13/1/22

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ

① $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ , $f_n(x) = \dfrac{nx}{nx+1}$ .

Εξετάστε την κ.σ. και ομοιόμορφη σύγκλιση στο $[0,+\infty)$ και στο $[a,+\infty)$ , $[0,a]$ , $a>0$

Λύση: • $f_n(x) \to 0$

• Για $x>0$ : $f_n(x) = \dfrac{nx}{nx+1} = \dfrac{x}{x+\frac{1}{n}} \to 1$

Άρα, $f_n \xrightarrow{κ.σ.} f$ , όπου $f(x) = \begin{cases} 0, & x=0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$

Η $f$ είναι ασυνεχής στο 0, ενώ όλες οι $f_n$ είναι συνεχείς. Άρα, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.
Ομοίως, αν $a>0$, η $f$ είναι ασυνεχής στο $0 \in [0,a]$ άρα η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο $[0,a]$.

• Στο $[a,+\infty)$ έχουμε $f_n \to 1$. Υπολογίζουμε την $\|f_n - f\|_\infty$ στο $[a,+\infty)$

1) $|f_n(x) - f(x)| = \left|\dfrac{nx}{nx+1} - 1\right| = \dfrac{1}{nx+1} \leq \dfrac{1}{na+1}$ , $\forall x \geq a$

2) Άρα, $\|f_n - f\|_\infty = \dfrac{1}{na+1} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ , δηλ. $f_n \xrightarrow{ομ.} f \equiv 1$ στο $[a,+\infty)$.

② $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ , $f_n(x) = \sqrt{n}\, x\, e^{-nx^2}$.

Ν.δ.ο. $f_n \xrightarrow{κ.σ.} 0$ και $\forall a>0$ ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$.
Είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη στο $[0,\infty)$;

Λύση: • $f_n(0) = 0 \to 0$ και για $a>0$ έχουμε: $e^{nx^2} > nx^2$

$\Longrightarrow f_n(x) = \dfrac{\sqrt{n}\,x}{e^{nx^2}} < \dfrac{\sqrt{n}\,x}{nx^2} = \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

Άρα, $f_n \xrightarrow{κ.σ.} 0$

Μελετάμε την $|f_n - 0| = |f_n| = f_n$ στο $[0,+\infty)$ και στο $[a,+\infty)$ , $a>0$.

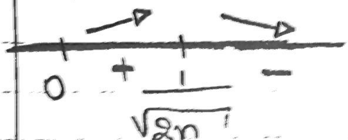
$e^t > t$

$e^t > \dfrac{t^2}{2}$

$e^t > \dfrac{t^3}{6}$

⋮

$f_n'(x) = \sqrt{n}\, e^{-nx^2} - \sqrt{n}\cdot 2nx^2 e^{-nx^2} = \sqrt{n}\, e^{-nx^2}(1-2nx^2)$



• Στο $[0,+\infty)$ $\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) =$

$$= \sqrt{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n}}\, e^{-n\cdot\frac{1}{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{e}} \not\to 0.$$

Άρα, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

• Έστω $a>0$. $\exists n_0 : \frac{1}{\sqrt{2n_0}} < a$.

Όταν $n \geq n_0$ έχουμε $\frac{1}{\sqrt{2n}} < a$. Άρα, για $n \geq n_0$ η $f_n$ είναι φθίνουσα στο $[a,+\infty) \Rightarrow \|f_n\|_\infty = f_n(a) = \sqrt{n}\cdot a\cdot e^{-na^2} \to 0$

Άρα, η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο $[a,+\infty)$.

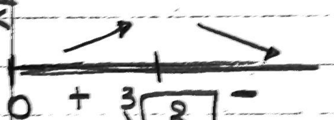
(3) Εξετάστε αν η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{k(1+kx^3)}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$.

