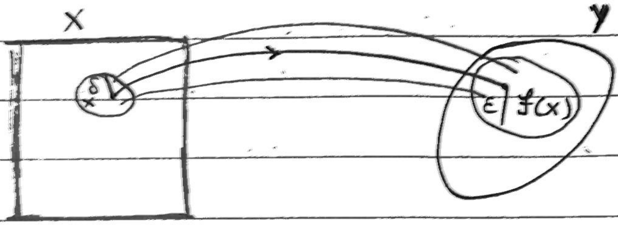
9/11/21

Κεφάλαιο 4: Συνεχείς συναρτήσεις μεταξύ μ.χ.

<u>Ορισμός</u>: Μια συνάρτηση $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$ λέγεται συνεχής στο $x\in X$, αν "$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta=\delta(x,\varepsilon)>0$ τ.ω. αν $y\in X$ τ.ω. $d(y,x)<\delta \Rightarrow \sigma(f(x),f(y))<\varepsilon$". (*)

Η f λέγεται συνεχής, αν είναι συνεχής σε κάθε $x\in X$.



(*) Ισοδύναμα $\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0$ τ.ω. $f(B_d(x,\delta))\subseteq B_\sigma(f(x),\varepsilon)$

<u>Υπενθύμιση</u>: $f:X\to Y$ $\quad f(A)=\{f(x):x\in A\}$ για $A\subseteq X$

$f^{-1}(B)=\{x: f(x)\in B\}$ για $B\subseteq Y$

<u>Αρχή της Μεταφοράς</u> (Κεφ. 2)

Η $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$ είναι συνεχής στο $x\in X$. <u>ανν</u> <u>$\forall (x_n)$</u> στο X με $x_n\to x$ έχουμε ότι $f(x_n)\to f(x)$.

Σημαντικό! <u>Θεώρημα</u> (Χαρακτηρισμός των συνεχών συναρτήσεων)

Έστω $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$. Τα εξής είναι ισοδύναμα

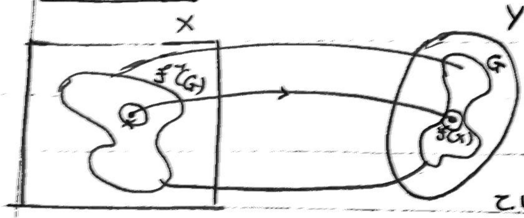
(α) Η f είναι συνεχής συνάρτηση

(β) $\forall$ ανοικτό $G\subseteq Y$ το $f^{-1}(G)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

(γ) $\forall$ κλειστό $F\subseteq Y$ το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.

"Η f είναι συνεχής αν αντιστρέφει ανοικτά σε ανοικτά και κλειστά σε κλειστά".

<u>Απόδειξη</u>: (α) $\Rightarrow$ (β) Έστω $G \subseteq Y$ ανοικτό. Έστω $x \in f^{-1}(G)$.



Τότε $f(x) \in G$ και το G είναι ανοικτό.
Άρα $\exists \varepsilon > 0$ τ.ω. $B_\sigma(f(x), \varepsilon) \subseteq G$.
Αφού η f είναι συνεχής $\exists \delta > 0$
τ.ω. $f(B_d(x,\delta)) \subseteq B_\sigma(f(x),\varepsilon) \subseteq G \Rightarrow$
$\Rightarrow B_d(x,\delta) \subseteq f^{-1}(G)$, δηλ. το <u>$x$ είναι εσωτερικό σημείο του $f^{-1}(G)$</u>.

(β) $\Rightarrow$ (α) Θ.δ.ο. η f είναι συνεχής σε κάθε $x \in X$.
Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Η $B_\sigma(f(x), \varepsilon)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y. Από υπόθεση, το $f^{-1}(B_\sigma(f(x),\varepsilon))$ είναι ανοικτό στο X και περιέχει το x, άρα $\exists \delta > 0$ τ.ω.
$B_d(x,\delta) \subseteq f^{-1}(B_\sigma(f(x),\varepsilon)) \Rightarrow f(B_d(x,\delta)) \subseteq B_\sigma(f(x),\varepsilon)$

$A \subseteq f^{-1}(B)$
$\Downarrow$
$f(A) \subseteq B$

Αυτό σημαίνει ότι η f είναι συνεχής στο x (από (*))
(β) $\Rightarrow$ (γ) Έστω $F \subseteq Y$ κλειστό. Το $G = Y \setminus F$ είναι ανοικτό, και από το (β) το $f^{-1}(G) = f^{-1}(Y \setminus F)$ είναι ανοικτό $\subseteq X$
$$f^{-1}(Y\setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$$
Επομένως, το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό $\subseteq X$
(γ) $\Rightarrow$ (β) Ομοίως.

