Μετρικοί χώροι

Ορισμός και παραδείγματα

Μετρική = Απόσταση

Ορισμός

Έστω X ένα μη κενό σύνολο. *Μετρική* στο X λέγεται κάθε συνάρτηση

$$\rho : X \times X \to \mathbb{R}$$

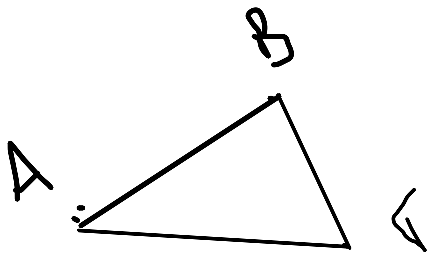
με τις παρακάτω ιδιότητες:

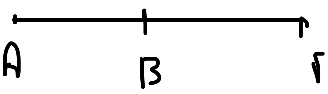
(i) $\rho(x,y) \geqslant 0$ για κάθε $x,y \in X$ **και** $\rho(x,y) = 0$ αν και μόνον αν $x = y$
(**η ρ είναι μη αρνητική**)

(ii) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ για κάθε $x,y \in X$ (**συμμετρική ιδιότητα**)

(iii) $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z)$ για κάθε $x,y,z \in X$ (**τριγωνική ανισότητα**).

Αν ρ είναι μια μετρική στο X τότε το ζεύγος (X,ρ) λέγεται *μετρικός χώρος*. Τα στοιχεία του X θα λέγονται και *σημεία*.





Παραδείγματα

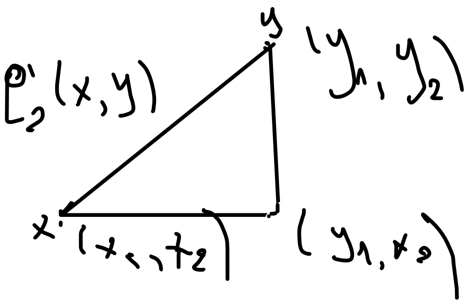
(1) Η *συνήθης μετρική* στο $\mathbb{R}$ είναι η

$$d(x,y) = |x-y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

(2) Η *Ευκλείδεια μετρική* στον $\mathbb{R}^m$, τον χώρο των διατεταγμένων m-άδων $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ πραγματικών αριθμών, ορίζεται ως εξής: αν $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ και $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, τότε

$$\rho_2(\vec{x}, \vec{y}) = \left(\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}.$$

Πρέπει φυσικά να ελεγχθεί και αλγεβρικά η τριγωνική ανισότητα. Θα το κάνουμε σύντομα.



(3) Κάθε μη κενό σύνολο X μπορεί να γίνει μετρικός χώρος κατά «τετριμμένο τρόπο»: Θεωρούμε τη συνάρτηση $\delta : X \times X \to \mathbb{R}$ με

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

ως μετρική (ελέγξτε ότι ικανοποιεί τις (i), (ii) και (iii) του ορισμού). Αυτή η μετρική λέγεται *διακριτή μετρική στο X*.
Οι χώροι με τη διακριτή μετρική εμφανίζονται συχνά ως αντιπαραδείγματα.

(**4**) Στο ίδιο σύνολο X μπορούμε να ορίσουμε πολλές διαφορετικές μετρικές: Αν έχουμε μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ η οποία είναι 1-1, τότε αυτή επάγει μια μετρική d_f στο X ως εξής:

$$d_f(x, y) = |f(x) - f(y)|, \quad x, y \in X.$$

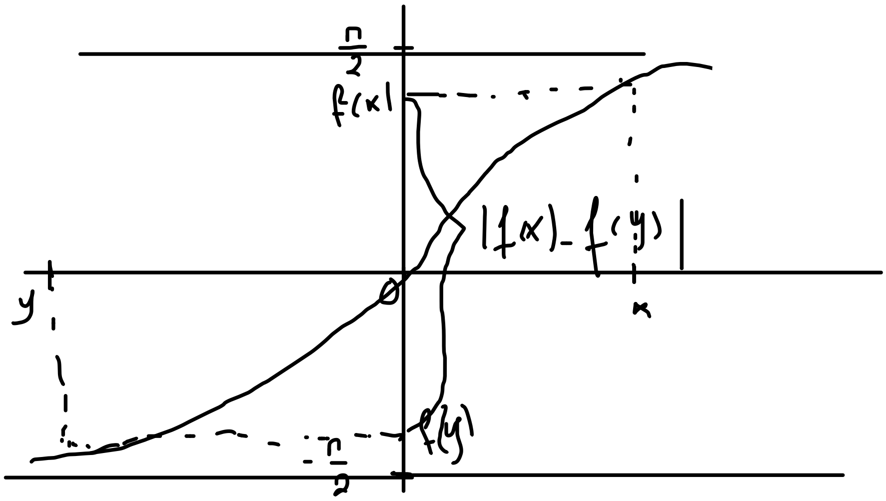
Εύκολα ελέγχεται ότι η d_f είναι μετρική στο X. Για παράδειγμα, η τριγωνική ανισότητα αποδεικνύεται ως εξής:

