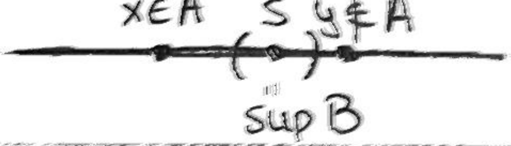
4/11/21

Ασκηση 19

Έστω $A \neq \emptyset$ και $A \neq \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$.
Τότε το A δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα ανοιχτό & κλειστό
(τα μόνα ανοικτά και κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι το $\emptyset$ & $\mathbb{R}$)

Λύση: Έστω, προς άτοπο, ότι υπάρχει $\emptyset \subsetneq A \subsetneq \mathbb{R}$ ανοικτό και κλειστό



- Υπάρχει $x \in A$
- Υπάρχει $y \notin A \Rightarrow x \neq y$

(μπορούμε να υποθέσουμε ότι $y > x$)

Ορίζουμε $B = \{t \in A : x \leq t < y\}$

- $B \neq \emptyset$, γιατί $x \in A$
- B άνω φραγμένο από το y

Άρα $\exists\, s = \sup B$

- Έχουμε $s = \sup B \leq y \to$ άνω φράγμα του B

και $\boxed{s \in A}$: $\exists\, (t_n)$ στο B τ.ω. $t_n \to s$ (χαρ/σμος sup με ακολουθίες)

Όμως $t_n \in A$, άρα $s \in \bar{A} = A$, γιατί το A είναι κλειστό

Όμως, $y \notin A$, άρα $\boxed{s<y}$

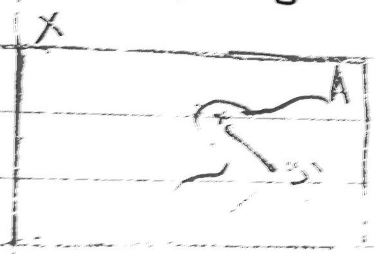
Αφού το A είναι ανοικτό και $s \in A$, $\exists \delta>0$ τ.ω. $(s-\delta, s+\delta) \subseteq A$
και μικραίνοντας το δ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $s<s+\delta<y$

Αν πάρω z: $s<z<s+\delta$ τότε $\left.\begin{array}{l} z<y \\ z\in A \\ z>s\geq x \end{array}\right\} \Rightarrow z \in B$ και $z>s=\sup B$ άτοπο

Σχετικώς ανοικτά και σχετικώς κλειστά σύνολα

Έστω (X,d) μ.χ. και $\emptyset \neq A \subseteq X$.

Η <u>σχετική μετρική στο A</u> είναι η $d_A : A\times A \to [0,+\infty)$
με $d_A(x,y) = d(x,y)$, $x,y \in A$

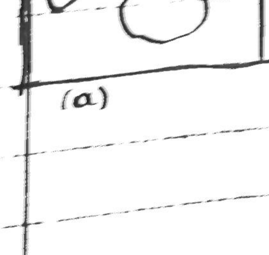


<u>Πρόταση</u> (Περιγραφή των ανοικτών και κλειστών υποσυνόλων του (A,d_A))

Έστω $B \subseteq A$.

(α) Το B είναι d_A-ανοικτό $\iff \exists V \subseteq X$ ανοικτό τ.ω. $B = A\cap V$

(β) Το B είναι d_A-κλειστό $\iff \exists F \subseteq X$ κλειστό τ.ω. $B = A \cap F$



(α)

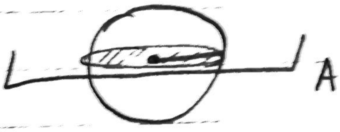
Παράδειγμα

$X = \mathbb{R}$, $A = [0,1] \cup \{2\}$

$[0, 1/2)$ ανοικτό $\subseteq A$

$\underbrace{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}_{V} \cap A$ και $\{2\} = \underbrace{\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)}_{V} \cap A$