<u>Πρόταση</u> (κι άλλες ισοδυναμίες)

Έστω $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:
(α) Η f είναι συνεχής
(δ) Για κάθε $A \subseteq X$, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$
(ε) Για κάθε $B \subseteq Y$, $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$
(στ) Για κάθε $C \subseteq Y$, $f^{-1}(C^\circ) \subseteq (f^{-1}(C))^\circ$

Απόδειξη: (α) $\Rightarrow$ (δ) Έστω $A \subseteq X$ και έστω $x \in \overline{A}$. (Θ.δ.ο. $f(x) \in \overline{f(A)}$)

Τότε $\exists\, x_n \in A$ τ.ω. $x_n \to x \overset{f \text{ συνεχής}}{\Longrightarrow} f(x_n) \to f(x)$

Αφού $f(x_n) \in f(A)$ και $f(x_n) \to f(x)$ έπεται ότι $f(x) \in \overline{A}$.

(δ) $\Rightarrow$ (ε) Έστω $B \subseteq Y$. Εφαρμόζουμε το (δ) με $\underline{A = f^{-1}(B)}$

και έχουμε: $f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(B))} \overset{(!)}{\subseteq} \overline{B} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

$f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

(ε) $\Rightarrow$ (στ) Εφαρμόζουμε το (ε) με $B = Y \setminus C$. Έχουμε:

$$\underset{\overset{\parallel}{f^{-1}(Y \setminus C^\circ)}}{f^{-1}(\overline{Y \setminus C})} \subseteq \underset{\overset{\parallel}{X \setminus f^{-1}(C^\circ)}}{f^{-1}(\overline{Y \setminus C})} \Rightarrow \underset{\overset{\parallel}{X \setminus (f^{-1}(C))^\circ}}{\overline{X \setminus f^{-1}(C)}} \subseteq f^{-1}(Y \setminus C^\circ)$$

$\Rightarrow X \setminus (f^{-1}(C))^\circ \subseteq X \setminus f^{-1}(C^\circ) \Rightarrow (f^{-1}(C))^\circ \supseteq f^{-1}(C^\circ)$

(στ) $\Rightarrow$ (β) Έστω G ανοικτό $\subseteq Y$. Εφαρμόζουμε το $C = G$.

Έχουμε $f^{-1}(\underset{\overset{\parallel}{G}}{G^\circ}) \subseteq (f^{-1}(G))^\circ \Rightarrow f^{-1}(G) \subseteq (f^{-1}(G))^\circ \Rightarrow f^{-1}(G)$ ανοικτό

Ομοιόμορφη συνέχεια

Ορισμός: Μια συνάρτηση $f: (X,d) \to (Y,\sigma)$ λέγεται ομοιόμορφα συνεχής, αν " $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τ.ω. αν $x, y \in X$ και $d(x,y) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$ "

Παραδείγματα

(1) Κάθε $f: (X,\delta) \to (Y,\sigma)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής

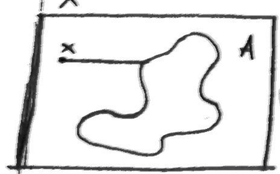
Έστω $\varepsilon > 0$. Παίρνουμε $\delta = \frac{1}{2} > 0$. Αν $x, y \in X$ και $\delta(x,y) < \frac{1}{2}$,

τότε $x = y \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow \sigma(f(x), f(y)) = 0 < \varepsilon$.

(2) Η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ είναι συνεχής, αλλά όχι ομοιόμορφα.

Ομοίως, η $g(x) = \cos(x^2)$ είναι φραγμένη και συνεχής, αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής

(3) Έστω $\emptyset \neq A \subseteq (X,d)$ και $\underbrace{d_A(x) = \operatorname{dist}(x,A) = \inf\{d(x,a) : a \in A\}}$, $d_A : (X,d) \to \mathbb{R}$



Έχουμε δ.ο. (Άσκηση 3.27) $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x,y)$ (*) $\forall x,y \in A$

Έπεται ότι η d_A είναι ομοιόμορφα συνεχής

Για δοθέν $\varepsilon > 0$ παίρνουμε $\delta = \varepsilon$.

