ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΚΑΙ ΣΕΙΡΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ορισμός (σύγκλιση κατά σημείο): Έστω $X \neq \emptyset$ και $f_n, f : X \to (Y, \rho)$. Λέμε ότι η (f_n) συγκλίνουσα κατά σημείο στην f, αν $\forall x \in X$ $f_n(x) \to f(x)$. Τότε γράφουμε $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$

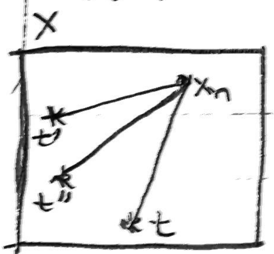
Σημείωση: (α) Συνήθως, το X θα είναι μ.χ. (X,d)
(β) Συνήθως, $Y = \mathbb{R}$, δηλ. $f_n, f : (X,d) \to \mathbb{R}$.
(γ) Αρκετά συχνά, X = διάστημα του $\mathbb{R}$

Πρόβλημα

Μας δίνεται η (f_n) και ρωτάμε αν $\exists f$ τ.ω. $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$

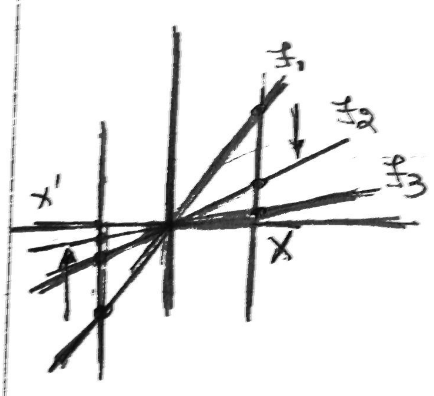
Παραδείγματα

① Έστω (X,d) μ.χ. και (x_n) ακολουθία στον X τ.ω. $x_n \xrightarrow{d} x \in X$.
Ορίζουμε (f_n), $f_n : X \to \mathbb{R}$, $f_n(t) = d(t, x_n)$



Παρατηρούμε ότι $\forall t \in X$ ισχύει: $(*)$ $d(t, x_n) \to d(t, x)$
[γιατί $|d(t,x_n) - d(t,x)| \leq d(x_n, x) \to 0$]
Ορίζουμε $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(t) \overset{\text{ορσ}}{=} d(t,x)$.
Από την $(*)$ $\forall t \in X$ $f_n(t) \to f(t)$, δηλ. $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$

② $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$.



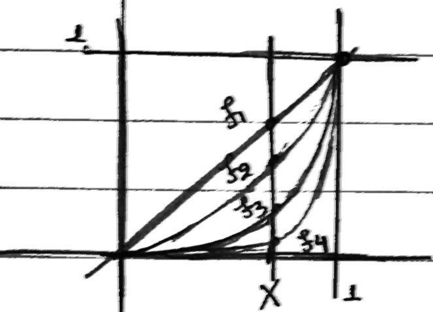
Σταθεροποιώ $x \in \mathbb{R}$. Τότε $f_n(x) = \dfrac{x}{n} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$
Δηλ. $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$, όπου $f(x) = 0$.

③ $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{n}{x+n^2}$

Έστω $x \geq 0$. Έχουμε $f_n(x) = \dfrac{n}{x+n^2} = \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{x}{n^2}+1} \to \dfrac{0}{0+1} = 0$

Άρα, $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$, όπου $f(x)=0$, $x \geq 0$.

④ $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$



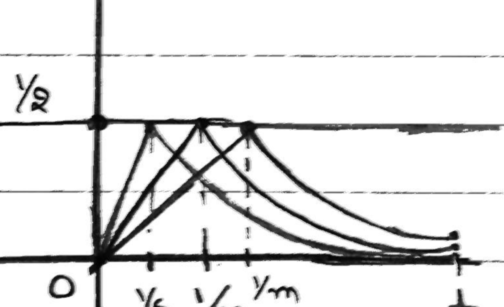
Έστω $0 \leq x < 1$. Τότε $\overset{f_n(x)}{x^n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$.

