12/10/21

Ασκήσεις (Κεφαλαίων 1 και 2)

1.4 Έστω (X,d) μ.χ. Ν.δ.ο. οι $\rho_1 = \min\{d,1\}$, $\rho_2 = \frac{d}{1+d}$, $d_a = d^a$ $(0<a<1)$ είναι μετρικές

<u>Λύση</u>: $\boxed{\rho_1}$ Τριγωνική ανισότητα. Έστω $x,y,z \in X$. Ζητάμε $\rho_1(x,y) \le \rho_1(x,z) + \rho_1(z,y) \iff \min\{d(x,y),1\} \le \min\{d(x,z),1\} + \min\{d(z,y),1\}$. Έχουμε $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \min\{d(x,y),1\} \le \min\{\underbrace{d(x,z)}_{t} + \underbrace{d(z,y)}_{s},1\}$$

Α.ν.δ.ο. $\min\{t+s,1\} \le \min\{t,1\} + \min\{s,1\}$ $\forall t,s \ge 0$

- Αν $t \ge 1$ ή $s \ge 1 \Rightarrow \min\{t,1\} + \min\{s,1\} \ge 1 \Rightarrow$
  $\Rightarrow \min\{t+s,1\} = 1 \le \min\{t,1\} + \min\{s,1\}$
- Αν $t \le 1$ και $s \le 1 \Rightarrow$ Ζητάμε $\min\{t+s,1\} \le \underset{\min\{1,t\}}{\overset{\shortparallel}{t}} + \underset{\min\{1,s\}}{\overset{\shortparallel}{s}}$ ισχύει

$\boxed{\rho_2}$ Ζητάμε $\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \le \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)}$ $\forall x,y,z \in X$

Θεωρούμε την $g(t) = \frac{t}{1+t}$, $t \ge 0$. $\left[g'(t) = \frac{1+\cancel{t}-\cancel{t}}{(1+t)^2} > 0 \Rightarrow g \nearrow\right]$

Αφού $\underbrace{d(x,y)}_{t} \le \underbrace{d(x,z) + d(z,y)}_{s}$ έχουμε $g(t) \le g(s) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \le \frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} = \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)} + \frac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \le$$

$$\le \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)}.$$

$\boxed{\rho_3}$ Ζητάμε $d(x,y)^a \le d(x,z)^a + d(z,y)^a$

Έχουμε $d(x,y)^a \le \big(\underbrace{d(x,z)}_{t} + \underbrace{d(z,y)}_{s}\big)^a \overset{;}{\le} \underbrace{d(x,z)^a}_{t} + \underbrace{d(z,y)^a}_{s}$

Άρα θέλουμε: $\forall t,s>0 \quad (t+s)^a \le t^a + s^a \iff \left(\frac{t}{s}+1\right)^a \le \Big(\underbrace{\frac{t}{s}}_{y}\Big)^a + 1$

Ισοδύναμα: $\forall y \ge 0 \quad (y+1)^a \le y^a + 1$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(y) = y^a + 1 - (y+1)^a$, $y \ge 0$.

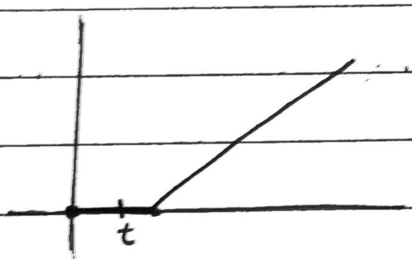
Έχουμε $h(0)=0$ και $h'(y) = a y^{a-1} - a(y+1)^{a-1} = \frac{a}{y^{1-a}} - \frac{a}{(y+1)^{1-a}} > 0$

γιατί $y < y+1 \Rightarrow y^{1-a} < (y+1)^{1-a}$ $\quad \boxed{0<a<1 \Rightarrow 1-a>0}$

(1.9) (α) Έστω $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ αύξουσα με $f(0)=0$ και υποπροσθετική $\forall x,y \ge 0$: $f(x+y) \le f(x) + f(y)$ και $f(x)>0$ $\forall x>0$. Ν.δ.ο. αν d είναι μια μετρική στο $X \ne \emptyset$ τότε η $f \circ d$ είναι μετρική στο X.

