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί και i ο αριθμός των συνδεσμικών σημείων στο εσωτερικό του Τ. Να δειχτεί ότι :

$$i = \sum_{1 \leq x \leq n-1} \left[\frac{kx}{n} \right] - d + 1,$$

όπου d είναι ο μ.κ.δ. των k, n και [ ] η συνάρτηση ακεραίου μέρους.



Σχήμα 2.

Απόδειξη: Έστω L το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία (0, 0) και (n, k) (βλ. Σχ. 2). Η εξίσωση της αντίστοιχης ευθείας είναι:

$$y = \frac{k}{n} x.$$

Έστω (x, y) τυχόν σημείο του επιπέδου $\mathbb{R}^2$. Το (x, y) είναι εσωτερικό σημείο του T τότε και μόνο τότε, αν

$$0 < x < n, \ 0 < y < k \ \text{ και } \ \frac{y}{x} < \frac{k}{n}.$$

Ισοδύναμα το (x, y) είναι εσωτερικό σημείο του T τότε και μόνο τότε, αν

$$0 < x < n \ \text{ και } \ 0 < y < \frac{k}{n} x.$$

Επομένως ο αριθμός των συνδεσμικών σημείων στο εσωτερικό του T είναι:

$$\sum_{1 \leq x \leq n-1} \left[\frac{kx}{n} \right], \qquad \text{ενώ } n \nmid kx.$$

Πράγματι, αν $n \mid kx$, τότε $kx = ny$ για κάποιο θετικό ακέραιο y, οπότε το σημείο (x, y) θα βρίσκεται επάνω στο L. Από την άσκηση 14 το L έχει συνολικά $d + 1$ συνδεσμικά σημεία. Συνεπώς πρέπει να αφαιρεθούν $d + 1 - 2 = d - 1$ συνδεσμικά σημεία από το άθροισμα

$$\sum_{1 \leq x \leq n-1} \left[\frac{kx}{n} \right],$$

για να προκύψει ο αριθμός των συνδεσμικών σημείων i στο εσωτερικό του T. Άρα

$$i = \sum_{1 \leq x \leq n-1} \left[\frac{kx}{n} \right] - d + 1.$$

Από τις Προτάσεις 1 και 2 προκύπτει το εξής:

Θεώρημα 3: Έστω **n>1, k** θετικοί ακέραιοι με **d = (n, k).** Τότε ισχύει:

$$d = (n, k) = 2 \sum_{1 \leqslant j \leqslant n-1} [kj/n] - kn + k + n$$

Θεώρημα 4 (Κριτήριο για πρώτους αριθμούς) : Έστω n φυσικός αριθμός με $n > 3$. Τότε τα εξής είναι ισοδύναμα:

i) Ο n είναι πρώτος αριθμός.

ii) Για κάθε πρώτο αριθμό p, με $p \leqslant [\sqrt{n}]$ ισχύει $p \nmid n$, δηλαδή $(p, n) = 1$.

Μια άλλη σύνδεση με την γεωμετρία είναι η εξής:

