Πραγματική Ανάλυση (2016–17)

Ενδιάμεση Εξέταση – 03 Δεκεμβρίου 2016

1. (α) Εξετάστε αν η επόμενη πρόταση είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε την απάντησή σας).
Έστω $X \neq \varnothing$ σύνολο και $d, \rho \colon X \times X \to [0, +\infty)$ δύο ισοδύναμες μετρικές στον X. Ένα $x \in X$ είναι σημείο συσσώρευσης του μετρικού χώρου (X, d) αν και μόνο αν είναι σημείο συσσώρευσης του μετρικού χώρου (X, ρ).

(β) Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε την απάντησή σας).

(i) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και $\mathbb{Q} \subseteq A$, τότε $A' = \mathbb{R}$. (A' το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του A.)

(ii) Αν $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ και το x είναι μεμονωμένο σημείο του A, τότε το x είναι μεμονωμένο σημείο του B.

(2 μον.)

2. (α) Έστω (X, d) και (Y, ρ) μετρικοί χώροι και $f \colon X \to Y$ συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής αν και μόνο αν $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ για κάθε $A \subseteq X$.

(β) Αν η $f \colon X \to Y$ είναι συνεχής, ισχύει πάντα η ισότητα $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

(3 μον.)

3. (α) Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $G_1, \ldots, G_n$ ανοικτά υποσύνολα του X. Δείξτε ότι το $G = G_1 \cap \cdots \cap G_n$ είναι ανοικτό.

(β) Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω G ανοικτό υποσύνολο του X. Αν $A \subseteq X$ δείξτε ότι $G \cap A \neq \emptyset$ αν και μόνο αν $G \cap \overline{A} \neq \emptyset$.

(2 μον.)

4. (α) Έστω (X, d) και (Y, ρ) μετρικοί χώροι και $f \colon X \to Y$. Το γράφημα της f είναι το σύνολο

$$\Gamma(f) := \{(x, f(x)) \colon x \in X\} \subseteq X \times Y.$$

Δείξτε ότι, αν η f είναι συνεχής συνάρτηση, τότε το γράφημα $\Gamma(f)$ της f είναι κλειστό στον $X \times Y$ ως προς οποιαδήποτε μετρική γινόμενο στον $X \times Y$.

(β) Έστω $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι, αν η f είναι φραγμένη και έχει κλειστό γράφημα, τότε είναι συνεχής.

(2.5 μον.)

5. (α) Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι το G είναι ανοικτό υποσύνολο του X αν και μόνο αν $G \cap \overline{A} \subseteq \overline{G \cap A}$ για κάθε $A \subseteq X$.

(β) Έστω (X, d) μετρικός χώρος.

(i) Δείξτε ότι, αν το G είναι ανοικτό υποσύνολο του X και το D είναι πυκνό υποσύνολο του X, τότε $\overline{G} = \overline{G \cap D}$.

(ii) Αν το G είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του X και το D είναι πυκνό υποσύνολο του X, τότε το $G \cap D$ είναι πυκνό υποσύνολο του X.

(2.5 μον.)

Καλή επιτυχία!