$$d_f(x, z) = |f(x) - f(z)| \leq |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)| = d_f(x, y) + d_f(y, z),$$

δηλαδή προκύπτει μέσω της τριγωνικής ανισότητας για την απόλυτη τιμή.

Παράδειγμα: Στο σύνολο $\mathbb{R}$ παίρνουμε μια νέα μετρική μέσω της συνάρησης $f : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ με $f(x) = \arctan(x)$, η οποία είναι 1-1. Έχουμε, για $x, y \in \mathbb{R}$,

$$d_f(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$$



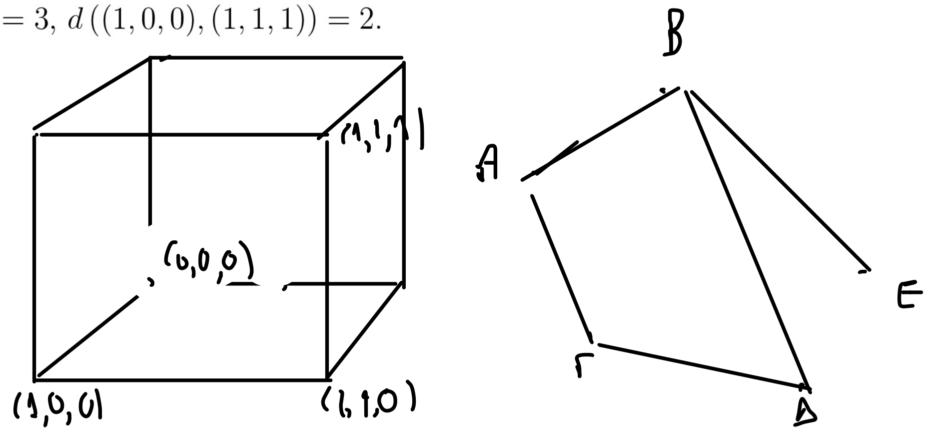
(**5**) Ο n-διάστατος κύβος του Hamming. Θεωρούμε το σύνολο

$$H_n = \{0, 1\}^n = \big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \bigm| x_i = 0 \text{ ή } 1,\ i = 1, \ldots, n\big\}.$$

Θεωρούμε την $d : H_n \times H_n \to \mathbb{R}$, όπου $d(x, y)$ είναι το πλήθος των θέσεων στις οποίες διαφέρουν οι n-άδες $x = (x_1, \ldots, x_n)$ και $y = (y_1, \ldots, y_n)$, δηλαδή

$$d(x, y) = \mathrm{card}\big(\{1 \leqslant i \leqslant n : x_i \neq y_i\}\big).$$

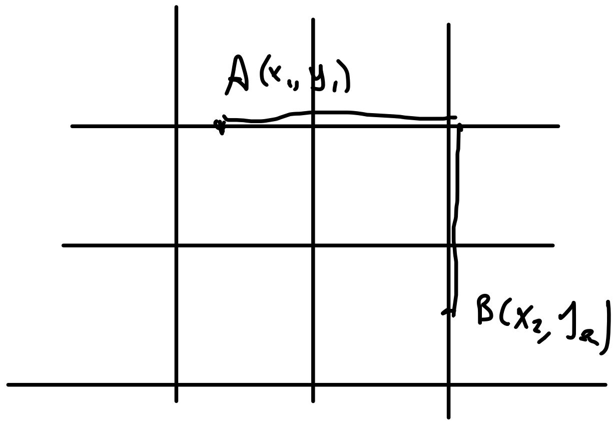
Παράδειγμα: Για $n = 3$, $d\left((1, 0, 0), (1, 1, 1)\right) = 2$.