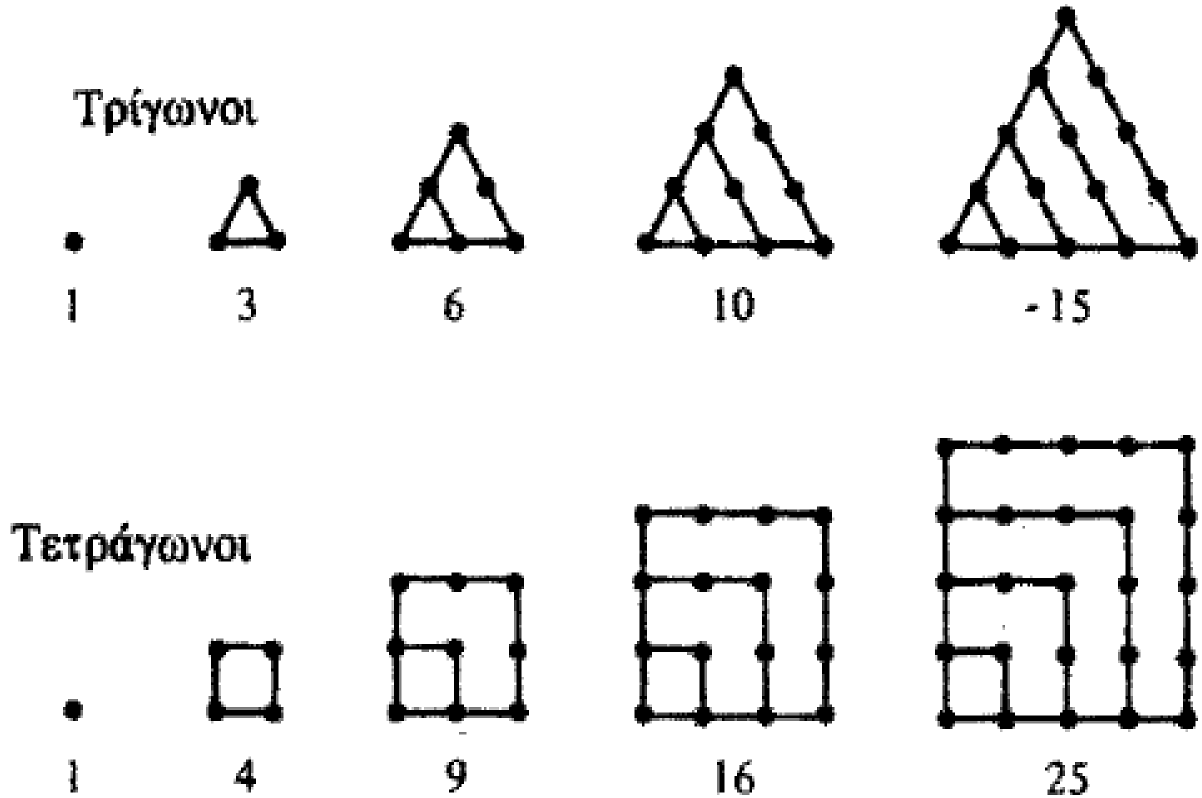
Οι Πυθαγόρειοι εισήγαγαν ακόμη την ιδέα των πολυγώνων αριθμών (τρίγωνοι, τετράγωνοι, πεντάγωνοι αριθμοί, κ.λπ.). Πολύγωνοι αριθμοί είναι τα μερικά αθροίσματα όρων αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο πάντα τη μονάδα. Οι όροι της προόδου ανήκουν στο σύνολο των φυσικών αριθμών. Στα διάφορα είδη των πολυγώνων αριθμών διαφέρει ο λόγος της προόδου. Έτσι προκύπτουν οι εξής αριθμοί:

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = n\,(n + 1)/2$ (Τρίγωνοι αριθμοί, λόγος 1)

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ (Τετράγωνοι αριθμοί, λόγος 2)

$1 + 4 + 7 + \ldots + (3n-2) = n(3n-1)/2$ (Πεντάγωνοι αριθμοί, λόγος 3)

και λοιπά.



Κάθε αριθμός της μορφής **T (n) = n (n+1) / 2**, όπου n φυσικός αριθμός, λέγεται **τρίγωνος αριθμός**, ενώ ο αναγωγικός τύπος τους είναι **T (n) = T (n-1)+n** για κάθε **n >1**

Πρόβλημα: Πότε ο αριθμός $x^2+(x+1)^2$ είναι σύνθετος;

$x=1$ $1^2+2^2=5$

$x=2$ $2^2+3^2=13$

$x=3$ $3^2+4^2=25$ σύνθετος

$x=4$ $4^2+5^2=41$

$x=5$ $5^2+6^2=61$

$x=6$ $6^2+7^2=85$ σύνθετος

Τη λύση του προβλήματος την έδωσε

Το 1962 ο **W. Sierpinski** [30] απέδειξε το εξής: Έστω x φυσικός αριθμός. Ο αριθμός $x^2 + (x+1)^2$ είναι σύνθετος τότε και μόνο τότε, αν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί y, z με την ιδιότητα:

$$T(x) = T(y) + T(z).$$

Υπάρχουν άπειροι σύνθετοι αριθμοί της μορφής $x^2 + (x+1)^2$.

Πράγματι αν θέσουμε όπου n = T(n) στον αναγωγικό τύπο για τρίγωνους αριθμούς προκύπτει:

T(T(n)) = T (T(n)-1)+ T(n) για κάθε n > 1

Εικασία (Sierpinski): Υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί της μορφής $x^2 + (x+1)^2$.

Πρόβλημα 7.2: Να προσδιορισθούν όλοι οι τρίγωνοι αριθμοί, κάθε ένας από τους οποίους είναι άθροισμα δύο τριγώνων αριθμών. Συγκεκριμένα ζητείται να προσδιορισθούν όλοι οι φυσικοί αριθμοί x, για τους οποίους υπάρχουν φυσικοί αριθμοί y, z με την ιδιότητα

$$T(x) = T(y) + T(z).$$

Ακριβέστερα ζητούνται όλοι οι ακέραιοι αριθμοί x, y, z, οι οποίοι πληρούν την Διοφαντική εξίσωση

$$x\,(x + 1) = y\,(y + 1) + z\,(z + 1) \;\text{ με } y \neq 0, -1 \text{ και } z \neq 0, -1. \quad \text{(E)}$$

Σημείωση: Η Διοφαντική εξίσωση

$$x\,(x + 1) = y\,(y + 1) + z\,(z + 1)$$

έχει άπειρες ακέραιες θετικές λύσεις ως ισοδύναμη προς την εξίσωση

$$T(x) = T(y) + T(z).$$