Λύση: 1. $f \circ d(x,y) = f(\underbrace{d(x,y)}_{\ge 0}) \ge 0$ (γιατί $\forall \varepsilon > 0$ $f(t) \ge f(0) = 0$)

$\ge 0 \rightsquigarrow$ άρα καλά ορισμένη.



επειδή f αύξουσα δεν σημαίνει γνησίως, γι' αυτό μας χρειάζεται η $f(x)>0$ $\forall x>0$ συνθήκη, γιατί αλλιώς μπορεί να είχαμε το παρ. σχήμα

Επίσης $f \circ d(x,y) = 0 \iff f(d(x,y)) = 0 \underset{f(t)>0}{\overset{\forall t}{\iff}} d(x,y) = 0 \overset{d \text{ μετρ.}}{\iff} x = y$

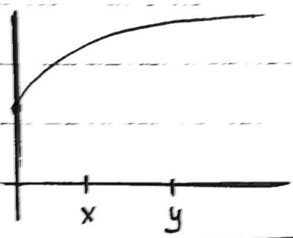
2. $f \circ d(y,x) = f(d(y,x)) = f(d(x,y)) = f \circ d(x,y)$

3. Έστω $x,y,z \in X$ $\quad f(d(x,y)) \le f(d(x,z) + d(z,y)) \le f(d(x,z)) + f(d(z,y))$

και f αύξουσα $\qquad$ f υποπροσθετική

(B) Έστω $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$. Ν.δ.ο. f κοίλη $\overset{(i)}{\Longrightarrow}$ $x \mapsto \frac{f(x)}{x},\ x>0$ φθίνουσα $\underset{(ii)}{\Longrightarrow}$ f υποπροσθετική

<u>Λύση</u>: (i)



$$\boxed{\begin{array}{c} f((1-t)u+tv) \geq (1-t)f(u)+t f(v) \\ \forall\, 0<t<1 \end{array}}$$

Έστω $0<x<y$

Έχουμε $x = \left(1-\frac{x}{y}\right)\cdot 0 + \frac{x}{y}\cdot y \Longrightarrow$

$$\overset{f \text{ κοίλη}}{\Longrightarrow} f(x) \geq \left(1-\frac{x}{y}\right)\underbrace{f(0)}_{\geq 0} + \frac{x}{y} f(y) \geq$$

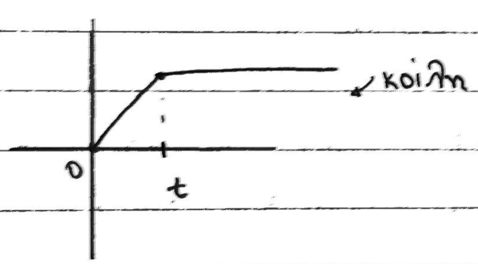
$$\geq \frac{x}{y} f(y) \Longrightarrow \frac{f(x)}{x} \geq \frac{f(y)}{y}$$

(ii)

$$\left.\begin{array}{l} x<x+y \Longrightarrow \frac{f(x+y)}{x+y} \leq \frac{f(x)}{x} \Longrightarrow \frac{x}{x+y} f(x+y) \leq f(x) \\ y<x+y \Longrightarrow \frac{f(x+y)}{x+y} \leq \frac{f(y)}{y} \Longrightarrow \frac{y}{x+y} f(x+y) \leq f(y) \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Longrightarrow}$$

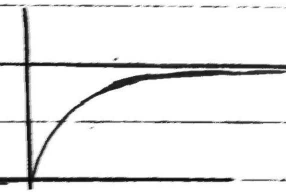
$$\overset{(+)}{\Longrightarrow} \underbrace{\left(\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x+y}\right)}_{\frac{x+y}{x+y} = 1} f(x+y) \leq f(x)+f(y) \Longrightarrow f(x+y) \leq f(x)+f(y)$$