Αν $d(x,y) < \delta \overset{(*)}{\Longrightarrow} |d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x,y) < \delta = \varepsilon$

(4) Έστω $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής και $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (ή οποιοδ. $\ell \in \mathbb{R}$)
Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

<u>Πρόταση</u> (Χαρακτηρισμός Μέσω Ακολουθιών)

Η $f : (X,d) \to (Y,\sigma)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής ανν
"για κάθε ζεύγος ακολουθιών $(x_n), (y_n)$ στον X με $d(x_n,y_n) \to 0$
ισχύει $\sigma(f(x_n), f(y_n)) \to 0$" (*)

<u>Απόδειξη</u> : ($\Longrightarrow$) Έστω $x_n, y_n \in X$ με $d(x_n,y_n) \to 0$.

$\forall n \geq n_0$
$\sigma(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$
$\Uparrow$
$d(x_n,y_n) < \delta$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, $\exists \delta > 0$ τω.
"αν $x,y \in X$ και $d(x,y) < \delta \to \sigma(f(x),f(y)) < \varepsilon$"
Αφού $d(x_n,y_n) \to 0$ <u>$\exists n_0 \in \mathbb{N}$</u> τω. $\forall n \geq n_0$
$d(x_n,y_n) < \delta$. Από την (*) <u>$\forall n \geq n_0$</u> έχουμε <u>$\sigma(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$</u>
Άρα, $\sigma(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$

($\Longleftarrow$) Έστω ότι η f <u>δεν</u> είναι ομοιόμορφα συνεχής.
Τότε $\exists \varepsilon > 0$ με την εξής ιδιότητα: $\forall \delta > 0$ μπορούμε να βρούμε $x,y \in X$ τω. $d(x,y) < \delta$, αλλά $\sigma(f(x),f(y)) \geq \varepsilon$
Για $\delta = \frac{1}{n}$, $n = 1,2,\ldots$ βρίσκουμε x_n, y_n τω.

$$\boxed{d(x_n,y_n) < 1/n \quad , \quad \text{αλλά} \quad \sigma(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon}$$

$$d(x_n,y_n) \to 0 \qquad\qquad \sigma(f(x_n), f(y_n)) \not\to 0 \qquad \underline{\text{άτοπο}}$$

Στο <u>Παράδειγμα (2)</u>

· η $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής, γιατί αν επιλέξουμε $x_n = n + \frac{1}{n}$, $y_n = n$, τότε $x_n - y_n = \frac{1}{n} \to 0$,

αλλά $f(x_n) - f(y_n) = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} \to 2 \neq 0$

$f'(x) = 2x$
y_n τω. $f(y_n) \to +\infty$
και x_n "κοντά" στο y_n

· η $g(x) = \cos(x^2)$ έχει παράγωγο $g'(x) = -2x \sin(x^2)$.

$x_n = \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}}$, $y_n = \sqrt{n\pi}$

$x_n - y_n \to 0$ (άσκηση) $|g(x_n) - g(y_n)| = \left|\cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right| = 1$

<u>Πρόταση</u> (Ισχύουν οι συνεπαγωγές (α) $\Rightarrow$ (β) $\Rightarrow$ (γ) αλλά όχι οι αντίστροφες τους)

Έστω $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$

(α) Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής

(β) Για κάθε (x_n) βασική ακολουθία στον X, η $(f(x_n))$ είναι βασική στον Y

(γ) Η f είναι συνεχής

<u>Απόδειξη</u>: (α) $\Rightarrow$ (β) Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον X.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, $\exists \delta > 0$ τω. "$d(x,y) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$" (*)

Αφού η (x_n) είναι βασική, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τω.

$\forall n, m \geq n_0$ $d(x_n, x_m) < \delta \overset{(*)}{\Rightarrow} \forall n, m \geq n_0$ $\sigma(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$

$\forall n, m \geq n_0$
$\sigma(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$
$\Uparrow$
$d(x_n, x_m) < \delta$

Άρα η $(f(x_n))$ είναι βασική στο Y.

$x_n \to x$
$\Downarrow$
(x_n) βασική
$\Downarrow$ υπόθεση
$(f(x_n))$ βασική
$\Downarrow ?$
$f(x_n)$ συγκλίνει στο $f(x)$.

(β) $\Rightarrow$ (γ) Έστω $x \in X$. Για ν.δ.ο. η f είναι συνεχής στο x, παίρνουμε τυχούσα $x_n \to x$ και δ.ο. $f(x_n) \to f(x)$.

