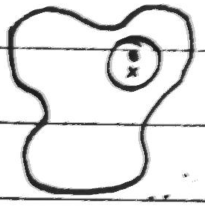
19/10/21

Ανοιχτά και κλειστά σύνολα

• $G \subseteq X$ ανοικτό, αν $\forall x \in G$ $\exists \delta > 0$ τ.ω. $B(x,\delta) \subseteq G$

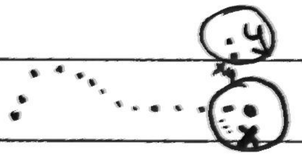


• $F \subseteq X$ κλειστό, αν το $X \setminus F$ είναι ανοικτό. Ισοδύναμα
" $\forall (x_n)$ στο F τ.ω. $x_n \to x \in X$ έχουμε $x \in F$ "

Παράδειγμα

Έστω (x_n) στον (X,d) τ.ω. $x_n \to x \in X$.
Τότε το $F = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ είναι κλειστό.

Λύση: Θ.δ.ο. το $X \setminus F$ είναι ανοικτό. Έστω $y \in X \setminus F$.



Τότε $y \neq x$, $y \neq x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Αφού $y \neq x$, αν πάρουμε $0 < \delta < \frac{d(x,y)}{2}$, τότε
$B(x,\delta) \cap B(y,\delta) = \emptyset$. Θ.δ.ο. $\boxed{B(y,\delta) \subseteq X \setminus F}$

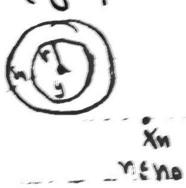
• Αφού $x_n \to x$. $\exists n_0 : \forall n > n_0$ $x_n \in B(x,\delta) \Rightarrow \forall n > n_0$ $x_n \notin B(y,\delta)$

• Για κάθε $n = 1, \ldots, n_0$ ξέρουμε ότι $x_n \neq y$.

Άρα $\exists \delta_n > 0$ (π.χ. $0 < \delta_n < d(x_n,y)$) τ.ω. $x_n \notin B(y,\delta_n)$.

Ορίζουμε $r = \min\{\delta, \delta_1, \dots, \delta_{n_0}\} > 0$. Τότε $x \notin B(y,r)$ και $\forall n$ $x_n \notin B(y,r)$

$$\Rightarrow B(y,r) \cap F = \emptyset \Rightarrow B(y,r) \in X \setminus F.$$



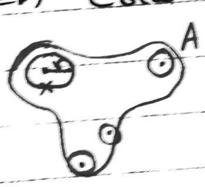
Πρόταση 1

Έστω $A \subseteq (X,d)$. Τότε το A είναι ανοικτό ανν γράφεται ως ένωση ανοικτών μπαλών : $A = \bigcup_{i \in I} B(x_i, r_i)$

<u>Απόδειξη</u>: $(\Leftarrow)$ Κάθε $B(x_i, r_i)$, $i \in I$ είναι ανοικτό σύνολο και οποιοδήποτε ένωση ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο.

$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} B(x_i, r_i)$ ανοικτό $\Rightarrow A$ ανοικτό

$(\Rightarrow)$ Έστω $A \subseteq X$ ανοικτό. $\forall x \in A$ $\exists r_x > 0$ τω. $B(x, r_x) \subseteq A$. Τότε $A \subseteq \bigcup_{x \in A} B(x, r_x) \subseteq A \Rightarrow \bigcup_{x \in A} B(x, r_x) = A$



Πρόταση 2

Κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων.

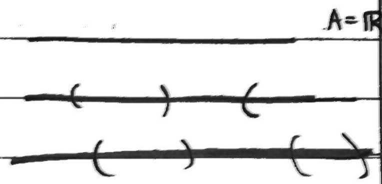
Ανοιχτά διαστήματα στο $\mathbb{R}$.

(a,b) όπου $a<b$ $a,b\in\mathbb{R}$

$(-\infty,b)$, $b\in\mathbb{R}$

$(a,+\infty)$, $a\in\mathbb{R}$

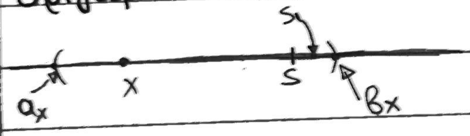
$\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$



Απόδειξη: Έστω $x\in A$. (ξέρουμε ότι το x είναι εσωτερικό σημείο A)

$\exists\, \delta_x>0:\ (x-\delta_x,\ x+\delta_x)\subseteq A.$

Ορίζουμε $a_x=\inf\underbrace{\{t<x:\ (t,x]\subseteq A\}}_{A_x}$ και $b_x=\sup\underbrace{\{s>x:\ [x,s)\subseteq A\}}_{B_x}$



$\underbrace{(x-\delta_x,\ x]}_{t}\subseteq A$ και $\underbrace{[x,\ x+\delta)}_{s}\subseteq A$

(*) Ενδέχεται να έχουμε $a_x=-\infty$ ή $b_x=+\infty$.

