(25) X συμπαγής και $f: X \to Y$ συνεχής.
Ν.α.ο. αν $K \subseteq Y$ συμπαγές, τότε το $f^{-1}(K)$ συμπαγές $\subseteq X$

<u>Λύση</u>: <u>1ος Τρόπος</u>: K συμπαγές $\Longrightarrow K$ κλειστό $\xRightarrow[f \text{ συνεχής}]{} f^{-1}(K)$ κλειστό.

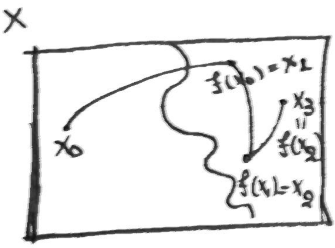
Το $f^{-1}(K)$ είναι κλειστό υποσύνολο του <u>συμπαγούς</u> μ.χ. X, άρα είναι συμπαγές.

<u>2ος Τρόπος</u>: Έστω (x_n) στο $f^{-1}(K)$. Αφού $x_n \in X$ και ο X είναι συμπαγής, $\exists\, (x_{k_n})$ τω. $x_{k_n} \to x \in X$. Δο. $x \in f^{-1}(K)$.
Η f είναι συνεχής, άρα $\underset{\substack{\cap \\ K}}{f(x_{k_n})} \to f(x)$ (γιατί $x_{k_n} \in f^{-1}(K)$)

Το K είναι κλειστό, γιατί είναι συμπαγές, άρα $f(x) \in K \Longrightarrow$ <u>$x \in f^{-1}(K)$</u>. Άρα το $f^{-1}(K)$ είναι συμπαγές.

(14) Έστω (X,d) συμπαγής μ.χ.
(α) Κάθε ισομετρία $f: X \to X$ είναι <u>επί</u>
(β) Αν (Y,σ) μ.χ. και υπάρχουν ισομετρίες $g: X \to Y$ και $h: Y \to X$, τότε και ο Y είναι συμπαγής.

<u>Λύση</u>: (α) Με απαγωγή σε άτοπο: Έστω ότι f <u>δεν</u> είναι επί. Τότε $f(X) \subsetneq X$. Η f είναι συνεχής ως ισομετρία και ο X είναι συμπαγής, άρα το $f(X)$ είναι συμπαγές σύνολο (ειδικότερα κλειστό)



$f(X)$ Υπάρχει $x_0 \in X$ τω. $x_0 \notin f(X)$.
Άρα, $\text{dist}(x_0, f(X)) = d > 0$.
Αν $x_1 = f(x_0)$, τότε $x_1 \in f(X)$, άρα $d(x_0, x_1) \geq d$

Ορίζουμε $x_n = f(x_{n-1})$, $n \geq 1$.

Τότε (1) $\forall n\geq 1 \quad d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \overset{f \text{ ισομετρία}}{=\!=} d(x_n, x_{n-1}) =$
$= \dots = d(x_0, x_1) \geq \delta.$

(2) Γενικότερα, αν $n>m$, τότε $d(x_n, x_m) = d(f(x_{n-1}), f(x_{m-1})) \overset{f \text{ ισομετρία}}{=\!=}$
$= d(x_{n-1}, x_{m-1}) \overset{\text{ομοίως}}{=\!=} d(x_{n-2}, x_{m-2}) = \dots = d(\underset{\substack{\cap \\ f(X)}}{x_{n-m}}, x_0) \geq \text{dist}(x_0, f(X)) = \delta^{(*)}$

$$\boxed{d(x_8, x_5) = d(x_7, x_4) = d(x_6, x_3) = \dots = d(x_3, x_0) \geq \delta}$$

Ο X είναι συμπαγής, άρα η (x_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (x_{k_n}), η οποία θα είναι βασική ως συγκλίνουσα.
Άρα, $\exists n_0 : \forall n > m \geq n_0 \quad \delta \underset{(*)}{\leq} d(x_{k_n}, x_{k_m}) < \delta$, άτοπο
$k_n > k_m$

(β) Η συνάρτηση $h\circ g : X \to X$ είναι ισομετρία:
$X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{h} X$, $\forall x, y \in X \quad d(h\circ g(x), h\circ g(y)) = d(h(\underbrace{g(x)), h(g(y)}_{\in Y})) = \sigma(g(x), g(y)) = d(x,y)$

- Από το (α) η $h\circ g$ είναι επί.