Λύση: ⇝ Κριτήριο του Weierstrass

• $f_k(x) = \frac{x^2}{k(1+kx^3)}$ ⇝ $f_k'(x) = \frac{1}{k}\,\frac{2x(1+kx^3) - x^2\cdot 3kx^2}{(1+kx^3)^2} =$

$$= \frac{1}{k}\,\frac{2x - x^4\cdot k}{(1+kx^3)^2} = \frac{x}{k}\cdot\frac{2-x^3k}{(1+kx^3)^2}$$

$x^3 = \frac{2}{k}$



Άρα, $\|f_k\|_\infty = f_k\left(\sqrt[3]{\frac{2}{k}}\right) = \frac{1}{k}\left(\frac{2}{k}\right)^{2/3}\frac{1}{1+\cancel{k}\cdot\frac{2}{\cancel{k}}}$

$$= \underbrace{\frac{2^{2/3}}{3}\cdot\frac{1}{k^{5/3}}}_{M_k}$$

Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} M_k = \frac{2^{2/3}}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{5/3}}$ συγκλίνει, γιατί είναι p-σειρά με $p = \frac{5}{3} > 1$. Από το κριτήριο του Weierstrass η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

$\boxed{\text{Για } p>0 \text{ η p-σειρά είναι η } \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots}$

④ $f_n(x) = x^n e^{-nx}$ στο $[0,+\infty)$ κ.σ. και ομοιόμορφη σύγκλιση

$$e^{nx} > \frac{(nx)^8}{8!}$$
$$\frac{x^n}{e^{nx}} < \frac{8!\, x^n}{n^8 x^8}$$

<u>Λύση</u>: • $f_n(0) = 0 \to 0$

Για $x>0$ εφαρμόζουμε το κριτήριο ρίζας:

$$\sqrt[n]{f_n(x)} = \sqrt[n]{x^n e^{-nx}} = x \cdot e^{-\frac{nx}{n}} = \frac{x}{e^x} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{x}{e^x} < 1$$

$(e^x \geq 1+x > x)$

Άρα, $f_n(x) \to 0$.

• Υπολογίζουμε την $\|f_n\|_\infty$.

$f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-nx} - nx^n e^{-nx} = nx^{n-1}e^{-nx}(1-x)$

$0 \quad + \nearrow \quad 1 \quad - \searrow$

Άρα, $\|f_n\|_\infty = f_n(1) = e^{-n} \to 0$.

Άρα, η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

(Κεφ.3) ⑤ Έστω $(X,d)$ μ.χ. και $D \subseteq X$. Ν.α.ο. τ.α.ε.ι.:

(α) Το $D$ είναι πυκνό

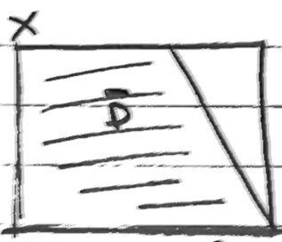
(β) $\forall$ συνεχή $f: X \to \mathbb{R}$ με $f|_D \equiv 0$ ισχύει $f \equiv 0$.

<u>Λύση</u>: (α) $\Rightarrow$ (β) Έστω $f: X \to \mathbb{R}$ συνεχής τω. $\forall d \in D$ $f(d) = 0$.

Έστω $x \in X$. Υπάρχουν $d_n \in D$ τω. $d_n \to x \underset{f \text{ συν.}}{\Longrightarrow} f(d_n) \to f(x)$, $f(d_n) = 0$

$\Rightarrow f(x) = 0$.

(β) $\Rightarrow$ (α) Θ.δ.ο. $\bar{D} = X$.



Έστω ότι $\bar{D} \subsetneq X$. Θεωρούμε την $f_0: X \to \mathbb{R}$ με $f_0(x) = \text{dist}(x, D)$. Η $f_0$ είναι συνεχής και $f_0(x) = 0 \iff x \in \bar{D}$. Άρα, $f_0(d) = 0$ $\forall d \in D$

Όμως, $\exists x \in X : x \notin \bar{D} \Rightarrow f_0(x) > 0$.