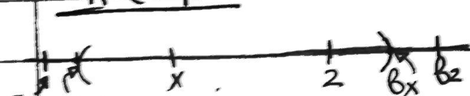
Ισχυρισμός: $(a_x,b_x)\subseteq A$

- $[x,b_x)\subseteq A$. Έστω $x<s<b_x$. $\exists\, s_1>s$, $s_1\in B_x$ τω. $[x,s_1)\subseteq A$

Τότε $s\in[x,s_1)\Longrightarrow \underline{s\in A}$

- $(a_x,x]\in A$ όμοια.

Ισχυρισμός: Έστω $x\in A$. Αν $z\in(a_x,b_x)\Longrightarrow (a_z,b_z)=(a_x,b_x)$



Έχουμε $[z,b_x)\subseteq A\Longrightarrow b_x\le\sup B_z=b_z$

Όμοια $a_z\le a_x$

$\boxed{\begin{array}{c}B_z=\{s>z:\ [z,s)\subseteq A\}\\ b_x\in B_z\end{array}}$

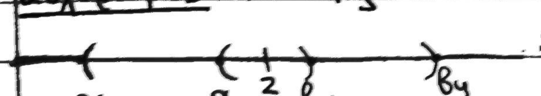
Άρα $(a_x,b_x)\subseteq(a_z,b_z)$

Όμως: $x\in(a_x,b_x)\Longrightarrow x\in(a_z,b_z)\Longrightarrow (a_z,b_z)\subseteq(a_x,b_x)$

όπως πριν αλλάζοντας τους ρόλους των x και z

Τελικά, $(a_x,b_x)=(a_z,b_z)$

Ισχυρισμός: Αν $x,y\in A$ και $(a_x,b_x)\cap(a_y,b_y)\neq\varnothing\Longrightarrow(a_x,b_x)=(a_y,b_y)$



Απόδειξη : Έστω $z \in (a_x, b_x) \cap (a_y, b_y)$

- $z \in (a_x, b_x) \Rightarrow (a_z, b_z) = (a_x, b_x)$
- $z \in (a_y, b_y) \Rightarrow (a_z, b_z) = (a_y, b_y)$

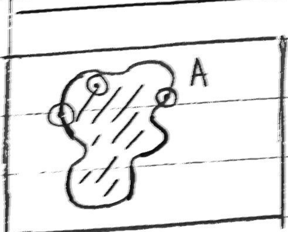
Γράψαμε $A = \bigcup_{x \in A} (a_x, b_x)$.

Τα (a_x, b_x) ταυτίζονται ή είναι ξένα. Τα παίρνουμε μία φορά το καθένα, τα συμβολίζουμε I_j, $j \in J$. και έχουμε $A = \bigcup_{j \in J} I_j$ και τα I είναι ξένα.

Το σύνολο J είναι αριθμήσιμο. Επιλέγουμε ρητό $q_j \in I_j$ και η απεικόνιση $f : J \to \mathbb{Q}$ με $f(j) = q_j \in I_j$ είναι 1-1, γιατί τα I_j είναι ξένα.

Το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο $\Rightarrow J$ αριθμήσιμο

Εσωτερικό - κλειστή θήκη - σημεία συσσώρευσης - σύνορο



① Το εσωτερικό του A : όλα τα $x \in A$ για τα οποία $\exists \delta > 0 : B(x, \delta) \subseteq A$

② Η κλειστή θήκη του A : όλα τα $x \in A$ για τα οποία $\forall \delta > 0 \quad B(x, \delta) \cap A \neq \emptyset$ (τα $x \in X$ που μπορώ να προσεγγίσω όσο καλά θέλω με σημεία του A)

Ορισμός : Το εσωτερικό του $A \subseteq (X, d)$, A° ή $\text{int}(A)$ είναι το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων του A, δηλ.

$$x \in A^\circ \overset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \exists \delta > 0 : B(x, \delta) \subseteq A$$