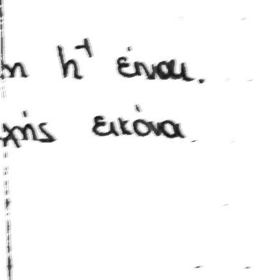
→ Άρα, η h είναι επί: Έστω $x \in X$. Τότε υπάρχει $x' \in X$ τ.ω.
$h(g(x')) = (h\circ g)(x') = x$, δηλ. για το $y = g(x') \in Y$ έχουμε $h(y) = x$

→ Τώρα, η $h : Y \to X$ είναι $\underset{\text{ισομετρία}}{1\text{-}1}$ και επί $\Longrightarrow$ ορίζεται η $h^{-1} : X \to Y$

και επειδή η h είναι ισομετρία έχουμε ότι και η h^{-1} είναι.
Άρα, ο $Y = h^{-1}(X)$ είναι συμπαγής, γιατί είναι συνεχής εικόνα (μέσω της h^{-1}) του συμπαγούς μ.χ. X.

(15) (X,d) συμπαγής, (F_n) φθίνουσα ακολουθία κλειστών $\subseteq X$.
(α) Αν G είναι ανοικτό $\subseteq X$ και $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq G$, τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $F_{n_0} \subseteq G$

Ιδέα: $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq G \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \underset{\text{ανοικτό}}{F_n^c} \supseteq X \setminus G$



Άρα $X = G \cup (X\setminus G) \subseteq G \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^c\right)$.
Δηλ. η $\{F_n^c : n \in \mathbb{N}\} \cup \{G\}$ είναι ανοικτή κάλυψη του X.

Αφού ο X είναι συμπαγής, αυτή κάλυψη έχει πεπερασμένη υποκάλυψη: $\exists\, n_1 < n_2 < \ldots < n_m \in \mathbb{N}$ τω $X = G \cup F_{n_1}^c \cup \ldots \cup F_{n_m}^c = G \cup (F_{n_1} \cap \ldots \cap F_{n_m})^c \underset{(F_n)\text{ φθίνουσα}}{=\!=} G \cup F_{n_m}^c \Rightarrow F_{n_m}^c \supseteq X \setminus G \Rightarrow$

$\Rightarrow F_{n_m} \subseteq G$.

(β) Αν $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$, τότε $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : F_{n_0} = \emptyset$

Εφαρμόζουμε το (α) με $G = \emptyset$: Έχουμε $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset \subseteq \emptyset \leftarrow G$

$\xRightarrow{(\alpha)} \exists\, n_0 : F_{n_0} \subseteq G = \emptyset \Rightarrow F_{n_0} = \emptyset$.

(γ) Αν $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ είναι μονοσύνολο, τότε $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$.

Έστω $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x_0\}$ για κάποιο $x_0 \in X$. Έστω $\varepsilon > 0$.

Παίρνουμε $G = B(x, \varepsilon/3)$ – ανοικτό.

Τότε, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x_0\} \subseteq \underbrace{B(x_0, \varepsilon/3)}_{G}$.

Από το (α) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}: F_{n_0} \subseteq B(x_0, \varepsilon/3) \Rightarrow$

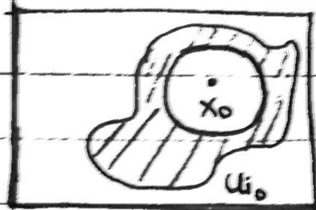
$\Rightarrow \operatorname{diam}(F_{n_0}) \leq \operatorname{diam}(B(x_0, \varepsilon/3)) \leq 2\frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

Τότε $\forall n \geq n_0$ έχουμε $F_n \subseteq F_{n_0}$ ((F_n) φθίνουσα) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{diam}(F_n) \leq \operatorname{diam}(F_{n_0}) < \varepsilon$. Έπεται ότι $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$.