Άρα $f_0 \not\equiv 0$, <u>άτοπο</u> από το (α).

Θέμα Εξετάσεων (6) Έστω $(X,d)$ μ.χ., $K$ συμπαγές $\subseteq X$, $U$ ανοικτό $\subseteq X$ τ.ω. $K \subseteq U$. Ν.α.ο. $\exists\, \delta>0$ τ.ω. $K_\delta = \{y \in X : dist(y,K)<\delta\} \subseteq U$ ↳ ανοικτό

$X$


**Λύση**: Ορίζουμε $f: K \to \mathbb{R}$ με $f(x) = dist(x, X \setminus U)$. Αφού $K \cap (X\setminus U) = \emptyset$ (διότι $K \subseteq U$) και το $X \setminus U$ είναι κλειστό, έχουμε $f(x)>0 \ \forall x \in K$. Η $f$ είναι συνεχής και το $K$ συμπαγές, άρα η $f$ παίρνει ελάχιστη τιμή στο $K$: $\exists x_0 \in K$ τ.ω. $\forall x \in K$ $f(x) \geq f(x_0) =: \delta \Rightarrow \forall x \in K$ $dist(x, X\setminus U) \geq \delta \Rightarrow$ $\Rightarrow \forall x \in K \ \forall y \in X \setminus U \ d(x,y) \geq \delta$. Αν $y \in X$ και $dist(y,K)<\delta$, τότε $\exists x \in K$ τ.ω. $d(x,y)<\delta$ και αυτό σημαίνει ότι $y \in U$, γιατί αν $y \in X\setminus U$ θα έχουμε $d(x,y)\geq \delta$.

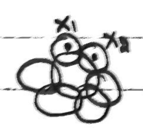
(7) Έστω $(X,d)$ <u>πλήρης</u> μ.χ. που <u>δεν</u> έχει μεμονωμένα σημεία. Αποδείξτε ότι το σύνολο $X$ είναι <u>υπεραριθμήσιμο</u>.

| |
|---|
| Κάθε $x \in X$ είναι σ.σ. του $X \iff$ $X \setminus \{x\}$ <u>πυκνό</u> και <u>ανοικτό</u>, $\forall x \in X$ |

**Λύση**: Ας υποθέσουμε ότι το $X$ είναι αριθμήσιμο. Τότε $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. $\forall n \in \mathbb{N}$ το $V_n = X \setminus \{x_n\}$ είναι ανοικτό και πυκνό. Από <u>Baire</u>, $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \neq \emptyset$ $\Rightarrow \bigcap_n (X \setminus \{x_n\}) = X \setminus \bigcup_n \{x_n\} = X \setminus X = \emptyset$, <u>άτοπο</u>.

(8) Έστω $(X,d)$ <u>ολικά φραγμένος</u> μ.χ. και $D$ πυκνό $\subseteq X$. Ν.α.ο. $\forall \varepsilon>0 \ \exists N \geq 1$ και $z_1, \dots, z_n \in D$ τ.ω. $X = \bigcup_{k=1}^{N} B(z_k, \varepsilon)$

**Λύση**: Έστω $\varepsilon>0$. Αφού ο $X$ είναι ολικά φραγμένος, $\exists N \geq 1$ και $x_1, \dots, x_N \in X$ τ.ω. $X = \bigcup_{k=1}^{N} B\left(x_k, \frac{\varepsilon}{2}\right)$




$\forall k \leq N \ \exists z_k \in D$ τ.ω. $z_k \in B(x_k, \varepsilon/2) \xrightarrow[\text{Ανισότητα}]{\text{Τριγωνική}}$