Παρατηρήσεις - Παραδείγματα

① $A^\circ \subseteq A$ $\quad (x \in A^\circ \iff \exists \delta > 0 : \underset{x\in}{B(x,\delta)} \subseteq A \Rightarrow x \in A)$

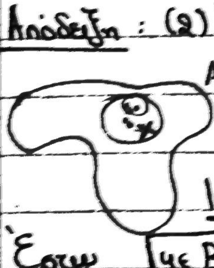
② A ανοικτό $\Rightarrow A = A^\circ$
(αν $x \in A$ και το x είναι εσωτερικό σημείο του A, άρα $x \in A^\circ$, δηλ. $A \subseteq A^\circ$)

③  $A = (0,1] \rightsquigarrow A^\circ = (0,1)$
αφού $1 \notin A^\circ$

④ $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$ $\rightsquigarrow \mathbb{Q}^\circ = \emptyset$ (αν $x \in \mathbb{Q}^\circ \Rightarrow \exists \delta > 0$ τ.ω. $(x-\delta, x+\delta) \subseteq \mathbb{Q}$ άτοπο
αφού στο $(x-\delta, x+\delta)$ υπάρχουν άρρητοι)

Πρόταση (ιδιότητες του εσωτερικού)

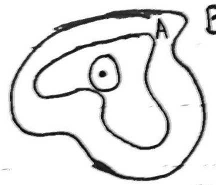
Έστω $A, B \subseteq (X, d)$
(1) $A^\circ \subseteq A$
(2) Το A° είναι ανοικτό σύνολο
(3) A ανοικτό $\iff A^\circ = A \iff A \subseteq A^\circ$
(4) Αν $A \subseteq B \Rightarrow A^\circ \subseteq B^\circ$
(5) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ και $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$
(6) Αν $V \subseteq A$ και το V ανοικτό, τότε $V \subseteq A^\circ$
(6') Το A° είναι η ένωση όλων των ανοικτών υποσυνόλων του A

Απόδειξη: (2) Έστω $x \in A^\circ$. Θα βρούμε $\delta > 0$ τ.ω. $B(x,\delta) \subseteq A^\circ$.

Το x είναι εσωτερικό σημείο του A, άρα $\exists \delta > 0$
τ.ω. $B(x,\delta) \subseteq A$.
Ισχυρισμός: Για το ίδιο δ : $B(x,\delta) \subseteq A^\circ$.
Έστω $\boxed{y \in B(x,\delta)}$. Η $B(x,\delta)$ είναι ανοικτό σύνολο, άρα

$\exists r>0 : \underline{B(y,r) \subseteq B(x,\delta)}$. Τότε $B(y,r) \subseteq A \Rightarrow y$ εσωτερικό σημείο του A, δηλ. $\boxed{y \in A^\circ}$, δηλ. $B(x,\delta) \subseteq A^\circ$

(3)($\Leftarrow$) Αν $A \subseteq A^\circ$ αφού $A^\circ \subseteq A$ (από το (1)) έχουμε $A = A^\circ$.
Αφού το A° είναι ανοικτό (από το (1)) και $A = A^\circ \Rightarrow A$ ανοικτό

(4)

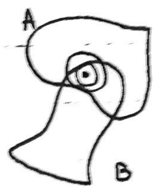


Έστω $x \in A^\circ$, $\exists \delta>0$ τ.ω. $B(x,\delta) \subseteq A \underset{\text{υπόθεση}}{\subseteq} B$

Άρα $B(x,\delta) \subseteq B \Rightarrow x \in B^\circ$

(5) $A \cap B \subseteq A \xrightarrow{(4)} (A\cap B)^\circ \subseteq A^\circ$
$A \cap B \subseteq B \xrightarrow{(4)} (A\cap B)^\circ \subseteq B^\circ$ $\Big\} \Rightarrow (A\cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$

Έστω $x \in A^\circ \cap B^\circ$. Αφού $x \in A^\circ$ $\exists \delta_1>0 : B(x,\delta_1) \subseteq A$.



Αφού $x \in B^\circ$ $\exists \delta_2>0 : B(x,\delta_2) \subseteq B$.

