11/1/22

# Κατά σημείο και Ομοιόμορφη Σύγκλιση

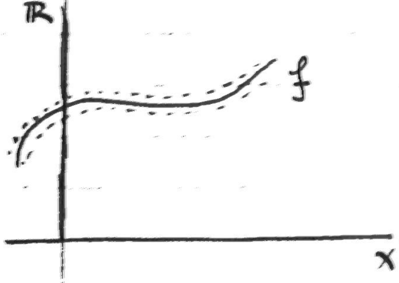
• $f_n, f : (X, d) \longrightarrow \mathbb{R}$

(1) Λέμε ότι $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$, αν $\forall x \in X \quad f_n(x) \longrightarrow f(x)$.

(2) Λέμε ότι $f_n \xrightarrow{o\mu.} f$, αν $\| f_n - f \|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$,

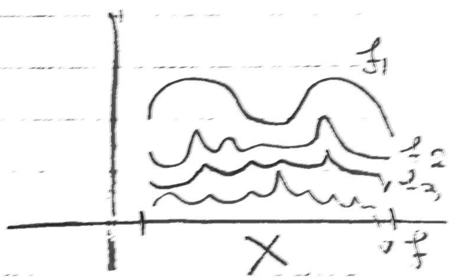
όπου $\| f_n - f \|_\infty = \sup \{ |f_n(x) - f(x)| : x \in X \}$.

Αναλυτικά, αν $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0 \ \forall x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.




## Θεώρημα Dini

Έστω $(X, d)$ συμπαγής μ.χ.. Έστω $(f_n)$, $f_n : (X, d) \to \mathbb{R}$ φθίνουσα ακολουθία συνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνεχή $f : (X, d) \to \mathbb{R}$. Τότε $f_n \xrightarrow{o\mu.} f$.



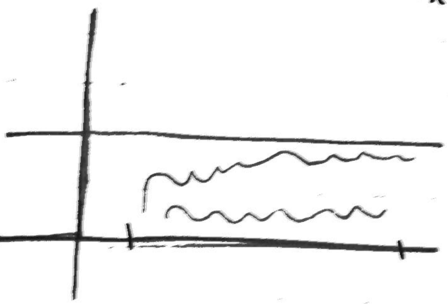

$(f_n)$ φθίνουσα: $\forall n \in \mathbb{N}$
$f_n \geq f_{n+1}$

<u>Παρατήρηση</u>: Για κάθε $x \in X$, η $(f_n(x))$ είναι φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και $f_n(x) \longrightarrow f(x)$, άρα $f(x) \leq f_n(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

<u>Απόδειξη</u>: Ορίζουμε $g_n = f_n - f$. <u>Τότε</u> κάθε $g_n$ είναι <u>συνεχής</u> (οι $f_n$ και $f$ είναι συνεχείς) και $g_n \geq 0$ (γιατί $f_n \geq f$) και $g_n(x) = f_n(x) - f(x) \longrightarrow 0$, δηλ. $g_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} 0$.

Θ.δ.ο. $g_n \xrightarrow{\text{ομ.}} 0 \Rightarrow f_n - f \xrightarrow{\text{ομ}} 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Ζητάμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τω. $\|g_{n_0}\|_\infty \le \varepsilon$, δηλ. $\forall x \in X \quad 0 \le g_{n_0}(x) \le \varepsilon$. Τότε $\forall n \ge n_0$ έχουμε $\forall x \in X \quad 0 \le g_n(x) \le g_{n_0}(x) \le \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall n \ge n_0 \quad \|g_n\|_\infty \le \varepsilon$.



Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε
$V_n = \{x \in X : g_n(x) < \varepsilon\}$ – ανοιχτό σύνολο γιατί $g_n$ συν.

Τότε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$.

[Έστω $x \in X$. Αφού $g_n \to 0$ $\exists n_1 \in \mathbb{N} : g_{n_1}(x) < \varepsilon$
Τότε $x \in V_{n_1} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$]