32) Έστω (X, d) μ.χ. και $x_0 \in X$. Υποθέτουμε ότι $\forall \varepsilon > 0$ το $X \setminus B(x_0, \varepsilon)$ είναι συμπαγές. Ν.δ.ο. ο X είναι συμπαγής.

X



Λύση: Έστω $(U_i)_{i\in I}$ ανοιχτή κάλυψη του X. Υπάρχει $i_0 \in I$: $x_0 \in U_{i_0}$. Το U_{i_0} είναι ανοιχτό, άρα $\exists \varepsilon > 0$ τω. $B(x_0,\varepsilon) \subseteq U_{i_0}$

Έχουμε $X \setminus B(x_0,\varepsilon) \subseteq X = \bigcup_{i\in I} U_i$, δηλ. η $(U_i)_{i\in I}$ είναι ανοιχτή κάλυψη του συμπαγούς $X \setminus B(x_0,\varepsilon)$.

Άρα $\exists i_1,\dots,i_m \in I$ τω. $X\setminus B(x_0,\varepsilon) \subseteq U_{i_1}\cup\dots\cup U_{i_m}$
και $B(x_0,\varepsilon)\subseteq U_{i_0}$ $\Big\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow X = (X\setminus B(x_0,\varepsilon)) \cup B(x_0,\varepsilon) \subseteq \underbrace{U_{i_0}\cup U_{i_1}\cup\dots\cup U_{i_m}}_{\text{πεπερασμένη υποκάλυψη}}$$

(28) Έστω (X,d) μχ. και D πυκνό υποσύνολο του X. Υποθέτουμε ότι κάθε ακολουθία (z_n) σημείων του D έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (σε σημείο του X). Ν.δ.ο. X είναι συμπαγής

Λύση: Δο. ο X είναι ακολουθιακά συμπαγής. Έστω (x_n) στο X.

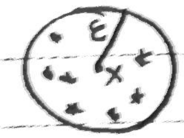
$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \exists z_n\in D \text{ τω. } \boxed{d(x_n,z_n) < \frac{1}{n}}$$

Από την υπόθεση, $\exists\, z_{k_n}$ τω. $z_{k_n} \to x\in X$.

Ισχυρισμός: $x_{k_n} \to x \in X$

$$d(x_{k_n},x) \le d(x_{k_n},z_{k_n}) + d(z_{k_n},x) < \frac{1}{k_n} + d(z_{k_n},x) \to 0+0=0$$

$\varepsilon > 0$
$d(x_n,z_n) < \varepsilon$



$(k_n \ge n \Rightarrow 1/k_n \le 1/n \Rightarrow 1/n \to 0)$

(18) Έστω (X,d) συμπαγής μ.χ. και $f: X \to X$ τ.ω. $\forall x \neq y$ στο X $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$. Ν.δ.ο. η f έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο.

ΟΧΙ ΣΥΜΠΑΓΗΣ

Η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+e^x)$ ικανοποιεί την $|f(x)-f(y)| < |x-y|$ αν $x \neq y$ ($f' < 1$) και δεν έχει σταθερά σημεία

Λύση: Σταθερό σημείο: $f(x) = x \iff d(x, f(x)) = 0$

Ορίζουμε $g: X \to \mathbb{R}$ με $g(x) = d(x, f(x))$.

- Η g είναι συνεχής: αν $x_n \to x$, τότε $f(x_n) \to f(x)$, άρα $g(x_n) = d(x_n, f(x_n)) \to d(x, f(x)) = g(x)$
- Ο X είναι συμπαγής, άρα η g παίρνει ελάχιστη τιμή σε κάποιο $x_0 \in X$.

Ισχυρισμός: $g(x_0) = 0$ [Τότε $d(x_0, f(x_0)) = 0 \Rightarrow f(x_0) = x_0$]

Έστω ότι $g(x_0) = d(x_0, f(x_0)) > 0$. Ειδικότερα, $x_0 \neq f(x_0)$.

Από την υπόθεση, $g(f(x_0)) = d(f(x_0), f(f(x_0))) < \underset{= g(x_0)}{d(x_0, f(x_0))}$

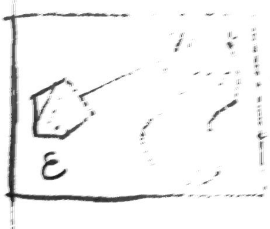
άτοπο, βρίσκουμε τιμή της g μικρότερη από την ελάχιστη τιμή της.