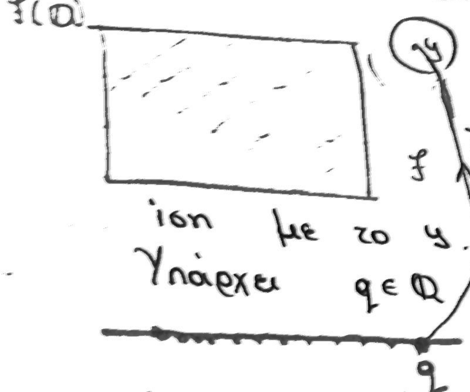
$$\Rightarrow B\left(x_k, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subseteq B(z_k, \varepsilon) \Rightarrow X = \bigcup_{k=1}^{N} B(x_k, \varepsilon/2) \subseteq \bigcup_{k=1}^{N} B(z_k, \varepsilon) \subseteq X$$

<u>Παραλλαγή</u>. $X$ συμπαγής, $D \subseteq X$ πυκνό. Έστω $\varepsilon > 0$.
Ισχύει: (*) $X = \bigcup_{z \in D} B(z, \varepsilon)$ – <u>θέλει απόδειξη</u>

<u>Λύση</u>: Αφού ο $X$ είναι συμπαγής, υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη, δηλ. $\exists z_1, \ldots, z_N \in D$ τ.ω. $X = \bigcup_{k=1}^{N} B(z_k, \varepsilon)$.

Για το (*) Έστω $x \in X$. Αφού το $D$ είναι πυκνό, $\exists z \in D$ τ.ω. $d(x,z) < \varepsilon \Longrightarrow x \in B(z, \varepsilon)$.

(9) Έστω $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ συνεχής και 1-1 συνάρτηση.
Ν.α.ο. το $f(\mathbb{Q})$ δεν έχει μεμονωμένα σημεία.




<u>Λύση</u>: Έστω $y$ μεμονωμένο σημείο του $f(\mathbb{Q})$. Αυτό σημαίνει ότι αν $y_n \in f(\mathbb{Q})$ και $y_n \to y \Rightarrow (y_n)$ είναι τελικά σταθερή και ίση με το $y$.
Υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ τ.ω. $y = f(q)$. Υπάρχουν $q_n \in \mathbb{Q}$, $q_n \neq q$ τ.ω. $q_n \to q$.

Αφού η $f$ είναι συνεχής, έχουμε $\underset{\substack{\cap \\ f(\mathbb{Q})}}{f(q_n)} \to \underset{\substack{\| \\ y}}{f(q)}$

Άρα, τελικά, $\forall n \geq n_0$ $f(q_n) = f(q) \xRightarrow{f \text{ 1-1}} \forall n \geq n_0$ $q_n = q$ <u>άτοπο</u>

(10) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνεχής. Ν.α.ο. η $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $g(x,y) = f(x^2y, xy^2)$ είναι συνεχής.

$\boxed{\begin{array}{l} H(x,y) = (x^2y, xy^2) \\ \text{δ.ο. είναι συνεχής} \\ \text{Μετά, } g = f \circ H \end{array}}$

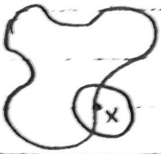
<u>Λύση</u>: Έστω $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ με $(x_n, y_n) \to (x,y) \in \mathbb{R}^2$
Θ.δ.ο. $g(x_n, y_n) \to g(x,y)$.

• Έχουμε $x_n \to x$ και $y_n \to y \Rightarrow x_n^2 y_n \to x^2 y$ και
$x_n y_n^2 \to x y^2 \Rightarrow (\underbrace{x_n^2 y_n}_{u}, \underbrace{x_n y_n^2}_{v}) \to (x^2 y, x y^2)$

$\xRightarrow{f \text{ συνεχής}} f(x_n^2 y_n, x_n y_n^2) \to f(x^2 y, x y^2)$, δηλ. $g(x_n, y_n) \to g(x, y)$

(11) $A \subseteq (X, d)$ $\partial(A) = \emptyset \iff A$ ανοικτό και κλειστό.