Ορίζουμε z_n : $x_1, x, x_2, x, x_3, x, \dots$, δηλ. $z_n = \begin{cases} x_k, & n = 2k-1 \\ x, & n = 2k \end{cases}$

Τότε $z_n \to x$ (γιατί $z_{2k-1} \to x$, $z_{2k} \to x$)

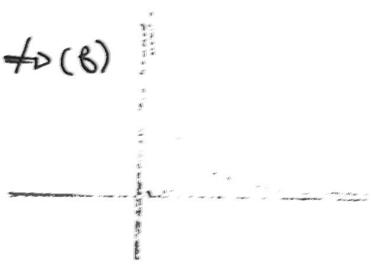
$$\Downarrow$$

$$(z_n) \text{ βασική} \xRightarrow{\text{υπόθεση}} (f(z_n)) \text{ βασική}$$

Επίσης, $f(z_{2k}) = f(x) =$ σταθερή, άρα συγκλίνουσα.
Η $(f(z_n))$ είναι βασική <u>και</u> έχει συγκλίνουσα υπακολουθία την $f(z_{2k}) \to f(x)$. $f(z_n) \to f(x) \Rightarrow \underbrace{f(z_{2k-1})}_{= f(x_k)} \to f(x)$, δηλ. $f(x_k) \to f(x)$

(β) $\not\Rightarrow$ (α) $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$

(γ) $\not\Rightarrow$ (β)



$g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ $g(x) = \frac{1}{x}$

<u>Πιο αναλυτικά</u>

(β) $\not\Rightarrow$ (α) Έχουμε δει ότι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ <u>δεν</u> είναι ομοιόμορφα συνεχής, όμως απεικονίζει "βασικές σε βασικές".
Έστω (x_n) βασική στο $\mathbb{R}$. Τότε $\exists x \in \mathbb{R}$, τω.
$x_n \to x \xRightarrow{f \text{ συνεχής}} f(x_n) \to f(x) \Rightarrow (f(x_n))$ συγκλίνουσα $\Rightarrow$
$\Rightarrow (f(x_n))$ βασική

(γ) $\not\Rightarrow$ (β) Η $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ είναι συνεχής.

Όμως, αν πάρουμε $x_n = \frac{1}{n}$, τότε η (x_n) είναι βασική
(π.χ. στο $\mathbb{R}$, $\frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{n}\right)$ βασική)

Όμως, $f(x_n) = f\left(\frac{1}{n}\right) = n \to +\infty$, άρα η $(f(x_n))$ δεν είναι βασική.

Ορισμός: Μια συνάρτηση $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$ λέγεται Lipschitz με σταθερά $M>0$, αν "$\forall x,y\in X$ έχουμε $\sigma(f(x),f(y))\leq M\cdot d(x,y)$"

Πρόταση

Κάθε Lipschitz συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής (άρα και συνεχής)

Απόδειξη: Έχουμε $M>0$ τω. $\forall x,y\in X$ $\sigma(f(x),f(y))\leq M\cdot d(x,y)$.
Έστω $\varepsilon>0$. Επιλέγουμε $\delta=\frac{\varepsilon}{M}$.

Αν $x,y\in X$ με $d(x,y)<\delta=\frac{\varepsilon}{M}$, τότε $\sigma(f(x),f(y))\leq M\cdot d(x,y)<$

$< M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$

Ασκήσεις

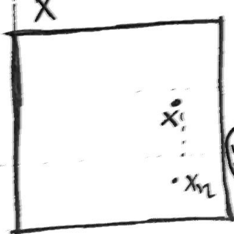
(1) Έστω $f,g:(X,d)\to(Y,\sigma)$ συνεχείς και D πυκνό υποσύνολο του X

(α) Το $E=\{x\in X: f(x)=g(x)\}$ είναι κλειστό.
(β) Αν $f(x)=g(x)$ $\forall x\in D$, τότε $f\equiv g$

Λύση: (α) Έστω $x_n\in E$ και $x_n\to x\in X$. Θ.δ.ο. $x\in E$.
Έχουμε $f(x_n)=g(x_n)$ $\forall n$ και $x_n\to x \Rightarrow f(x_n)\to f(x)$ και $g(x_n)\to g(x)$ (γιατί f,g συνεχής).

$$\left.\begin{array}{l} f(x_n) \longrightarrow f(x) \\ \quad \| \\ g(x_n) \longrightarrow g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow$$ Από μοναδικότητα ορίου $f(x)=g(x)$, άρα $x \in E$.

(β) Παίρνουμε τυχόν $x \in X$ και δ.ο. $f(x)=g(x)$.