Αν $x=1$, τότε $f_n(x) = 1^n = 1 \xrightarrow{n\to+\infty} 1$

Άρα, $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$, όπου $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$

__Παρατήρηση__: Όλες οι f_n είναι συνεχείς, αλλά η f είναι ασυνεχής στο σημείο 1

⑤ $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+nx}, & \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ \dfrac{nx}{2}, & 0 \leq x \leq 1/n \end{cases}$



• Αν $x=0$, τότε $f_n(x) = f_n(0) = \dfrac{n \cdot 0}{2} = 0 \to 0$

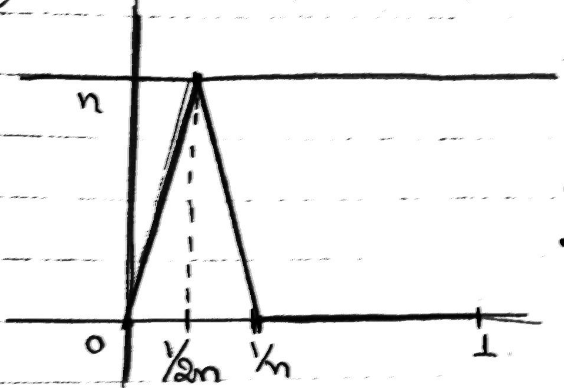
• Αν $x>0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τω. $\dfrac{1}{n_0} < x$.

Τότε $\underline{\forall n \geq n_0}$ έχουμε $\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{n_0} \leq x < 1$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0$ $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx} \Rightarrow f_n(x) \to 0$, γιατί $\dfrac{1}{1+nx} \to 0$

Τελικά, $f_n(x) \to 0$ $\forall x \in [0,1]$, δηλ. $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$, όπου $f \equiv 0$

⑥ $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\begin{cases}2n^2x, & 0\le x\le \frac{1}{2n}\\ -2n^2\left(x-\frac{1}{n}\right), & \frac{1}{2n}\le x\le \frac{1}{n}\\ 0, & \frac{1}{n}\le x\le 1\end{cases}$



Έστω $x\in[0,1]$.

- Αν $x=0$, τότε $f_n(x)=f_n(0)=2n^2\cdot 0=0\xrightarrow{n\to+\infty}0$
- Αν $0<x\le 1$, τότε $\exists n_0\in\mathbb{N}:\ \frac{1}{n_0}<x$.

Τότε $\forall n\geq n_0$ έχουμε $\frac{1}{n}\le\frac{1}{n_0}<x<1$

$\Rightarrow f_n(x)=0 \Rightarrow f_n(x)\to 0$.

Άρα, $f_n\xrightarrow{κ.σ.} f$, όπου $f\equiv 0$.

Παρατηρούμε επίσης ότι $\int_0^1 f_n(x)\,dx=\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{n}}\cdot\cancel{n}}_{\frac{β\cdot υ}{2}}\not\to\int_0^1 f(x)\,dx = 0$

<u>Ορισμός</u> (ομοιόμορφη σύγκλιση): Έστω $f_n, f: X\to(Y,σ)$. Λέμε ότι η (f_n) <u>συγκλίνει</u> <u>ομοιόμορφα</u> στην f και $f_n\xrightarrow{ομ.}f$, αν " $\forall ε>0$ $\exists n_0\in\mathbb{N}:\ \forall n\geq n_0$ και <u>$\forall x\in X$</u> $σ(f(x),f_n(x))<ε$ "

<u>Κατά σημείο σύγκλιση</u>

$f_n\xrightarrow{κ.σ.}f \iff \forall x\in X\ \ f_n(x)\to f(x) \iff \forall x\in X\ \ \forall ε>0$ $\exists n_0=n_0(ε,x):\ \forall n\geq n_0\ \ σ(f_n(x),f(x))<ε$.