$x \in \partial(A) \overset{\text{ορσ}}{\iff} \forall \varepsilon > 0$
$B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ και
$B(x,\varepsilon) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$



$\partial(A) = \bar{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$
$= \bar{A} \setminus A^\circ$

$\overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ$

$(X \setminus A)^\circ = X \setminus \bar{A}$

Λύση: ($\Leftarrow$) $A$ ανοικτό $\Rightarrow A^\circ = A$
$A$ κλειστό $\Rightarrow \bar{A} = A$
Τότε $\partial(A) = \bar{A} \setminus A^\circ = A \setminus A = \emptyset$
($\Rightarrow$) Αν $\partial(A) = \emptyset$, τότε
$\bar{A} \setminus A^\circ = \emptyset$ και επειδή $A^\circ \subseteq \bar{A}$
έχουμε $\bar{A} = A^\circ$. Όμως, τότε
$\bar{A} = A^\circ \subseteq A \subseteq \bar{A} \Rightarrow \bar{A} = A^\circ = A \Rightarrow A$ ανοικτό
και κλειστό

(12) Σ ή Λ;
(α) Κάθε συμπαγής μ.χ. είναι ολικά φραγμένος. (Σωστό)

Λύση: Έστω $\varepsilon > 0$. Έχουμε $X = \bigcup_{x \in X} B(x, \varepsilon)$ και ο $X$ είναι

συμπαγής, άρα $\exists$ πεπερασμένη υποκάλυψη αυτής της
κάλυψης, δηλ. $\exists\, x_1, \dots, x_n \in X$ τ.ω. $X = \bigcup_{k=1}^{N} B(x_k, \varepsilon)$
Άρα, ο $X$ είναι φραγμένος.

(β) Κάθε διαχωρίσιμος μ.χ. είναι πλήρης. (Λάθος)

Λύση: $(0,1)$ με τη συνήθη μετρική: είναι διαχωρίσιμος μ.χ.
(πυκνό: οι ρητοί του $(0,1)$) και δεν είναι πλήρης, γιατί δεν
είναι κλειστό $\subseteq \mathbb{R}$
$\mathbb{Q}$ με τη συνήθη μετρική: γνωρίζουμε ότι δεν είναι πλήρης
και είναι αριθμήσιμο πυκνό $\Rightarrow$ διαχωρίσιμος

(γ) Πλήρης + διαχωρίσιμος $\Rightarrow$ συμπαγής (Λάθος)

Λύση: $\mathbb{R}$ = πλήρης + διαχωρίσιμος

$\hookrightarrow$ δεν είναι συμπαγής, γιατί δεν είναι φραγμένος.

(7.15) $f_n, f : (X,d) \to [a,b]$ και $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$
$g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής
$\Bigg\} \Rightarrow g \circ f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} g \circ f$

$\boxed{|g(\overbrace{f_n(x)}^{u}) - g(\overbrace{f(x)}^{v})| \le \varepsilon \quad \forall n \ge n_0 \quad \forall x \in X}$

Λύση: Έστω $\varepsilon > 0$. Η $g$ είναι ο.σ., άρα $\exists \delta > 0$:

① Αν $u, v \in [0,1]$ και $|u-v| < \delta \Rightarrow |g(u) - g(v)| \le \varepsilon$

Αφού $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$:

② $\forall n \ge n_0 \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \delta$

Τότε $\forall n \ge n_0 \quad \forall x \in X$ θέτουμε στην ① $u = f_n(x)$, $v = f(x)$

έχουμε $|\underbrace{g(f_n(x))}_{g \circ f_n} - \underbrace{g(f(x))}_{g \circ f}| \le \varepsilon$

(7.35) $f_n, g_n : [0,1] \to [0,1]$ συνεχείς
$f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$, $g_n \xrightarrow{\text{ομ}} g$
$\Bigg\} \Rightarrow f_n \circ g_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f \circ g$

