ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
18/09/2017

ΘΕΜΑ 1. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A,B,A_i \subseteq X$, $i \in I$. Να ελέγξετε ποιοι από τους παρακάτω εγκλεισμούς ισχύουν (για κάθε έναν, δώστε απόδειξη, ή αντιπαράδειγμα):

(α) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ και $\overline{A \cap B} \supseteq \overline{A} \cap \overline{B}$,

(β) $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ και $\overline{A \cup B} \supseteq \overline{A} \cup \overline{B}$,

(γ) $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \subseteq \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$ και $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \supseteq \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$, όπου I απειροσύνολο,

(δ) $X \setminus A^{o} \subseteq \overline{X \setminus A}$ και $X \setminus A^{o} \supseteq \overline{X \setminus A}$.

ΘΕΜΑ 2. Έστω (X,ρ), (Y,σ) μετρικοί χώροι, $f\colon X \to Y$ συνεχής απεικόνιση και d μετρική γινόμενο στον $X \times Y$. Να δείξετε ότι:

(α) Η απεικόνιση $g\colon (X\times Y, d) \to \mathbb{R}$ με $g(x,y) = \sigma(f(x),y)$ είναι συνεχής.

(β) Το σύνολο $A = \{(x,y) \in X \times Y \colon f(x) \in B_\sigma(y,1)\}$ είναι ανοιχτό, όπου $B_\sigma(y,1)$ είναι η ανοιχτή μπάλλα με κέντρο y και ακτίνα 1 στον (Y,σ).

(γ) Αν για κάθε δύο ακολουθίες (x_n) και (x'_n) στον (X,ρ) με $\rho(x_n,x'_n) \to 0$ ισχύει $\sigma(f(x_n), f(x'_n)) \to 0$, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

ΘΕΜΑ 3. Στο σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών θεωρούμε την μετρική

$$\rho(m,n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|.$$

(α) Εξετάστε αν ο $(\mathbb{N},\rho)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.

(β) Εξετάστε αν ο ακόλουθος ισχυρισμός είναι σωστός: κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στον $(\mathbb{N},\rho)$ είναι τελικά σταθερή.

(γ) Εξετάστε αν η ταυτοτική $\mathrm{id}\colon (\mathbb{N},d) \to (\mathbb{N},\rho)$, όπου $d(n,m) = |n-m|$ η συνήθης μετρική, είναι ομοιομορφισμός. (Εξ' ορισμού, $\mathrm{id}(n) = n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.)

ΘΕΜΑ 4. Εστω d_1, d_2 ισοδύναμες μετρικές σ' ένα σύνολο X. Εξετάστε αν αληθεύει κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις (για κάθε μία, δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα):

(α) Αν το A είναι συμπαγές στον (X,d_1), τότε είναι συμπαγές και στον (X,d_2).

(β) Αν το A είναι φραγμένο στον (X,d_1), τότε είναι φραγμένο και στον (X,d_2).

(γ) Αν το A είναι ανοιχτό στον (X,d_1), τότε είναι ανοιχτό και στον (X,d_2).

(δ) Αν το A είναι πυκνό στον (X,d_1), τότε είναι πυκνό και στον (X,d_2).

ΘΕΜΑ 5. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος.

(α) Αν $x,y \in X$ με $x \neq y$, δείξτε ότι υπάρχουν ανοικτά σύνολα U,V, με $x \in U$, $y \in V$ και $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.

(β) Αν $x \in X$ και $F \subseteq X$ κλειστό με $x \notin F$, δείξτε ότι υπάρχουν ανοιχτά U,V με $x \in U$, $F \subseteq V$ και $U \cap V = \emptyset$. Μπορούμε να πετύχουμε να ισχύει επί πλέον $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$;

ΘΕΜΑ 6. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεν $f_n(x) = e^{-x^2/n^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

(α) Εξετάστε την (f_n) ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση.

(β) Εξετάστε την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - e^{-x^2/n^2})$ ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση.

Καλή Επιτυχία!

Κάθε θέμα ανιστοιχεί σε δύο μονάδες.