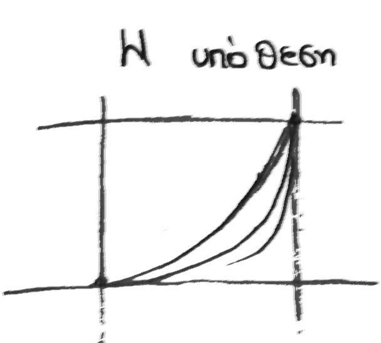
Αφού ο $X$ είναι συμπαγής, υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη
Υπάρχει $n_1 < n_2 < \ldots\ldots < n_m$ τω. $X = V_{n_1} \cup \ldots\ldots \cup V_{n_m}$

| |
|---|
| Όμως, αν $n < m$ τότε $V_n \subseteq V_m$ |
| $x \in V_n \Rightarrow g_n(x) < \varepsilon$ $\Rightarrow g_m(x) \le g_n(x) < \varepsilon \Rightarrow x \in V_m$ |

Τότε $\forall x \in X \leadsto x \in V_{n_m} \Rightarrow g_{n_m}(x) < \varepsilon$.
Δηλ.: για $n_0 = n_m$ έχουμε $\|g_{n_0}\|_\infty \le \varepsilon$

## Παράδειγμα

Η υπόθεση ότι η $f$ είναι συνεχής είναι απαραίτητη.



$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ (→ συμπαγής) $\quad f_n(x) = x^n$
Η $(f_n)$ είναι φθίνουσα και οι $f_n$ είναι συνεχείς. $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & 0 < x < 1 \end{cases}$

$f$ ασυνεχής στο 1. $\leadsto$ Η σύγκλιση <u>ΔΕΝ</u> είναι ομοιόμορφη.

# Σειρές Συναρτήσεων

Έστω $f_k : (X,d) \to \mathbb{R}$. $\forall n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $S_n = f_1 + \dots + f_n$.
Έχει νόημα να εξετάσουμε αν $S_n \to f$ κ.σ. / ομοιόμορφα

<u>Ορισμός</u>: Η σειρά συναρτήσεων $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει στην $f$ κατά σημείο και γράφουμε $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$, αν $S_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$

Η $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f$, αν $S_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$.

<u>Θεώρημα</u> (Μ-κριτήριο του Weierstrass)

Έστω $f_k : (X,d) \to \mathbb{R}$ φραγμένες συναρτήσεις και $\underbrace{\|f_k\|_\infty \le M_k}_{k \in \mathbb{N}}$
Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ συγκλίνει $\Rightarrow$ η $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση $f$.

<u>Άσκηση 8</u>

Έστω $a > \frac{1}{2}$. Ν.δ.ο. η σειρά συναρτήσεων $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k^a (1+kx^2)}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>: 1) $f_k(x) = \frac{x}{k^a(1+kx^2)}$

2) Υπολογίζουμε την $\|f_k\|_\infty$. Θεωρούμε την $|f_k(x)| = \frac{|x|}{k^a(1+kx^2)}$ άρτια

και βρίσκουμε supremum. Αφού είναι άρτια, υπολογίζουμε το sup στο $[0,+\infty)$. Εκεί, $f_k(x) = \frac{x}{k^a(1+kx^2)}$

Παραγωγίζουμε: $f_k'(x) = \frac{1}{k^a} \frac{1+kx^2 - 2kx^2}{(1+kx^2)^2} = \frac{1}{k^a} \cdot \frac{1-kx^2}{(1+kx^2)^2}$

Έχει max στο σημείο όπου $1-kx^2=0 \iff x=\frac{1}{\sqrt{k}}$

$0 \quad + \quad \frac{1}{\sqrt{k}} \quad -$

Άρα $\|f_k\|_\infty = f_k\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \frac{1}{k^a}\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{1}{1+k\cdot 1/k} = \frac{1}{2k^{a+1/2}}$

3) Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_\infty = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k^{a+1/2}}$ συγκλίνει.
(p-σειρά με $p=a+1/2>1$)

4) Από το Κριτήριο του Weierstrass, η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα.

<u>Λήμμα</u>

Έστω $f_n:(X,d)\to\mathbb{R}$. Τότε η $(f_n)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια $f:(X,d)\to\mathbb{R}$ ανν $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0: \forall n,m\geq n_0$ $\|f_n-f_m\|_\infty\leq\varepsilon$.

<u>Απόδειξη</u> (Weierstrass): Για ν.δο. η $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα, ισοδύναμα δο. η $(S_n)$ συγκλίνει ομοιόμορφα, όπου $S_n=f_1+\dots+f_n$. Από το Λήμμα α.ν.δο.
$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}: \forall n>m\geq n_0\ \|S_n-S_m\|_\infty\leq\varepsilon$

$\|S_n-S_m\|_\infty = \|f_{m+1}+\dots+f_n\|_\infty\leq\varepsilon$

Όμως, $\|f_{m+1}+\dots+f_n\|_\infty\leq\|f_{m+1}\|_\infty+\dots+\|f_n\|_\infty\leq M_{m+1}+\dots+M_n$
Από την υπόθεση, $\sum_{k=1}^{\infty}M_k<\infty$.