Λύση: $|f_n(g_n(x)) - f(g(x))| \le |f_n(\underbrace{g_n(x)}_{u}) - f(\underbrace{g_n(x)}_{v})| +$
$+ \underbrace{|f(g_n(x)) - f(g(x))|}_{7.15} \le$

$\le \|f_n - f\|_\infty + |f(g_n(x)) - f(g(x))|$

$\boxed{|f_n(x) - f(x)| \le \|f_n - f\|_\infty}$

- Αφού $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$ έχουμε $\|f_n - f\|_\infty \to 0 \overset{(*)}{\Rightarrow}$

Από την 7.15 $\exists n_0 : \forall n \ge n_0 \quad \forall x \in X \quad |f(g_n(x)) - f(g(x))| \le \frac{\varepsilon}{2}$

(*) $\exists n_0 \quad \forall n \ge n_0 \quad \|f_n - f\|_\infty \le \frac{\varepsilon}{2}$

## 5.25 Σ ή Λ;

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής. Ορίζουμε $F_m = f^{-1}([-m,m]) =$
$= \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| \le m\}$. Υπάρχει $F_m$ που περιέχει διάστημα.

<u>Λύση</u>: <u>Σωστό</u>: Κάθε $F_m$ είναι κλειστό σύνολο ως αντίστροφη εικόνα του κλειστού $[-m,m]$ μέσω της συνεχούς $f$.

• $\mathbb{R} = \bigcup_{m=1}^{\infty} [-m,m] \Rightarrow \mathbb{R} = f^{-1}(\mathbb{R}) = f^{-1}\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} [-m,m]\right) =$

$$= \bigcup_{m=1}^{\infty} f^{-1}([-m,m]) = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$$

• Ο $\mathbb{R}$ είναι πλήρης. Από τη $2^{η}$ μορφή του Θ. Baire $\exists\, F_m$ με μη-κενό εσωτερικό, που δηλαδή περιέχει διάστημα

## 5.26 $f: (X,d) \to (Y,\sigma)$ συνεχής.

Για κάθε $y \in Y$ ορίζουμε $A_y = f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X : f(x) = y\}$

(α) Αν η $f$ είναι ο.σ. και $y \neq y'$ στο $f(X)$, τότε $dist(A_y, A_{y'}) > 0$.

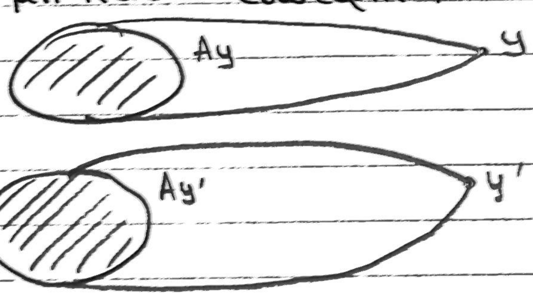
(β) Αν $X$ πλήρης, $Y$ αριθμήσιμο, $\exists\, y \in Y$ τω. $(A_y)^{\circ} \neq \emptyset$

<u>Λύση</u>: (β) $f(X) \subseteq Y$ αριθμήσιμο σύνολο,

$$\underset{\text{πλήρης}}{X} = f^{-1}(f(X)) = \bigcup_{y \in f(X)} f^{-1}(\{y\}) = \bigcup_{y \in f(X)} \overset{\text{κλειστά}}{A_y} = \text{αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων}$$

Από τη δεύτερη μορφή του Baire, κάποιο από τα $A_y$ έχει μη-κενό εσωτερικό.

(α)




Αν $dist(A_y, A_{y'}) = 0$ $\exists\, u_n \in A_y$, $v_n \in A_{y'}$ τω. $d(u_n, v_n) \to 0$

$\Downarrow$ $f$ ομ. συνεχής

$$\sigma(\underbrace{f(u_n)}_{=y}, \underbrace{f(v_n)}_{=y'}) \to 0$$

γιατί $y \neq y'$ <u>άτοπο</u>.