Στην <u>Άσκηση 1.4</u>: $\rho_1(x,y) = \min\{d(x,y),1\} = f(d(x,y))$, όπου $f(t)=\min\{t,1\}$



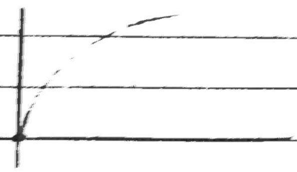
$\rho_2(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = f(d(x,y))$, όπου $g(t) = \frac{t}{1+t}$ $g'(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$,

$g''(t) = \frac{-2}{(1+t)^3} < 0$ άρα είναι κοίλη.



$\rho_3(x,y) = d_a(x,y) = d(x,y)^a = h(d(x,y))$, όπου $h(t) = t^a$

$h'(t) = a t^{a-1} > 0$, $h''(t) = a(a-1)t^{a-2} < 0$, γιατί $0<a<1$.



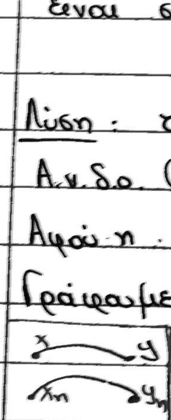
2.5) Έστω (X,d) μ.χ. Θεωρούμε τα $X\times X$ με οποιαδήποτε μετρική γινόμενο τ. Ν.δ.ο. η $d: (X\times X, \tau) \to \mathbb{R}$ με $(x,y)\mapsto d(x,y)$ είναι συνεχής συνάρτηση

<u>Λύση</u>: τ μετρική γινόμενο: $(x_n,y_n)\xrightarrow{\tau}(x,y) \iff x_n \xrightarrow{d} x$ και $y_n\xrightarrow{d} y$

Α.ν.δ.ο. (από αρχή μεταφοράς) "αν $(x_n,y_n)\xrightarrow{\tau}(x,y) \Rightarrow d(x_n,y_n)\longrightarrow d(x,y)$"

Αφού η τ είναι μετρική γινόμενο, έχουμε $x_n\xrightarrow{d}x$ και $y_n \xrightarrow{d} y$

Γράφουμε: $|d(x_n,y_n)-d(x,y)| \le \underbrace{d(x_n,x)}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{d(y_n,y)}_{\downarrow\, 0} \longrightarrow 0$.



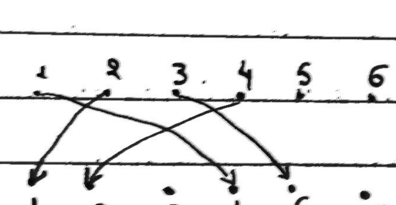
2.10) Έστω (x_n) στον (X,d). Ν.δ.ο. $x_n \to x\in X$ ανν η $(y_n)=(x_1,x,x_2,x,x_3,x,\dots\dots)$ συγκλίνει στο x

<u>Λύση</u>: $\boxed{y_n = \begin{cases} x_k, & n=2k-1 \\ x, & n=2k\end{cases}}$ $(\Rightarrow)$ $\left.\begin{array}{l} y_{2k-1}=x_k\to x \\ y_{2k}=x\to x\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Απει II}} y_n \to x$

$(\Leftarrow)$ Έχουμε $y_n \to x$, άρα κάθε υπακολουθία της συγκλίνει στο x.