Άρα, $\exists n_0\in\mathbb{N}: \sum_{k=n_0}^{\infty}M_k\leq\varepsilon$ (οι ουρές τείνουν στο 0)

Άρα, $\forall n>m\geq n_0$ έχουμε $\|S_n-S_m\|_\infty=\|f_{m+1}+\dots+f_n\|_\infty$
$\leq M_{m+1}+\dots+M_n\leq\sum_{k=m+1}^{\infty}M_k\leq\sum_{k=n_0}^{\infty}M_k\leq\varepsilon$.

## Συνέπειες

(α) Αν οι $f_k$ είναι συνεχείς και η $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιό-
-μορφα, τότε η $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ είναι συνεχής

[ Απόδειξη: $S_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$ και $S_n = \overbrace{f_1 + \dots + f_n}^{\text{συνεχείς}}$ ]

(β) Αν $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολ/μες και $f \overset{\text{ομ.}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} f_k$, τότε
η $f$ είναι ολ/μη και $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx$

[ Απόδειξη: $S_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \underbrace{S_n(x)}_{= \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)} dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(x)\,dx$

Άρα, $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx$ ]

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(7) Ν.δ.ο. η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2x^2}$ συγκλίνει $\forall x \neq 0$ και αποκλίνει για $x=0$

Ν.δ.ο. συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[a,+\infty)$ ή $(-\infty,a]$ όπου $a>0$.

Λύση: $\rule{1cm}{0.4pt}]\underset{0}{\cdot}[\rule{1cm}{0.4pt}$ • Για $x=0$ έχουμε την $\sum_{k=1}^{\infty} 1$ που αποκλίνει.

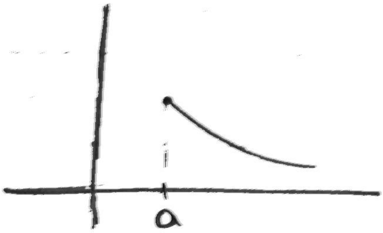
• Για $x \neq 0$ έχουμε $0 < \frac{1}{1+k^2x^2} < \frac{1}{k^2x^2}$ και η σειρά

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2x^2} = \frac{1}{x^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει.

Από Κριτήριο Σύγκρισης, η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2x^2}$ συγκλίνει.

Έστω $a>0$. Κοιτάζουμε τη σειρά συναρτήσεων στο $[a,+\infty)$
Υπολογίζουμε το sup της $\frac{1}{1+k^2x^2}$ στο $[a,+\infty)$

Έχει μέγιστη τιμή στο $a$, ίση με $\frac{1}{1+k^2a^2} = M_k$




Η $\sum_{k=1}^{\infty} M_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2a^2}$ συγκλίνει.

Από το Κριτήριο του Weierstrass η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

40 (α) Ν.δ.ο. η σειρά συναρτήσεων $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x\sin(k^2x)}{k^2}$ συγκλίνει κατά σημείο στο $\mathbb{R}$. (β) Ν.δ.ο. η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε κλειστό διάστημα $[-a,a]$.
(γ) Ν.δ.ο. η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x\sin(k^2x)}{k^2}$ είναι συνεχής

<u>Λύση</u>: (α) Έστω $x\in\mathbb{R}$. Έχουμε $\left|\frac{x\sin(k^2x)}{k^2}\right| = \frac{|x|}{k^2}\cdot \underbrace{|\sin(k^2x)|}_{\leq 1}$
$\leq \frac{|x|}{k^2}$ και η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|}{k^2}$ συγκλίνει, άρα η
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x\sin(k^2x)}{k^2}$ συγκλίνει απολύτως.