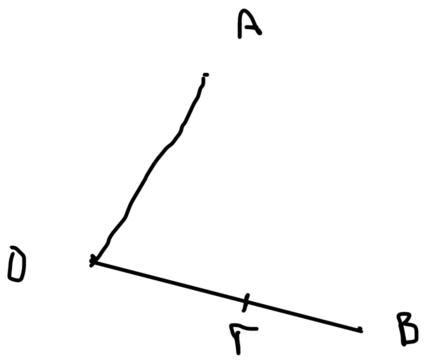
(**6**) Δύο ακόμη διαφορετικές μετρικές στο $\mathbb{R}^2$.

A. Η μετρική του Manhattan

$$d\Big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\Big) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$



B. Η μετρική του Βρετανικού σιδηροδρόμου



Σχετική μετρική

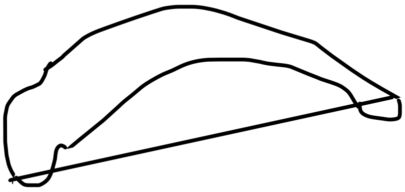
Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος. Αν A είναι οποιοδήποτε μη κενό υποσύνολο του X, η απεικόνιση $\rho_A : A \times A \to \mathbb{R}$ με

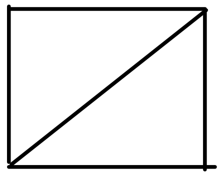
$$\rho_A(x, y) = \rho(x, y), \qquad x, y \in A$$

(ο περιορισμός δηλαδή της ρ στο $A \times A$) είναι μετρική στο σύνολο A. Η μετρική ρ_A είναι η *σχετική μετρική* που επάγεται από την ρ στο A.

Ο μετρικός χώρος (A, ρ_A) λέγεται *υπόχωρος* του μετρικού χώρου (X, ρ).

Για παράδειγμα, κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με τον περιορισμό της συνήθους μετρικής σε αυτό, είναι ένας (μετρικός) υπόχωρος του $\mathbb{R}$.





Διάμετρος συνόλου

(α) Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος. Ο (X, ρ) λέγεται *φραγμένος* αν υπάρχει $C > 0$ ώστε για κάθε $x, y \in X$ να ισχύει $\rho(x, y) \leqslant C$. Ισοδύναμα, αν

$$\sup\{\rho(x, y) : x, y \in X\} < \infty.$$

Αν αυτό συμβαίνει, τότε η *διάμετρος* του (X, ρ) είναι ο αριθμός

$$\operatorname{diam}(X) := \sup\{\rho(x, y) : x, y \in X\}.$$

(β) Ένα μη κενό υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου (X, ρ) λέγεται φραγμένο, αν

$$\sup\{\rho(x, y) : x, y \in A\} < \infty.$$

Αν αυτό συμβαίνει, τότε η *διάμετρος* του A είναι ο αριθμός

$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{\rho(x, y) : x, y \in A\}.$$

Συμφωνούμε ότι το κενό σύνολο (ως υποσύνολο οποιουδήποτε μετρικού χώρου) έχει μηδενική διάμετρο.

Παραδείγματα

(α) Το $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική $d(x,y)=|x-y|$ δεν είναι φραγμένος μετρικός χώρος.

Κάθε φραγμένο (με την κλασική έννοια) υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ είναι φραγμένο και ως υποσύνολο του μετρικού χώρου $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική και ισχύει

$$\operatorname{diam}(A)=\sup A-\inf A.$$

(β) Το $\mathbb{R}$ με τη μετρική που επάγει η $\arctan:\mathbb{R}\to(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, δηλαδή

$$\rho(x,y)=|\arctan x-\arctan y|,\quad x,y\in\mathbb{R}$$

είναι φραγμένος μετρικός χώρος και μάλιστα $\operatorname{diam}(\mathbb{R},\rho)=\pi$.