Ειδικότερα, $x_k = y_{2k-1} \longrightarrow x$

$\sigma: \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ μετάθεση, αν είναι 1-1 κ επί



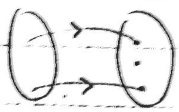
$y_1 = x_{\sigma(1)} = x_4$

$y_2 = x_{\sigma(2)} = x_1$

(2.11) Έστω (x_n) ακολουθία στον (X,d) με $x_n \to x$.
Αν $\sigma: \mathbb{N} \xrightarrow{1-1} \mathbb{N} \Rightarrow$ η ακολουθία $y_n = x_{\sigma(n)}$ συγκλίνει κι αυτή στο x

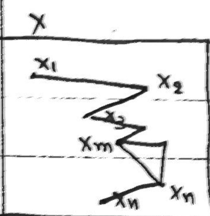
(*) Η y_n <u>δεν</u> είναι απαραίτητα υπακολουθία της (x_n), γιατί οι φυσική $\sigma(n)$ <u>δεν</u> είναι απαραίτητα αύξουσα.

<u>Λύση</u>: Έστω $\varepsilon>0$. Ζητάμε $N\in\mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n\geq N$ $d(y_n,x)<\varepsilon$ $\iff d(x_{\sigma(n)},x)<\varepsilon$. Έχουμε $x_n \to x$. Άρα για το δοθέν $\varepsilon>0$ $\exists n_0\in\mathbb{N}: \forall k>n_0$ $d(x_k,x)<\varepsilon$. Δηλ. <u>αν</u> $d(x_k,x)\geq\varepsilon \Rightarrow$ $\Rightarrow k\in\{1,2,\dots,n_0\}$. Τώρα $d(y_n,x)\geq\varepsilon \Rightarrow d(x_{\sigma(n)},x)\geq\varepsilon \Rightarrow$ $\Rightarrow \sigma(n)\in\{1,2,\dots,n_0\} \Rightarrow n\in \sigma^{-1}(\{1,2,\dots,n_0\})$ που έχει το πολύ n_0 στοιχεία, γιατί η σ είναι 1-1. $=A_{n_0}$



Θέτουμε $N=\max(A_{n_0})$. Τότε αν $n>N$ έχουμε $n\notin A_{n_0} \Rightarrow \sigma(n)>n_0 \Rightarrow d(x_{\sigma(n)},x)<\varepsilon \Rightarrow d(y_n,x)<\varepsilon$

(2.13) Έστω (x_n) ακολουθία στον (X,d). Λέμε ότι η (x_n) έχει <u>φραγμένη κύμανση</u>, αν $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n,x_{n+1})<\infty$



(α) Αν η (x_n) έχει φραγμένη κύμανση $\Rightarrow$ είναι βασική (άρα και φραγμένη). Ισχύει αντίστροφο;
(β) Αν η (x_n) είναι βασική $\Rightarrow$ έχει υπακολουθία με φραγμένη κύμανση
(γ) Η (x_n) έχει βασική υπακολουθία ανν έχει υπακολουθία με φραγμένη κύμανση.

<u>Λύση</u>: (α) <u>Βασική ιδέα</u>: Αν $m>n \overset{(*)}{\Rightarrow} d(x_n,x_m)\leq d(x_n,x_{n+1})+\dots+d(x_{m-1},x_m)$
Έστω $\varepsilon>0$. Αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} d(x_k,x_{k+1})$ συγκλίνει,
η $S_n=\sum_{k=1}^{n} d(x_k,x_{k+1})$ συγκλίνει $\Rightarrow$ η (S_n) είναι βασική.

Άρα, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall m > n \geq n_0 : |S_{m-1} - S_{n-1}| < \varepsilon \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=1}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}) - \sum_{k=1}^{n-1} d(x_k, x_{k+1}) \right| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(x_n, x_{n+1}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m) < \varepsilon \overset{(*)}{\Rightarrow} d(x_m, x_n) < \varepsilon .$$

Άρα η (x_n) είναι βασική.

Το αντίστροφο δεν ισχύει: Παράδειγμα στο $\mathbb{R}$

Γνωρίζουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k}$ συγκλίνει (Liebniz)

Ορίζουμε $x_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k}$.

• Η (x_n) συγκλίνει στο $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k}$. Άρα είναι βασική

• $|x_{n+1} - x_n| = \left| (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1}$, άρα $\sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1} - x_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty$

Άρα η (x_n) δεν έχει φραγμένη κύμανση.