Υπάρχει (x_n) στο D τ.ω. $x_n \to x$. Τότε

$$\left.\begin{array}{l} f(x_n) \longrightarrow f(x) \\ \quad \| \leftarrow \text{υπόθεση } x_n \in D \\ g(x_n) \longrightarrow g(x) \end{array}\right\} \underset{\text{ορίου}}{\overset{\text{Μοναδ.}}{\Longrightarrow}} f(x)=g(x)$$

③ $A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : e^{x^2y + \sin(z^3y^2)} \cdot \cos(xy^4 + 7z^2+2) < 4 \}$ <u>ανοικτό</u>

<u>Λύση</u>: Θεωρώ την $f(x,y,z) = e^{x^2y+\sin(z^3y^2)} \cdot \cos(xy^4+7z^2+2)$, $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, που είναι συνεχής και έστω $\boxed{A = f^{-1}((-\infty,4))}$

$= \{ (x,y,z) : f(x,y,z) \underset{<4}{\in} (-\infty,4) \}$

$\rightsquigarrow$ Το A είναι ανοικτό ως αντίστροφη εικόνα του $G=(-\infty,4)$ που είναι ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}$.

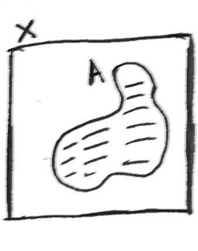
④ (α) Έστω $f: (X,d) \to \mathbb{R}$ και ορίζουμε $Z(f) = \{x \in X : f(x)=0\}$

Ν.δ.ο. αν η f είναι συνεχής, τότε το $Z(f)$ είναι κλειστό.

(β) Αν $A \subseteq (X,d)$ κλειστό, τότε $\exists f: (X,d) \to \mathbb{R}$ συνεχής τ.ω. $Z(f)=A$.

<u>Λύση</u>: (α) $Z(f) = f^{-1}(\underbrace{\{0\}}_{\text{κλειστό} \subseteq \mathbb{R}}) =$ κλειστό $\subseteq X$ ως αντίστροφη εικόνα κλειστού

(β)

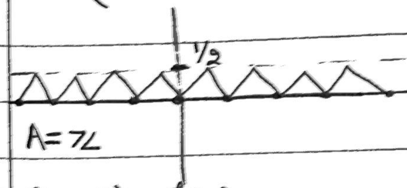


Ορίζουμε $f(x) = \mathrm{dist}(x,A)$. Η f είναι Lipschitz (με σταθερά 1) άρα συνεχής.

Έχουμε $f(x)=0 \iff \mathrm{dist}(x,A)=0 \iff x \in \bar{A} = A$, ($A$ κλειστό)

Άρα $A = \{x \in X : f(x) = 0\} = Z(f)$.

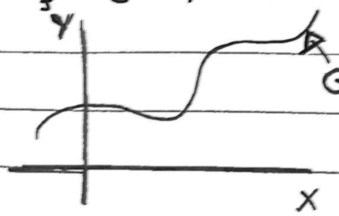
Αν $(A \neq \phi)$ Θεωρούμε την $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ με $f \equiv 1 \Rightarrow Z(f) = \phi$



$A = \mathbb{Z}$

$\text{dist}(x, \mathbb{Z}) = f(x)$

⑥ Έστω $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$. Το <u>γράφημα</u> της f είναι το
$G_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\} \subseteq X \times Y$.



Δ.ο. αν η f είναι συνεχής, τότε το G_f είναι κλειστό $\subseteq X \times Y$ (με οποιαδήποτε μετρική γινόμενο)

<u>Λύση</u>: Παίρνουμε $(x_n, y_n) \in G_f$, υποθέτουμε ότι $(x_n, y_n) \to (x, y) \in X \times Y$ και δ.ο. $(x, y) \in G_f$

$(x_n, y_n) \in G_f \leadsto y_n = f(x_n)$

$(x_n, y_n) \to (x, y) \overset{\text{Μετρική}}{\underset{\text{Γινόμενο}}{\leadsto}} x_n \to x$ και $y_n \to y$

$\boxed{\text{Ζητάμε } (x,y) \in G_f \text{ ανν } y = f(x)}$

$x_n \to x \overset{f \text{ συνεχής}}{\Downarrow} f(x_n) \to f(x)$

$y_n \to y \overset{y_n = f(x_n)}{\Downarrow} f(x_n) \to y$

$$\underbrace{f(x_n) \to f(x) \qquad f(x_n) \to y}_{\Downarrow \text{ Μοναδικότητα Ορίου}}$$

$y = f(x)$

$\Downarrow$

$(x, y) = (x, f(x)) \in G_f$.

Το αντίστροφο <u>δεν</u> ισχύει

$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1/x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ <u>ΔΕΝ</u> είναι συνεχής στο 0.

<u>Άσκηση</u>: G κλειστό