<u>Ομοιόμορφη σύγκλιση</u>

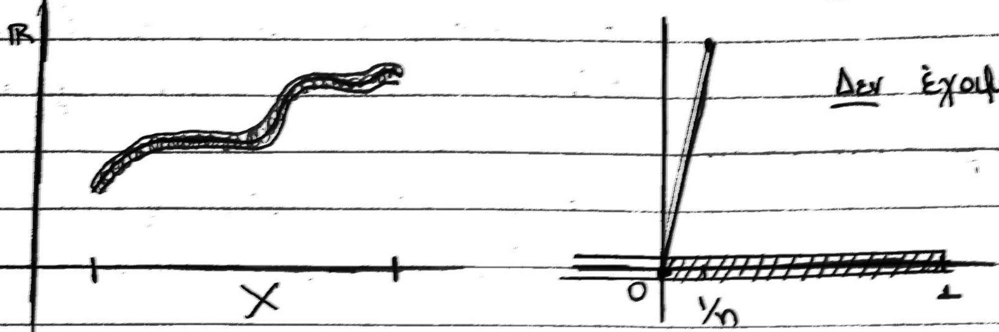
$f_n\xrightarrow{ομ.}f \iff \forall ε>0\ \ \exists n_0=n_0(ε):\ \forall n\geq n_0\ \ \forall x\in X$ $σ(f_n(x),f(x))<ε$.

Ειδική Περίπτωση: $f_n, f: X \to \mathbb{R}$

$f_n \xrightarrow{ομ.} f \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\} \le \varepsilon \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}:$

$\forall n \ge n_0 \ \|f_n - f\|_\infty \le \varepsilon. \iff \|f_n - f\|_\infty \to 0$



Δεν έχουμε ομ. σύγκλιση

Πρόταση 1

Αν $f_n, f: X \to (Y, \sigma)$ και $f_n \xrightarrow{ομ.} f$, τότε $f_n \xrightarrow{κ.σ.} f$

Απόδειξη: Έστω $x \in X$. Θέλουμε ν.δ.ο. $f_n(x) \to f(x)$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $f_n \xrightarrow{ομ.} f$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ τω. $\forall n \ge n_0$
$\forall y \in X \ \sigma(f_n(y), f(y)) < \varepsilon \xrightarrow[\text{για το } x]{\text{ειδικότερα}} \forall n \ge n_0 \ \sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$
Άρα, $f_n(x) \to f(x)$.

Μέθοδος: Μας δίνουν $f_n : (X, d) \to \mathbb{R}$.

(Σταθεροποιούμε το x και κοιτάμε αν $\exists \lim f_n(x)$ όπως στα παραδ. 1-6)

Βήμα 1ο: Εξετάζουμε, αν $\exists f$ τω. $f_n \xrightarrow{κ.σ.} f$ (όπως παρ. 1-6)

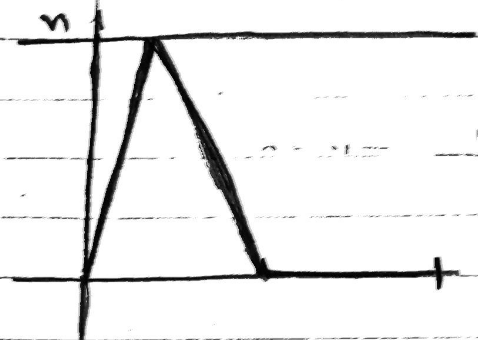
(Βήμα 1'ο: Από την Πρόταση 1, αν $\exists g: f_n \xrightarrow{ομ.} g$,
τότε $f_n \xrightarrow{κ.σ.} g$. Όμως, $f_n \xrightarrow{κ.σ.} f$, άρα $\forall x \in X$
$f(x) = \lim f_n(x) = g(x)$, δηλ. $g = f$.
Άρα, το μοναδικό υποψήφιο ομοιόμορφο όριο της (f_n)
είναι το κατά σημείο όριο f.)

Βήμα 2º : Εξετάζουμε αν $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$.

Τρόπος: Υπολογίζουμε την $\|f_n - f\|_\infty$ (μελέτη συνάρτησης; σταθεροποιούμε το <u>n</u> και μελετάμε την $f_n - f$)

Αν $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση, αλλιώς <u>όχι</u>

Παράδειγμα 6



Είδαμε ότι $\forall x \in [0,1]$ $f_n(x) \to 0 = f(x)$

Υπολογίζουμε την $\|f_n - \cancel{f}\|_\infty = \|f_n\|_\infty$
$= \sup\{ |f_n(x)| : x \in [0,1] \} = n \to +\infty \neq 0$

Άρα η σύγκλιση <u>δεν</u> είναι ομοιόμορφη.