Είναι $|\arctan t|<\frac{\pi}{2}$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$, άρα, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ είναι

$$\rho(x,y)=|\arctan x-\arctan y|\leq|\arctan x|+|\arctan y|<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

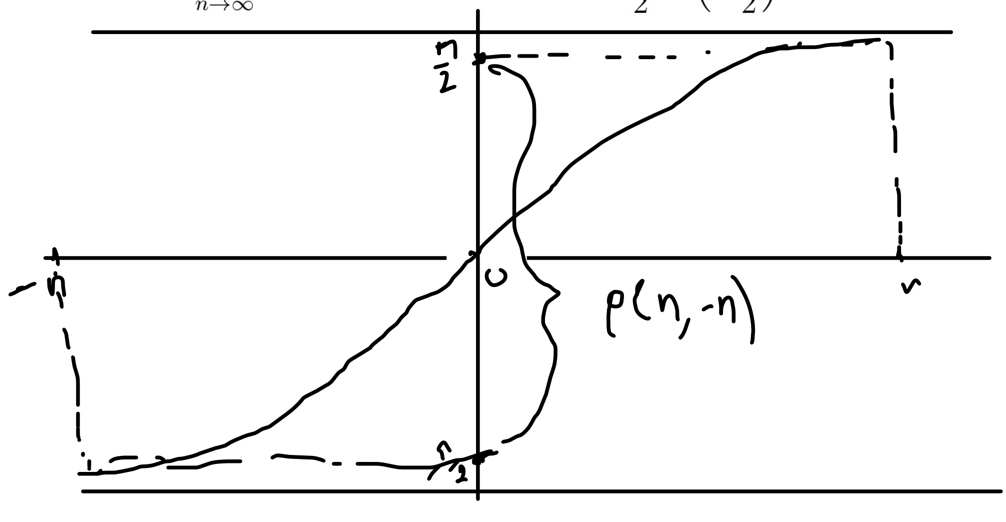
Άρα $\operatorname{diam}(\mathbb{R},\rho)\leq\pi$

Για την ανισότητα $\operatorname{diam}(\mathbb{R},\rho)\geqslant\pi$ παρατηρούμε ότι

$$\operatorname{diam}(\mathbb{R},\rho)\geqslant|\arctan n-\arctan(-n)|$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$, άρα

$$\operatorname{diam}(\mathbb{R},\rho)\geqslant\lim_{n\to\infty}|\arctan n-\arctan(-n)|=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi.$$



(γ) Το $\mathbb{R}$ με τη μετρική

$$\sigma(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}, \quad x,y \in \mathbb{R}$$

είναι επίσης φραγμένος μετρικός χώρος, αφού $\sigma(x,y) < 1$ για κάθε $x,y \in \mathbb{R}$.

Άσκηση: Δείξτε ότι $\mathrm{diam}\,(\mathbb{R},\sigma) = 1$.

(δ) Αν δ είναι η διακριτή μετρική σε ένα σύνολο X, τότε ο μετρικός χώρος (X,δ) είναι φραγμένος (και, αν έχει περισσότερα από ένα σημεία, η διάμετρός του είναι ίση με 1).

Μια σημαντική κατηγορία μετρικών χώρων: Χώροι με νόρμα

Πολλοί από τους κλασικούς μετρικούς χώρους που θα συναντήσουμε σε αυτό το μάθημα είναι ταυτόχρονα γραμμικοί χώροι. Επιπλέον, η μετρική τους συνδέεται φυσιολογικά με τη γραμμική τους δομή. Όπως λέμε, «επάγεται από μια νόρμα».

Ορισμός

Έστω X ένας πραγματικός γραμμικός χώρος. *Νόρμα* στον X είναι κάθε συνάρτηση

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$$

με τις εξής ιδιότητες:

(α) $\|x\| \geqslant 0$ για κάθε $x \in X$ και $\|x\| = 0$ αν και μόνον αν $x = \vec{0}$ (**μη αρνητική**).

(β) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $x \in X$ (**θετικά ομογενής**).

(γ) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ για κάθε $x, y \in X$ (**τριγωνική ανισότητα**).

Αν $\|\cdot\|$ είναι μια νόρμα στον X, τότε το ζεύγος $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται *χώρος με νόρμα*.