Λήμμα



Έστω $x \in A$, $\emptyset \neq A \subseteq (X, d)$.
Για κάθε $\varepsilon > 0$: $B_{d_A}(x, \varepsilon) = B_d(x,\varepsilon) \cap A$

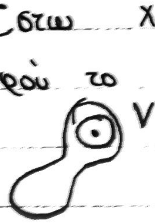
Απόδειξη: $B_{d_A}(x, \varepsilon) = \{y \in A : d_A(y,x) < \varepsilon\} = \{y \in A : d(y,x) < \varepsilon\}$
$= \{y \in X : y \in A \wedge d(y,x) < \varepsilon\} = A \cap \{y \in X : d(y,x) < \varepsilon\}$
$= A \cap B_d(x, \varepsilon)$

Απόδειξη της πρότασης: (α) $(\Rightarrow)$ Έστω B d_A-ανοικτό.
Για κάθε $x \in B$ $\exists\, \varepsilon_x > 0$ τ.ω. $B_{d_A}(x, \varepsilon_x) \subseteq B$.
Συνεπώς, $B = \bigcup_{x \in B} B_{d_A}(x, \varepsilon_x) \underset{\text{Λήμμα}}{=} \bigcup_{x \in B} (A \cap B_d(x, \varepsilon_x)) =$

$= A \cap \underbrace{\left(\bigcup_{x \in B} B_d(x, \varepsilon_x)\right)}$

V : είναι ανοικτό, γιατί είναι ένωση από ανοικτές μπάλες του X.

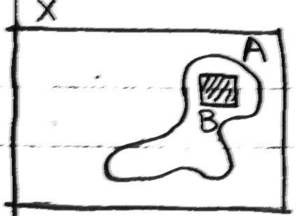
$(\Leftarrow)$ Έστω V ανοικτό $\subseteq X$ και θεωρούμε το $B = A \cap V$.
Θ.ν.δ.ο. το B είναι d_A-ανοικτό.
Έστω $x \in B$. Τότε $x \in A$ και $x \in V$.
Αφού το V είναι ανοικτό $\subseteq X$ $\exists\, \varepsilon > 0$: $B_d(x, \varepsilon) \subseteq V \Rightarrow$



$\Rightarrow \underbrace{A \cap B_d(x, \varepsilon)}_{\overset{\shortparallel}{B_{d_A}(x,\varepsilon)}} \subseteq A \cap V = B$.

Άρα το x είναι εσωτερικό σημείο του $B = A \cap V$ στον (A, d_A)

(β) ($\Longrightarrow$) Έστω B κλειστό υποσύνολο του (A, d_A)



Τότε το $A \setminus B$ είναι ανοικτό στον (A, d_A)
Από το (α) $\exists\, V$ ανοικτό στον X τ.ω. $A \setminus B = A \cap V$
Γράφουμε $B = A \setminus (A \setminus B) = A \setminus (A \cap V) = A \cap (A \cap V)^c =$

$$= A \cap (A^c \cup V^c) = \underbrace{(A \cap A^c)}_{=\emptyset} \cup (A \cap V^c) = A \cap V^c$$

Αν θέσω $F = V^c$, τότε το F είναι κλειστό $\subseteq X$, διατί V ανοικτό και $B = A \cap F$

($\Longleftarrow$) Παίρνουμε F κλειστό $\subseteq X$ και θ.ν.δ.ο. το $A \cap F$ είναι κλειστό υποσύνολο του (A, d_A).

Θεωρούμε (x_n) στο $A \cap F$, η οποία συγκλίνει ως προς d_A σε κάποιο $\underline{x \in A}$ θ.δ.ο. $\underline{x \in A \cap F}$.

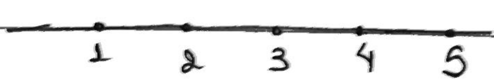
Έχουμε $d_A(x_n, x) \to 0$, δηλ. $d(x_n, x) \to 0$
άρα $x_n \to x$ στον (X, d).
Όμως, $x_n \in A \cap F \subseteq F$ και το F είναι κλειστό $\subseteq (X, d)$
Άρα, $\underline{x \in F}$. Τελικά, $x \in A$ και $x \in F \Rightarrow x \in A \cap F$.