Άσκηση 4

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(t) = n^p t (1-t^2)^n$ ($p>0$, παράμετρος)

Λύση: Βήμα 1º : Αν $t=0$, τότε $f_n(0) = 0 \to 0$.

Αν $0 < t \leq 1$ έχουμε $\dfrac{f_{n+1}(t)}{f_n(t)} = \dfrac{(n+1)^p \cdot t(1-t^2)^{n+1}}{n^p \cdot t(1-t^2)^n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^p (1-t^2)$

$\to 1 \cdot (1-t^2) < 1$, για $t>0$. Από κριτήριο λόγου: $f_n(t) \to 0$.

Τελικά, $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f \equiv 0$

Βήμα 2º : Υπολογίζουμε την $\|f_n - f\|_\infty = \max\{ f_n(t) : 0 \leq t \leq 1 \}$ ($f_n \geq 0$)

Μελετάμε την f_n: παραγωγίζουμε

$f_n'(t) = n^p (1-t^2)^n - n^p t \cdot n (1-t^2)^{n-1} \cdot 2t =$

$= n^p (1-t^2)^{n-1} [1 - t^2 - 2nt^2] = n^p (1-t^2)^{n-1} [1 - (1+2n)t^2] = 0$,

όταν $t = \dfrac{1}{\sqrt{1+2n}}$

$+ \quad \dfrac{1}{\sqrt{1+2n}} \quad -$

Άρα, $\|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{1+2n}}\right) = \frac{n^p}{\sqrt{1+2n}} \left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^n$

$\cdot \left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^n = \Big[\underbrace{\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}}_{\downarrow\, 1/e}\Big]^{\frac{n}{2n+1} \to \frac{1}{2}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{e}}$

Διακρίναμε περιπτώσεις:

- $0 < p < \frac{1}{2}$. Τότε $\frac{n^p}{\sqrt{2n+1}} \to 0 \Rightarrow f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right) \to 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} = 0$
- $p = \frac{1}{2}$. Τότε $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}} \to \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right) \to \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} > 0$
- $p > \frac{1}{2}$. Τότε $\frac{n^p}{\sqrt{2n+1}} \to +\infty \Rightarrow f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right) \to +\infty$

Άρα, $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, όταν $0 < p < 1/2$.
Τότε και μόνο τότε έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση.

Πρόταση 2

Έστω $f_n, f : (X,d) \to (Y,\sigma)$. Υποθέτουμε ότι $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$
και όλες οι f_n είναι συνεχείς στο $x_0 \in X$.
Τότε και η f είναι συνεχής στο x_0.

Θεώρημα

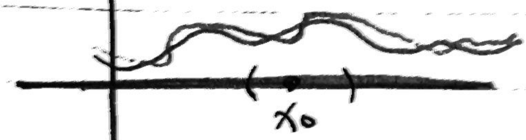
Έστω $f_n : (X,d) \to (Y,\sigma)$ συνεχείς και $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$,
όπου $f : (X,d) \to (Y,\sigma)$, τότε και η f είναι συνεχής.

<u>Απόδειξη</u> (Πρότασης 2): Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$

$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall x \in X \quad \sigma(f(x), f_{n_0}(x)) < \varepsilon/3 \quad (*)$

Η f_{n_0} είναι συνεχής στο x_0, άρα

$\exists \delta > 0$ τ.ω. αν $d(x,x_0) < \delta \Rightarrow \sigma(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad (**)$



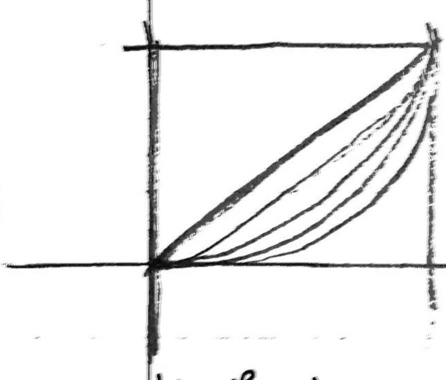
Έστω $x \in X$ με $d(x,x_0) < \delta$. Τότε

$$\sigma(f(x), f(x_0)) \le \underbrace{\sigma(f(x), f_{n_0}(x))}_{(*)} + \underbrace{\sigma(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0))}_{(**)} + \underbrace{\sigma(f_{n_0}(x_0), f(x_0))}_{(*)}$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