Παρατηρήσεις

(α) Αν $\|\cdot\|$ είναι μια νόρμα στον X, τότε η συνάρτηση $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με

$$d(x, y) = \|x - y\|, \qquad x, y \in X$$

είναι μετρική (η μετρική που επάγεται στον X από τη νόρμα). Πράγματι,

- $d(x, y) = \|x - y\| \geqslant 0$ για κάθε $x, y \in X$ και ισχύει $d(x, y) = \|x - y\| = 0$ αν και μόνο αν $x - y = \vec{0}$ δηλαδή αν και μόνο αν $x = y$.
- $d(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |-1| \cdot \|x - y\| = \|x - y\|$ για κάθε $x, y \in X$.
- Αν $x, y, z \in X$ τότε

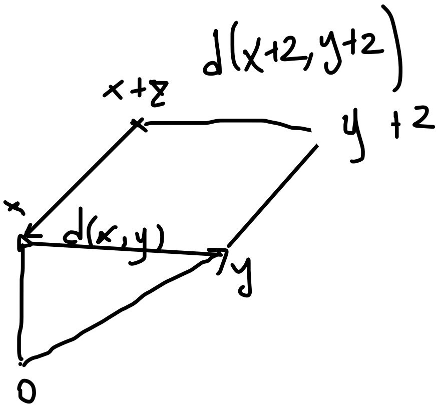
$$d(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leqslant \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z).$$

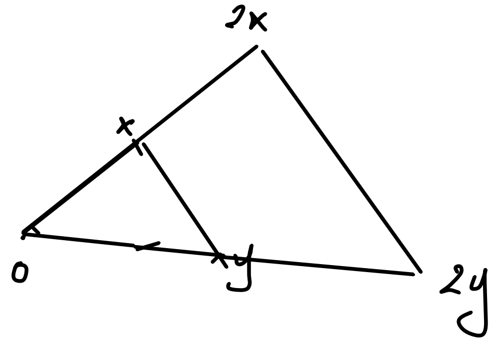
Με αυτή την έννοια, η νόρμα ενός στοιχείου x είναι η απόστασή του από το $\vec{0}$.

Επιπλέον, η d είναι συμβατή με τη γραμμική δομή του χώρου:

- Η d είναι **αναλλοίωτη ως προς μεταφορές**, δηλαδή $d(x+z, y+z) = d(x,y)$ για κάθε $x, y, z \in X$.

- Η d είναι **θετικά ομογενής**, δηλαδή $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$ για κάθε $x, y \in X$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.





Παρατηρήστε ότι οι τελευταίες δύο ιδιότητες δεν έχουν νόημα σε όλους τους μετρικούς χώρους, αφού στην διατύπωσή τους εμπλέκονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού. Με άλλα λόγια, μια μετρική που επάγεται σε έναν γραμμικό χώρο από μια νόρμα έχει πρόσθετες ιδιότητες και ο μετρικός χώρος που προκύπτει έχει πολύ πιο πλούσια δομή από αυτήν του «γενικού» μετρικού χώρου.

(β) Πρέπει να τονίσουμε ότι η κλάση των χώρων με νόρμα είναι γνήσια υποκλάση της κλάσης των μετρικών χώρων. Παρατηρήστε ότι κάθε γραμμικός χώρος $X \neq \{0\}$ έχει άπειρα το πλήθος σημεία: αν $x \in X$, $x \neq 0$, τότε ο υπόχωρος $\mathrm{span}(\{x\}) = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{R}\}$ του X έχει άπειρα το πλήθος σημεία (για την ακρίβεια, είναι ισοπληθικός με το $\mathbb{R}$). Από την άλλη πλευρά, κάθε πεπερασμένο μη κενό σύνολο γίνεται μετρικός χώρος με τη διακριτή μετρική.

Παρατηρήστε επίσης ότι σε κάθε (μη μηδενικό) γραμμικό χώρο X μπορούμε να ορίσουμε μετρική η οποία δεν επάγεται από νόρμα. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε στον X τη διακριτή μετρική δ, τότε δεν υπάρχει νόρμα $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ ώστε $\delta(x,y) = \|x-y\|$. Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού είναι απλή: αν υπήρχε τέτοια νόρμα, παίρνοντας $x \in X$, $x \neq 0$, θα είχαμε

$$n\|x\| = \|nx\| = \delta(nx, 0) = 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ή ισοδύναμα $\|x\| = 1/n$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$, που είναι προφανώς άτοπο.