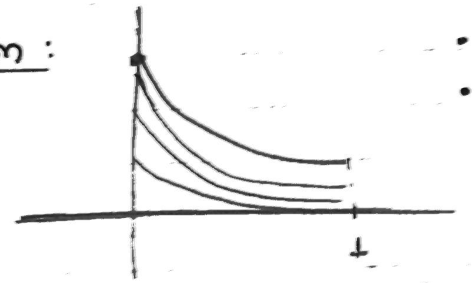
(β) Για την $f_k(x) = \frac{x\sin(xk^2)}{k^2}$ στο $[-a,a]$ έχουμε
$|f_k(x)| \leq \frac{|x|}{k^2} \leq \frac{a}{k^2}$, <u>δηλ.</u> $\|f_k\|_{\infty} \leq M_k = \frac{a}{k^2}$.
Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} M_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{k^2}$ συγκλίνει. Από το Κριτήριο του Weierstrass η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη

(γ) Έστω $x\in\mathbb{R}$, $\exists a>0$ τ.ω. $x\in[-a,a]$ (π.χ. $a=|x|$)
Στο $[-a,a]$ η $\sum f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα, άρα η
$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x\sin(k^2x)}{k^2}$ είναι συνεχής στο $[-a,a]$.

Άρα, είναι συνεχής και στο σημείο $x$.
Αφού το $x \in \mathbb{R}$ ήταν τυχόν, η $f$ είναι συνεχής σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

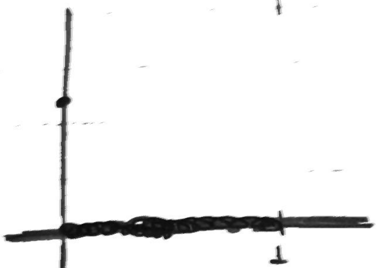
① $f_n(t) = \dfrac{1}{1+nt}$, $t \in [0,1]$. Ν.δ.ο. η $(f_n)$ συγκλίνει κ.σ., αλλά όχι ομοιόμορφα. Σε ποια $f$;

Λύση:



- Για $t=0$ $f_n(0) = 1 \to 1$
- Για $0 < t \leq 1$: $f_n(t) = \dfrac{1}{\underbrace{1+nt}_{\to +\infty}} \to 0$

Άρα $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$, όπου $f(t) = \begin{cases} 1, & t=0 \\ 0, & 0<t\leq 1 \end{cases}$



Η $f$ είναι ασυνεχής στο σημείο $0$ ενώ οι $f_n$ είναι συνεχείς.
Άρα, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη

⑥ Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.
Ν.δ.ο. οι σειρές συναρτήσεων $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx)$ συγκλίνουν ομοιόμορφα.

Λύση: Υπόθεση: $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$

$f_k = a_k \cdot \cos(kx) \rightsquigarrow |f_k| = |a_k| \cdot |\cos(kx)| \leq |a_k| = M_k$

και $\sum_{k=1}^{\infty} M_k = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$.

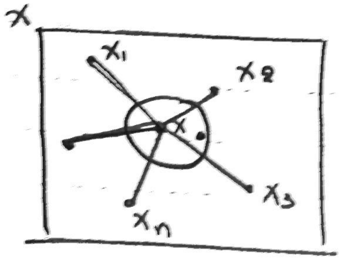
Από το Κριτήριο του Weierstrass, η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

(31) Έστω $(X,d)$ διαχωρίσιμος μ.χ. και $D=\{x_k : k\in\mathbb{N}\}$ αριθμήσιμο πυκνό σύνολο του $X$. Ορίζουμε $f_n : X\to\mathbb{R}$ με $f_n(x)=\text{dist}(x,A_n)$, όπου $A_n=\{x_1,\dots\dots,x_n\}$.

Ν.δ.ο. (α) $(f_n)$ φθίνουσα και $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} 0$

(β) $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} 0 \iff X$ είναι φραγμένος

Λύση :




(α) $f_n(x)=\text{dist}(x,A_n)$

$= \min\{d(x,x_1),\dots\dots,d(x,x_n)\}$

$\hspace{6em}\vee\!\shortmid$

$f_{n+1}(x)=\text{dist}(x,A_{n+1})=\min\{d(x,x_1),\dots\dots,d(x,x_{n+1})\}$

(Άσκηση)

Γενικά, αν $A\subseteq B$ τότε $\text{dist}(x,A)\geqslant \text{dist}(x,B)$. και εδώ $A_n\subseteq A_{n+1} \Rightarrow \text{dist}(x,A_n)\geqslant\text{dist}(x,A_{n+1})$

Έστω $x\in X$. Έστω $\varepsilon>0$. Αφού $D$ πυκνό, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ :

$x_{n_0}\in B(x,\varepsilon) \Rightarrow d(x_{n_0},x)<\varepsilon$. Τότε $\underset{f_{n_0}(x)}{\underset{\shortparallel}{\text{dist}(x,A_{n_0})}} \leq \underset{x_{n_0}\in A_{n_0}}{d(x,x_{n_0})} <\varepsilon$

Αφού η $(f_n)$ είναι φθίνουσα, $\forall n\geqslant n_0$ έχουμε $0\leq f_n(x)\leq f_{n_0}(x)<\varepsilon$

Άρα, $f_n(x)\longrightarrow 0$

(β) ($\Longrightarrow$) Έστω $\varepsilon>0$. Θέλουμε να καλύψουμε το $X$ με πεπερασμένες το πλήθος μπάλες ακτίνας $\varepsilon$.