Αν $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B(x,\delta) \subseteq B(x,\delta_1) \subseteq A \\ B(x,\delta) \subseteq B \end{array}\right\} \Rightarrow B(x,\delta) \subseteq A \cap B$
$\underline{\text{δηλ.}}$ $x \in (A\cap B)^\circ$

$\left.\begin{array}{l} A \subseteq A\cup B \\ B \subseteq A \cup B \end{array}\right\} \xrightarrow{(4)} \left.\begin{array}{l} A^\circ \subseteq (A\cup B)^\circ \\ B^\circ \subseteq (A\cup B)^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A\cup B)^\circ$

(6) $V \subseteq A \xrightarrow{(4)} \underset{\substack{\| \\ V}}{V^\circ} \subseteq A^\circ \Rightarrow V \subseteq A^\circ$
γιατί V ανοικτό

$\underline{\text{Παράδειγμα}}$: Η ισότητα $A^\circ \cup B^\circ = (A\cup B)^\circ$ $\underline{\text{δεν}}$ ισχύει γενικά

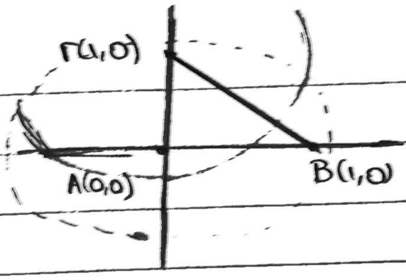
Έχουμε $(\underset{\substack{\| \\ A}}{\mathbb{Q}} \cup \underset{\substack{\| \\ B}}{(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})})^\circ = \mathbb{R}^\circ = \mathbb{R}$

Όμως, $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$ και $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^\circ = \emptyset$

(6') Αν πάρω οποιοδήποτε ανοικτό υποσύνολο του A, έστω V
$\Rightarrow V \subseteq A^\circ \Rightarrow A^\circ$ περιέχει την ένωση όλων των ανοικτών υποσυνόλων του A και A° περιέχεται σε αυτή την ένωση γιατί είναι ανοικτό και είναι ένα από αυτά τα V

Περιφερική Απόδειξη

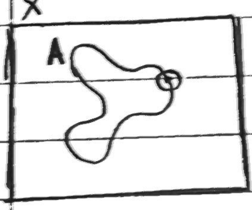
Ένα παράδειγμα:



$X = \{A, B, \Gamma\}$ με την Ευκλείδεια μετρική
$B(A, 1.1) = \{A, B, \Gamma\}$
$B(\Gamma, 1.3) = \{A, \Gamma\}$

Κλειστή Θήκη

Ορισμός: ① Έστω (X, d). Το $x \in X$ λέγεται σημείο επαφής του A, αν $\forall \delta > 0 \quad B(x, \delta) \cap A \neq \emptyset$.



② Η κλειστή θήκη του A ($\bar{A}$ ή $cl(A)$) είναι το σύνολο όλων των σημείων επαφής του A.

Παραδείγματα

①

$A = (0, 1]$
$\bar{A} = [0, 1]$

② $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, γιατί $\forall x \in \mathbb{R} \ \forall \delta > 0 \ (x-\delta, x+\delta) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

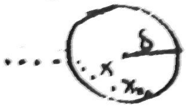
③ $\mathbb{Q}$ στο $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ $\rightsquigarrow$ $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$ (γιατί το $\mathbb{Q}$ είναι ολόκληρος ο χώρος)

Πρόταση (Χαρακτηρισμός του Σημείου Επαφής)

$x \in \bar{A} \iff \exists (x_n)$ στο A τ.ω. $x_n \to x$

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Έστω $x \in \bar{A}$. $\forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε $B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$.
Άρα $\exists x_n \in A$ τ.ω. $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \Rightarrow d(x_n, x) < \frac{1}{n} \to 0$.
Άρα η (x_n) είναι στο A και $x_n \to x$.

(⇐) Ξέρουμε ότι $\exists\,(x_n)$ στο A τ.ω. $x_n \to x$. Έστω $\delta>0$.
Αφού $x_n \to x$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall\, n \geq n_0$ $d(x_n,x)<\delta$, δηλ.



.... $x_{n_0} \in A$ και $x_{n_0} \in B(x,\delta) \Rightarrow B(x,\delta)\cap A \neq \emptyset$

Πρόταση (Ιδιότητες της Κλειστής Θήκης)

Έστω $A,B \subseteq (X,d)$.

(1) $A \subseteq \bar{A}$

(2) $\bar{A}$ κλειστό σύνολο

(3) A κλειστό $\Leftrightarrow A=\bar{A}$

(4) $A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$

(5) $\overline{A\cup B} = \bar{A}\cup\bar{B}$ και $\overline{A\cap B} \subseteq \bar{A}\cap\bar{B}$

(6) Αν F κλειστό και $A\subseteq F \Rightarrow \bar{A}\subseteq F$

Απόδειξη: (1) Έστω $x\in A$, $\forall\,\delta>0$ $x\in B(x,\delta)\cap A \Rightarrow B(x,\delta)\cap A\neq\emptyset$
Άρα $x\in\bar{A}$.