<u>Κριτήριο μη-ομοιόμορφης σύγκλισης</u>

Αν f_n συνεχής, f συνεχής και $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$, τότε η σύγκλιση <u>δεν</u> μπορεί να είναι ομοιόμορφη.

<u>Παράδειγμα 4</u>



$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ. Είδαμε ότι $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$, όπου

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Η f είναι ΑΣΥΝΕΧΗΣ στο 1. Άρα η σύγκλιση ΔΕΝ είναι ομοιόμορφη.

Ομοιόμορφη Σύγκλιση και Ολοκλήρωμα

Πρόταση 3

Έστω $f_n, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$.
Υποθέτουμε ότι όλες οι f_n είναι ολοκληρώσιμες.
Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int_a^b f_n(t)\,dt \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f(t)\,dt$

Απόδειξη: Δείχνουμε πρώτα ότι η f είναι ολοκληρώσιμη. (*)
Παίρνουμε $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$ $\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{b-a}$

$\forall t$ $|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

Η f_{n_0} είναι ολοκληρώσιμη $\overset{\text{Κριτ.}}{\underset{\text{Riemann}}{\Longrightarrow}}$ $\exists P$ διαμέριση του $[a,b]$

τ.ω. $U(f_{n_0}, P) - L(f_{n_0}, P) < \varepsilon$. Από την (*) έπεται ότι:
$|U(f,P) - U(f_{n_0}, P)| < \varepsilon$ και $|L(f,P) - L(f_{n_0}, P)| < \varepsilon$

$$\overset{''}{\sum_{k=1}^{n}}{}' \underbrace{\left(M_k(f) - M_k(f_{n_0})\right)}_{< \frac{\varepsilon}{b-a}} (x_{k+1} - x_k)$$

Συνεπώς, $U(f,P) - L(f,P) \leq |U(f,P) - U(f_{n_0}, P)| +$
$+ U(f_{n_0}, P) - L(f_{n_0}, P) + |L(f_{n_0}, P) - L(f,P)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$
Από το Riemann, η f είναι ολοκληρώσιμη.
Τέλος, $\left| \int_a^b f_n(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt \right| = \left| \int_a^b f_n(t) - f(t)\,dt \right| \leq$

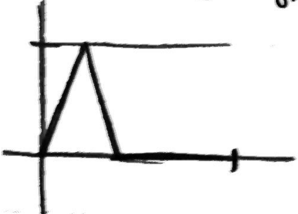
$$\leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,dt \leq \int_a^b \|f_n(t) - f(t)\|_\infty\,dt = \underset{0}{\|f_n - f\|_\infty} \cdot (b-a) \to 0$$

αφού $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$

Παρατήρηση

Αν $f_n \xrightarrow{κ.σ.} f$ και $\int_a^b f_n(t)\,dt \not\to \int_a^b f(t)\,dt$, τότε η σύγκλιση ΔΕΝ είναι ομοιόμορφη

π.χ. Παράδειγμα 6



$f_n \to 0 = f$. $\int_0^1 f_n = \frac{1}{2} \not\to 0 = \int_0^1 f$

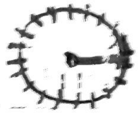
Παράγωγος και Ολοκλήρωμα

Παράδειγμα

$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$

• $f_n \xrightarrow{ομ.} 0$, $\|f_n - 0\|_\infty = \sup\left\{ \underbrace{\left|\frac{1}{n}\sin(nx)\right|}_{\leq \frac{1}{n}} : x \in \mathbb{R} \right\} = \frac{1}{n}$ και ισχύει ισότητα, αν $nx = \frac{\pi}{2}$

• $f_n'(x) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \cos(nx)$ – Δεν Συγκλίνει για κανένα $x \in (0,1)$