Ξέρουμε ότι $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} 0 \iff \|f_n\|_\infty \longrightarrow 0$.

Άρα $\exists n\in\mathbb{N}$ τ.ω. $\|f_n\|_\infty<\varepsilon \iff \forall x\in X \;\; 0\leq f_n(x)<\varepsilon$

$\iff \forall x\in X \;\; \min\{d(x,x_1),\dots\dots,d(x,x_n)\}<\varepsilon$

$\iff \forall x\in X \;\; \exists j\leq n$ τ.ω. $d(x,x_j)<\varepsilon$

$\iff \forall x\in X \;\; \exists j\leq n$ τ.ω. $x\in B(x_j,\varepsilon)$

$\iff \forall x\in X \;\; x\in \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j,\varepsilon)$

$\iff X=\bigcup_{j=1}^{n} B(x_j,\varepsilon)$

($\Longleftarrow$) Έστω $\varepsilon>0$, $\exists y_1,\dots\dots,y_k\in X$ τ.ω. $X=\bigcup_{j=1}^{k} B(y_j,\varepsilon/2)$

Θα βρούμε $n_1,\dots\dots,n_k\in\mathbb{N}$ τ.ω. $B(y_j,\varepsilon/2)\subseteq B(x_{n_j},\varepsilon)$ και τότε $X=\bigcup_{j=1}^{k} B(x_{n_j},\varepsilon)$

· Έστω $j \le k$. Αφού το $D$ είναι πυκνό, $\exists\, x_{n_j} \in D$ τ.ω. $d(x_{n_j}, y_j) < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε $B(y_j, \varepsilon/2) \subseteq B(x_{n_j}, \varepsilon)$

Έστω $n_0 = \max\{n_1, \dots\dots, n_k\}$. Τότε $X = \bigcup_{j=1}^{k} B(x_{n_j}, \varepsilon) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n_0} B(x_j, \varepsilon)$

$\Longrightarrow X = \bigcup_{j=1}^{n_0} B(x_j, \varepsilon)$. Τότε $\forall x \in X$

$f_{n_0}(x) = \operatorname{dist}(x, \underbrace{\{x_1, \dots\dots, x_{n_0}\}}_{= A_{n_0}}) < \varepsilon$, γιατί $\exists j \le n_0 : x \in B(x_j, \varepsilon)$

$\Downarrow$

$\exists j \le n_0 : d(x, x_j) < \varepsilon$

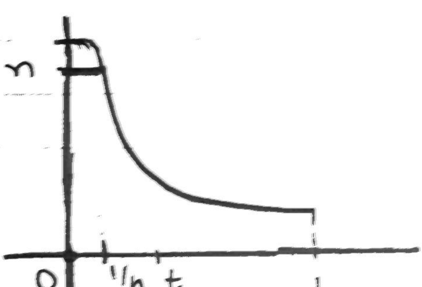
Αφού η $(f_n)$ είναι φθίνουσα $\forall n \ge n_0 : 0 \le f_n \le f_{n_0} < \varepsilon$

Άρα, $\|f_n\|_\infty \longrightarrow 0$

(32) $f_n : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(t) = \begin{cases} n, & 0 \le t \le 1/n \\ 1/t, & 1/n < t \le 1 \end{cases}$

$f : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{t}$

Ν.δ.ο. $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη, αν $t_n, t \in (0,1]$ και $t_n \longrightarrow t$ και $f_n(t_n) \longrightarrow f(t)$




<u>Λύση</u>: · Έστω $t \in (0,1]$. Αφού $t > 0$ $\exists n_0$: $\forall n \ge n_0$ $\frac{1}{n} < t$. Τότε $\forall n \ge n_0$,

$$f_n(t) = \frac{1}{t} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{t} = f(t)$$

· Θεωρούμε την $|f_n - f| = f - f_n$. Έχουμε $(f - f_n)(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} - n, & 0 < t < \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} < t \le 1 \end{cases}$