Βασικά παραδείγματα χώρων με νόρμα

Α. Χώροι πεπερασμένης διάστασης

1. Στον $\mathbb{R}^m$ ορίζουμε την supremum νόρμα $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ με τον ακόλουθο τρόπο: για κάθε $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ θέτουμε

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_i| : i = 1, \ldots, m\}.$$

Αποδεικνύουμε μόνο την τριγωνική ανισότητα. Έχουμε

A(x,y)

$$\|x+y\|_\infty = |x_{i_0} + y_{i_0}|$$

για κάποιον $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$. Για το συγκεκριμένο i_0,

B(x',y')

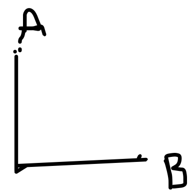
$$|x_{i_0} + y_{i_0}| \leqslant |x_{i_0}| + |y_{i_0}| \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Συνεπώς,

$d_\infty(A,B) = \max\{|x-x'|, |y-y'|\}$

$$\|x+y\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Ο χώρος $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_\infty)$ συμβολίζεται με ℓ_∞^m.



2. Στον $\mathbb{R}^m$ ορίζουμε την 1-νόρμα $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ με

$$\|x\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_m| = \sum_{i=1}^m |x_i|.$$

Η τριγωνική ανισότητα είναι άμεση συνέπεια της τριγωνικής ανισότητας για την απόλυτη τιμή στο $\mathbb{R}$. Ο χώρος $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_1)$ συμβολίζεται με ℓ_1^m.

3. Στον $\mathbb{R}^m$ ορίζουμε την Ευκλείδεια νόρμα $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ με

$$\|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^2\right)^{1/2}.$$

Όλες οι ιδιότητες της νόρμας είναι τετριμμένες εκτός από την τριγωνική ανισότητα για την απόδειξη της οποίας απαιτείται η ανισότητα Cauchy–Schwarz.

Πρόταση (Ανισότητα Cauchy–Schwarz)

Έστω $x_1, \ldots, x_m$ και $y_1, \ldots, y_m$ πραγματικοί αριθμοί. Τότε, ισχύει η ανισότητα

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i y_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη που δίνουμε οφείλεται στον Schwarz.
Θέτουμε $B = \sum_{i=1}^{m} |x_i y_i|$, $A = \sum_{i=1}^{m} |x_i|^2$ και $C = \sum_{i=1}^{m} |y_i|^2$.
Πρέπει να δείξουμε ότι $B^2 \leqslant AC$ ή ισοδύναμα $(2B)^2 \leqslant 4AC$.

Αν $A = 0$ τότε $x_i = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$ και προφανώς η αρχική ανισότητα ισχύει (ως ισότητα). Υποθέτουμε λοιπόν ότι $A > 0$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$p(t) := At^2 + 2Bt + C$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$ (τριώνυμο). Είναι

$$p(t) = t^2 \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2 \right) + 2t \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i y_i| \right) + \sum_{i=1}^{m} |y_i|^2$$

και μετά από πράξεις η $p(t)$ παίρνει τη μορφή

$$p(t) = (t|x_1| + |y_1|)^2 + \cdots + (t|x_m| + |y_m|)^2,$$

οπότε $p(t) \geq 0$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$.
Επομένως η $p(t)$ είναι ένα τριώνυμο το οποίο είναι μη αρνητικό για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Από τη θεωρία του τριωνύμου πρέπει να ισχύει $(2B)^2 - 4AC \leqslant 0$, το οποίο δίνει και τη ζητούμενη ανισότητα.$\square$

Η τριγωνική ανισότητα για την Ευκλείδεια νόρμα

Έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{m} |x_i|^2 + 2\sum_{i=1}^{m} x_i y_i + \sum_{i=1}^{m} |y_i|^2 \\
&\leqslant \|x\|_2^2 + 2\sum_{i=1}^{m} |x_i y_i| + \|y\|_2^2 \\
&\leqslant \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2 \|y\|_2 + \|y\|_2^2
\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Cauchy–Schwarz. Έτσι,

$$\|x+y\|_2^2 \leqslant (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 \Longrightarrow \|x+y\|_2 \leqslant \|x\|_2 + \|y\|_2.$$

Ο χώρος $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_2)$ λέγεται **Ευκλείδειος χώρος** και συμβολίζεται με ℓ_2^m.

4. Γενικότερα, στον $\mathbb{R}^m$ μπορούμε να θεωρήσουμε την p-**νόρμα**, $1 < p < \infty$, όπου

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

Αποδεικνύουμε και σε αυτή την περίπτωση μόνο την τριγωνική ανισότητα η οποία δεν είναι άμεση. Για την απόδειξη θα χρειαστούμε δύο ανισότητες.