Ασκήσεις

Θέμα εξετάσεων ~ (39) $X = \mathbb{R}$. Εξετάστε αν $\exists\, E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$, $E \neq \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) Το E είναι άπειρο σύνολο και δεν έχει σ.σ.

Λύση: ΝΑΙ $E = \mathbb{N}$



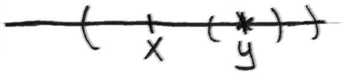
Το E είναι κλειστό, άρα α.ν.δ.ο. κανένα $n \in \mathbb{N}$ δεν είναι σ.σ. του $\mathbb{N}$
Το $\left(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{N}$ είναι πεπερασμένο, $n \notin \mathbb{N}'$

(β) Το Ε έχει άπειρα σ.σ. και κανένα εσωτερικό σημείο.

<u>Λύση</u>: <u>ΝΑΙ</u> $E = \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$ και $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ και $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$
γιατί σε κάθε $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ υπάρχουν άπειροι ρητοί

(γ) Το Ε είναι ανοικτό, αλλά δεν έχει σ.σ.

<u>Λύση</u>: <u>ΟΧΙ</u> Αν Ε είναι ένα τέτοιο σύνολο, αφού $E \neq \emptyset$ παίρνουμε κάποιο $x \in E$ και αφού το Ε είναι ανοικτό βρίσκουμε $\delta > 0$ τω. $(x-\delta, x+\delta) \subseteq E$.



Τότε κάθε $y \in (x-\delta, x+\delta)$ είναι σ.σ. του Ε
$\forall r > 0 \overset{\text{μικρό}}{:} (y-r, y+r) \subseteq (x-\delta, x+\delta) \subseteq E$

άρα στο $(y-r, y+r)$ υπάρχουν άπειρα σημεία του Ε

(δ) Το Ε είναι ανοικτό και πυκνό $\subseteq \mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>: <u>ΝΑΙ</u> $E = \mathbb{R} \setminus \{d\}$, d οποιοσδήποτε πραγματικός

(ε) Το Ε είναι φραγμένο και έχει άπειρα μεμονωμένα σημεία

<u>Λύση</u>: <u>ΝΑΙ</u>

$E = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

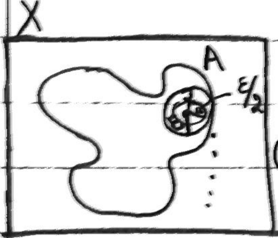
Κάθε στοιχείο του Ε είναι μεμονωμένο σημείο του και $E \subseteq [0,1] \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Ε φραγμένο.

Τυπικά: Δ.ο. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left| \frac{1}{k} - \frac{1}{n} \right| \geq \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n(n+1)}$

οπότε για $\varepsilon = \frac{1}{n(n+1)}$, $B\left(\frac{1}{n}, \varepsilon\right) \cap E = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$

Άρα $\frac{1}{n} \notin E'$ (είναι μεμονωμένο σημείο του ε).

(45) Έστω $A \subseteq (X,d)$ ανοικτό.
Αν $x \in A$ και (x_n) στο X τ.ω. $x_n \to x$, ν.α.ο. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$ $B(x, \frac{1}{n}) \subseteq A$.



Λύση: ① Αφού A είναι ανοικτό, $\exists \varepsilon > 0$: $B(x,\varepsilon) \subseteq A$

② Θεωρούμε την $B(x, \varepsilon/2)$.
Αφού $x_n \to x$ $\exists n_1 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_1$ $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ $(x_n \in B(x, \varepsilon/2))$

③ $\exists n_2 \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{n_2} < \frac{\varepsilon}{2}$. Ορίζουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

④ Έστω $n \geq n_0$. Τότε $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ και $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_2} < \frac{\varepsilon}{2}$

Ισχυρισμός: $B(x_n, \frac{1}{n}) \subseteq A$.