Έστω ότι $\cos(nx) \to a \in [-1,1]$

$\cos 3y = 4\cos^3 y - 3\cos y$

$\cos 2y = 2\cos^2 y - 1 \Rightarrow \cos(2nx) = 2\cos^2(nx) - 1$

$a = 2a^2 - 1 \Rightarrow 2a^2 - a + 1 = 0$

$\frac{1 \pm 3}{4}$ → 1, $-1/2$

Έστω ότι $\cos(nx) \to 1 \Rightarrow \underbrace{\cos^2(nx)}_{1} + \sin^2(nx) = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sin(nx) \to 0$.

$$\underbrace{\cos((n+1)x)}_{\to 1} = \cos(nx) \cdot \cos x - \sin(nx) \cdot \sin x \to \cos x$$

Άρα, $\cos x = 1$, άτοπο, γιατί $x \in (0,\pi)$

Στην σχέση: $\cos 3y = 4\cos^3 y - 3\cos y \Rightarrow \cos(3nx) =$
$= 4\cos^3(nx) - 3\cos(nx) \Rightarrow a = 4a^3 - 3a \Rightarrow a = a^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow a = 1$ ή $a = -1$ ή $a = 0$.

Συνδυάζω τις λύσεις που βρήκα από την εξίσωση $2a^2 - a - 1 = 0$ και έχω ότι $\underline{a=1}$ μοναδική κοινή λύση

Πρόταση 4

Έστω $f_n, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και $f_n \xrightarrow{κ.σ.} f$.
Υποθέτουμε επίσης ότι οι f_n είναι παραγωγίσιμες με f_n' συνεχείς και
$f_n \xrightarrow{ομ.} g$ για κάποια $g : [a,b] \to \mathbb{R}$.
Τότε, η f είναι παραγωγίσιμη και $f' = g$.

Απόδειξη: $\forall n \in \mathbb{N}$ και $x \in [a,b]$ έχουμε $\underbrace{f_n(x)}_{\to f(x)} - \underbrace{f_n(a)}_{\to f(a)} = \underbrace{\int_a^x f_n'(t)\,dt}_{\to \int_a^x g(t)\,dt}$

από την κ.σ. σύγκλιση

Προτ 3

Άρα, $f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)\,dt \Rightarrow f(x) = f(a) + \underbrace{\int_a^x g(t)\,dt}$

παρ/μη, γιατί g συνεχής ως ομοιόμορφο όριο των συνεχών f_n'

Άρα, η f είναι παραγωγίσιμη και από το Θ.Θ $f'(x) = g(x)$

Ομοιόμορφη Σύγκλιση και Πράξεις μεταξύ Συναρτήσεων

Έστω $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$ και $g_n \xrightarrow{\text{ομ.}} g$ $\quad f_n, f, g_n, g : (X, d) \to \mathbb{R}$

Τότε : (i) $f_n + g_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f + g$

(ii) $\lambda f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} \lambda f$

(iii) $f_n g_n \xrightarrow[;]{\text{ομ.}} f \cdot g$

ΟΧΙ

Βασικές Ιδιότητες της $\|\cdot\|_\infty$

(α) $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

(β) $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$

(γ) $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$

Για το (γ) $\forall x \in X$ έχουμε $|f(x) g(x)| = |f(x)| |g(x)| \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty$

$\Rightarrow \|fg\|_\infty = \sup\{ |f(x) g(x)| : x \in X \} \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$

Οι (α) και (β) παρομοίως.

Απόδειξη : (i) $\left.\begin{array}{l} f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f \\ g_n \xrightarrow{\text{ομ.}} g \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f \\ g_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} g \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} f_n + g_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f + g$

και $\|(f_n + g_n) - (f+g)\|_\infty = \|(f_n - f) + (g_n - g)\|_\infty \overset{(\alpha)}{\leq}$

$\overset{(\alpha)}{\leq} \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{0,\ \text{γιατί}\ f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f} + \underbrace{\|g_n - g\|_\infty}_{0,\ \text{γιατί}\ g_n \xrightarrow{\text{ομ.}} g} \to 0$

Άρα, $f_n + g_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f + g$.