Μοναδικότητα: Έστω ότι η f έχει δύο σταθερά σημεία $x \neq y$

Δηλ. $f(x) = x$ και $f(y) = y$. Από την υπόθεση,

$d(x,y) = d(f(x), f(y)) < d(x,y)$, άτοπο

(4) (X,d) μ.χ., E, F μη-κενά $\subseteq X$, E συμπαγές, F κλειστό, $E \cap F = \emptyset$. Ν.δ.ο. $\mathrm{dist}(E,F) = \inf\{d(x,y) : x \in E, y \in F\} > 0$.



Λύση: 1ος Τρόπος: Έστω ότι $\mathrm{dist}(E,F) = 0$.

Τότε $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n \in E$, $y_n \in F$ τ.ω.

$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$. (ε-χαρ/σμος του infimum)

Αφού το $\mathcal{E}$ είναι συμπαγές, $\exists\, x_{k_n} \to x \in \mathcal{E}$.

Τότε $d(y_{k_n}, x) \leq d(y_{k_n}, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, x) < \frac{1}{k_n} + d(x_{k_n}, x) \to 0+0=0$

$\Longrightarrow y_{k_n} \to x$.

Όμως, $y_{k_n} \in F$ και το F είναι κλειστό, άρα $\underline{x \in F}$.

Τότε, $\underset{x}{E \cap F} \neq \emptyset$, άτοπο.

2ος Τρόπος: Ορίζουμε $g: \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \underset{x \notin F \text{ κλειστό}}{dist(x, F) > 0}$

και η g είναι συνεχής (1-Lipschitz).

Η g παίρνει ελάχιστη τιμή, (γιατί το $\mathcal{E}$ είναι συμπαγές) σε κάποιο $x_0 \in \mathcal{E}$.

Ισχυρισμός: $\forall x \in \mathcal{E}\ \forall y \in F \quad d(x,y) \geq g(x_0) > 0 \quad (\Rightarrow dist(\mathcal{E}, F) \geq g(x_0) > 0)$

Έχουμε $d(x,y) \geq dist(x, F) = g(x) \geq g(x_0)$

Παράδειγμα: Υπάρχουν ξένα κλειστά σύνολα με απόσταση 0

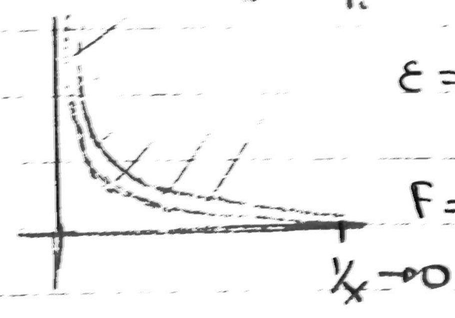
π.χ. στον $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ $\quad \mathcal{E} = [0, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q} = \{q \in \mathbb{Q} : 0 \leq q < \sqrt{2}\}$

κλειστό στον $\mathbb{Q}$

$F = [\sqrt{2}, 2] \cap \mathbb{Q} = \{q \in \mathbb{Q} : \sqrt{2} < q \leq 2\}$

$d(\mathcal{E}, F) = 0$

ή



$\mathcal{E} = \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right) : x > 0\right\}$

$F = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$

$d(\mathcal{E}, F) = 0$

ή $\quad \mathcal{E} = \mathbb{N}$ και $F = \left\{n + \frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

(11) Έστω (X,d) μ.χ.

(α) Αν $A_1,\dots\dots,A_m$ ολικά φραγμένα $\subseteq X \Rightarrow A_1\cup\dots\cup A_m$ είναι ολικά φραγμένο.