Έστω $y \in B(x_n, \frac{1}{n})$. Τότε $d(y,x) \leq d(y, x_n) + d(x_n, x) < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Άρα $y \in B(x,\varepsilon) \subseteq A$.

(14) Βρείτε ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, |\cdot|)$

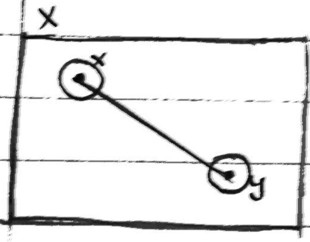
Ιδέα: Ορίζουμε $D = \mathbb{Q} + \sqrt{2} = \{q + \sqrt{2} : q \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
Το D είναι αριθμήσιμο (ισοπληθικό με το $\mathbb{Q}$)

Το D είναι πυκνό στο $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: Έστω $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$$\boxed{\begin{array}{l} q_n + \sqrt{2} \to \xi \\ q_n \to \xi - \sqrt{2} \end{array}}$$

Υπάρχει (q_n) στο $\mathbb{Q}$ τ.ω. $q_n \to \xi - \sqrt{2}$ (στο $\mathbb{R}$)
$\Rightarrow \underbrace{q_n + \sqrt{2}}_{\in D} \to \xi$ (στο $\mathbb{R}$) ή ισοδύναμα στο $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

(22) Έστω (X,d) μ.χ. και $x,y\in X$, $x\neq y$.
Ν.δο. αν υπάρχουν ανοικτά $U,V\subseteq X$ τω. $x\in U$, $y\in V$, $\overline{U}\cap\overline{V}=\emptyset$.



Λύση: Παίρνουμε $\varepsilon=\dfrac{d(x,y)}{3}$

Ορίζουμε $\underset{\text{ανοιχτό},\, x\in U}{U=B(x,\varepsilon)}$, $\underset{\text{ανοιχτό},\, y\in V}{V=B(y,\varepsilon)}$

- $\overline{U}=\overline{B(x,\varepsilon)}\subseteq\hat{B}(x,\varepsilon)$
- $\overline{V}=\overline{B(y,\varepsilon)}\subseteq\hat{B}(y,\varepsilon)$

$\Big\}$ (*)

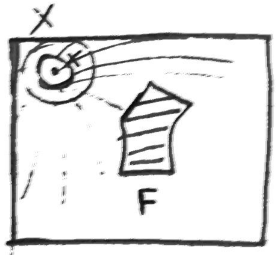
Αν $z\in\overline{U}\cap\overline{V}$ τότε $d(z,x)\leq\varepsilon$ και $d(z,y)\leq\varepsilon$ (από τις (*))

$\Rightarrow d(x,y)\leq d(x,\varepsilon)+d(y,\varepsilon)\leq 2\varepsilon=\frac{2}{3}d(x,y)<d(x,y)$ άτοπο

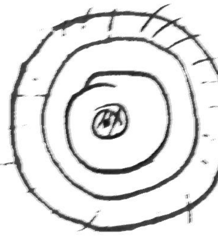
Άσκηση

Αν $0<r_1<r_2$ τότε $\hat{B}(x,r_1)\subseteq B(x,r_2)$

(23) Έστω (X,d) μ.χ., $F\subseteq X$ κλειστό, $x\notin F$.
Ν.δο. υπάρχουν ανοικτά $U,V\subseteq X$ τω. $x\in U$, $F\subseteq V$ & $\overline{U}\cap\overline{V}=\emptyset$



Λύση: Βρίσκουμε $0<r_1<r_2<r_3<r_4$ τω.
$B(x,r_4)\cap F=\emptyset$ (F κλειστό, $x\notin F$)
Ορίζω $U=B(x,r_1)\Rightarrow\overline{U}\subseteq B(x,r_2)$
$V=X\setminus\hat{B}(x,r_3)\Rightarrow\overline{V}\subseteq X\setminus B(x,r_2)$



Τότε $x\in U$, $F\subseteq V$, $\overline{U}\cap\overline{V}=\emptyset$.