(2) Έστω (x_n) ακολουθία στο $\bar{A}$ τ.ω. $x_n \to x\in X$. Θ.δ.ο. $\boxed{x\in\bar{A}}$

Έστω $\delta>0$. Αφού $x_n \to x$ $\exists\, n_0 : \forall\, n\geq n_0$ $d(x_n,x)<\delta/2$
Παίρνουμε ένα τέτοιο n: $B\left(x_n,\frac{\delta}{2}\right) \subseteq B(x,\delta)$ (*)

Ζητάμε $B(x,\delta)\cap A\neq\emptyset$
Αν $d(y,x_n)<\delta/2$
$d(y,x)\leq d(y,x_n)+d(x_n,x)$
$<\delta/2+\delta/2=\delta$

Αφού $x_n\in\bar{A}$ $\exists\, z\in A\cap B(x_n,\delta/2)$
Τότε $z\in A$ και $z\in B(x,\delta)$ από την (*)
Δηλ. $B(x,\delta)\cap A\neq\emptyset$

(3) (⇒) Ξέρουμε ότι $A\subseteq\bar{A}$. Έστω $x\in\bar{A}$. Από την προηγούμενη πρόταση $\exists\, x_n\in A$ τ.ω. $x_n\to x$. Όμως A κλειστό, άρα $x\in A$.
(⇐) Από το (2) το $\bar{A}$ είναι κλειστό, δηλ. $A=\bar{A}$ είναι κλειστό σύνολο.

(4) Έστω $x \in \bar{A}$. Έστω $\delta > 0$. Έχουμε $B(x,\delta) \cap A \neq \emptyset$, γιατί $x \in \bar{A}$

και $B(x,\delta) \cap A \subseteq B(x,\delta) \cap B$, γιατί $A \subseteq B$.

Άρα, $B(x,\delta) \cap B \neq \emptyset$, αφού το $\delta > 0$ ήταν τυχόν $x \in \bar{B}$.

(5) $\left.\begin{array}{l} A \subseteq A \cup B \\ B \subseteq A \cup B \end{array}\right\} \xRightarrow{(4)} \bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$

Ομοίως $\left.\begin{array}{l} A \cap B \subseteq A \\ A \cap B \subseteq B \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$

Για την $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ έστω $x \in \overline{A \cup B}$. Υπάρχουν $x_n \in A \cup B$ τω. $x_n \to x$.

Είτε υπάρχουν άπειροι όροι x_n στο A είτε άπειροι όροι x_n στο B.

Στην $1^η$ περίπτωση: $\exists (x_{k_n})$ υπακολουθία της (x_n) στο A

Αφού $x_n \to x$ έχουμε $x_{k_n} \to x$. Συνεπώς, $x \in \bar{A}$.

Στην $2^η$ περίπτωση: Ομοίως συμπεραίνουμε ότι $x \in \bar{B}$.

Σε κάθε περίπτωση, $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.

Παράδειγμα

$A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \rightsquigarrow \bar{A} = \mathbb{R}$ και $\bar{B} = \mathbb{R}$

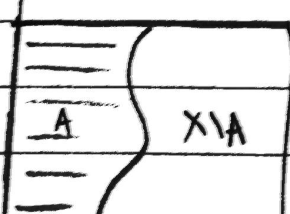
$\bar{A} \cap \bar{B} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$ ενώ $\overline{A \cap B} = \bar{\emptyset} = \emptyset$

Άρα εδώ $\overline{A \cap B} = \emptyset \subsetneq \mathbb{R} = \bar{A} \cap \bar{B}$

(6) Αφού $F \supseteq A \Rightarrow \underset{\substack{\| \\ F}}{\bar{F}} \supseteq \bar{A} \Rightarrow F \supseteq \bar{A}$.

F, γιατί F κλειστό

Θεώρημα (Δυϊσμός εσωτερικού και κλειστής θήκης)



Έστω $A \subseteq (X,d)$

① $X \setminus A^\circ = \overline{X \setminus A}$

② $X \setminus \bar{A} = (X \setminus A)^\circ$

<u>Απόδειξη</u>: $x \notin A^\circ \Longleftrightarrow \forall \delta > 0$ η $B(x,\delta)$ <u>δεν</u> περιέχεται στο A

$\Longleftrightarrow \forall \delta > 0 : B(x,\delta) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \Longleftrightarrow x \in \overline{X \setminus A}$.