Λύση: Α.ν.δ.ο. ισχύει για δύο σύνολα (+ επαγωγή). Έστω $\varepsilon>0$

A_1 ολικά φραγμένο $\Rightarrow \exists x_1,\dots,x_m\in X$ τ.ω. $A_1\subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i,\varepsilon)$

A_2 ολικά φραγμένο $\Rightarrow \exists x_{m+1},\dots\dots,x_{m+k}\in X$ τ.ω. $A_2\subseteq \bigcup_{i=m+1}^{m+k} B(x_i,\varepsilon)$

Τότε, $A_1\cup A_2\subseteq \bigcup_{i=1}^{m+k} B(x_i,\varepsilon)$

(β) A ολικά φραγμένο $\Rightarrow \bar{A}$ ολικά φραγμένο

Λύση: Έστω $\varepsilon>0$. Αφού το A είναι ολικά φραγμένο, $\exists m\in\mathbb{N}$ και $x_1,\dots\dots,x_m\in X$ τ.ω. $A\subseteq B\left(x_1,\frac{\varepsilon}{2}\right)\cup\dots\cup B\left(x_m,\frac{\varepsilon}{2}\right)$

$$\Rightarrow \bar{A}\subseteq \overline{B\left(x_1,\tfrac{\varepsilon}{2}\right)\cup\dots\cup B\left(x_m,\tfrac{\varepsilon}{2}\right)}=\overline{B\left(x_1,\tfrac{\varepsilon}{2}\right)}\cup\dots\cup\overline{B\left(x_m,\tfrac{\varepsilon}{2}\right)}$$

$$\subseteq B(x_1,\varepsilon)\cup\dots\dots\cup B(x_m,\varepsilon)$$

$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

$\overline{A\cap B}\subseteq\bar{A}\cap\bar{B}$

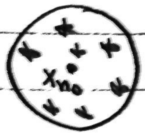
$A=\mathbb{Q},\ B=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Άσκηση: Αν $0<r<s$

$\Rightarrow \overline{B(x,r)}\subseteq\hat{B}(x,r)\subseteq B(x,s)$

(13) Έστω (X,d) μ.χ. και (x_n) βασική ακολουθία. Τότε το $A=\{x_n: n\in\mathbb{N}\}$ είναι ολικά φραγμένο

Λύση: Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η (x_n) είναι βασική, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n, m \geq n_0$ $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Ειδικότερα, $\forall n \geq n_0$ $d(x_n, x_{n_0}) < \varepsilon$ $\Rightarrow \forall n \geq n_0$ $x_n \in B(x_{n_0}, \varepsilon) \Rightarrow \{x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots\} \subseteq B(x_{n_0}, \varepsilon)$

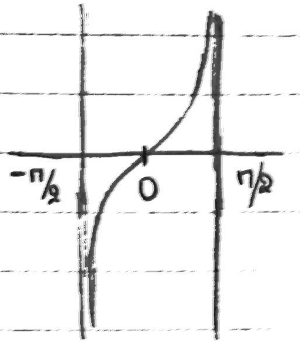


Αφού $x_1 \in B(x_1, \varepsilon), \ldots\ldots, x_{n_0-1} \in B(x_{n_0-1}, \varepsilon)$, τελικά $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{x_1\} \cup \ldots \cup \{x_{n_0-1}\} \cup \{x_{n_0}, \ldots\} \subseteq$

$$\subseteq \underbrace{B(x_1, \varepsilon) \cup \ldots \cup B(x_{n_0-1}, \varepsilon) \cup B(x_{n_0}, \varepsilon)}_{\text{πεπερασμένες το πλήθος}}$$

12 (β) Ν.δ.ο. η ιδιότητα του ολικά φραγμένου δεν διατηρείται από ομοιομορφισμούς

Λύση: Υπάρχει ομοιομορφισμός $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική



η $f(x) = \tan x$ (συνεχής 1-1 και επί με συνεχή αντίστροφη την $\arctan x$)

Γενικά: $\boxed{\text{Ολικά φραγμένο} \Rightarrow \text{φραγμένο}}$

Το $\mathbb{R}$ δεν είναι φραγμένο, άρα δεν είναι ολικά φραγμένο.
Το $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι ολικά φραγμένο

Πράγματι, 1 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \subseteq \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

2 Το $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι συμπαγές $\Rightarrow$ ολικά φραγμένο.

3 Γενικά, αν $A \subseteq B \subseteq (X, d)$ και το B — » —
$\Rightarrow$ A είναι ολικά φραγμένο