Αν $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει υπό συνθήκη. $x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \Rightarrow (x_n)$ βασική και συγκλίνει

Αλλά $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1} - x_k| = \infty$

(β) Θα βρούμε υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) τ.ω. $d(x_{k_n}, x_{k_{n+1}}) < \frac{1}{2^n}$

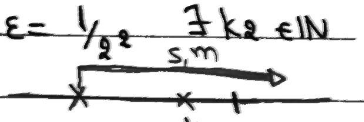
Τότε $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_{k_n}, x_{k_{n+1}}) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < \infty$, δηλ.

η (x_{k_n}) έχει φραγμένη κύμανση.

Αφού η (x_n) είναι βασική, για $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\exists\, k_1 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall s, m \geq k_1$

$d(x_s, x_m) < 1/2$. Για $\varepsilon = 1/2^2$ $\exists\, k_2 \in \mathbb{N}$ με $k_2 > k_1$ τ.ω. $\forall s, m \geq k_2$

$d(x_s, x_m) < 1/2^2$



Έχω $k_2, k_1 \geq k_1$, οπότε $d(x_{k_2}, x_{k_1}) < 1/2$.

Έστω ότι έχουμε βρει $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$ τ.ω. $\forall s = 1, \ldots, n-1$ $d(x_{k_s}, x_{k_{s+1}}) < \frac{1}{2^s}$. Παίρνουμε $\varepsilon = \frac{1}{2^{n+1}}$. $\exists\, k_{n+1} > k_n$ τ.ω. ...

$\forall s,m \geq k_{n+1}$ $d(x_s, x_m) < \frac{1}{2^{n+1}}$. Τότε $k_{n+1}, k_n \geq k_n \Rightarrow d(x_{k_n}, x_{k_{n+1}}) < \frac{1}{2^n}$

Με επαγωγή προκύπτει η (x_{k_n})

(γ) ($\Rightarrow$) Έστω (x_{k_n}) βασική υπακολουθία της $(x_n) \Rightarrow$
$\overset{(β)}{\Rightarrow} \exists\, (x_{k_{n_\lambda}})$ υπακολουθία της (x_{k_n}) (άρα και της (x_n)) που έχει φραγμένη κύμανση

($\Leftarrow$) Έστω (x_{k_n}) υπακολουθία της (x_n) που έχει φραγμένη κύμανση. Από το (α) η (x_{k_n}) είναι βασική.

(2.9) Έστω $1 \leq p < \infty$ και $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell_p$.
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $x(n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$.
Ν.δ.ο. $\lim_{n \to +\infty} \|x - x(n)\|_p \to 0$. Ισχύει το ίδιο στον ℓ_∞;

Λύση: • $\|y\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p \right)^{1/p}$

x	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\ldots$
$x(n)$	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n	0	0	$\ldots$
$x-x(n)$	0	0	0	$\ldots$	0	x_{n+1}	x_{n+2}	$\ldots$

$\|x - x(n)\|_p = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, διότι $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty$

• $\|y\|_\infty = \sup\{|y_k| : k \in \mathbb{N}\}$ ⇝ για φραγμένες ακολουθίες.

ℓ_∞

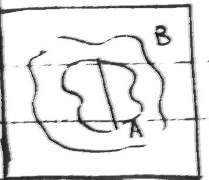
x	1	1	1	$\ldots$	1	1	1	$\ldots$
$x(n)$	1	1	1	$\ldots$	1	0	0	$\ldots$
$x-x(n)$	0	0	0	$\ldots$	0	1	1	$\ldots$

$\|x - x(n)\|_\infty = 1 \not\to 0 \quad \forall n$

(braces over the first n entries labelled n)

(16) (β) $A \subseteq B \subseteq (X,d) \Rightarrow diam(A) \le diam(B)$

↳ άνω φράγμα για το $\{d(x,y) : x,y \in A\}$



$\sup \Gamma \le \lambda \Leftrightarrow \lambda$ άνω φράγμα.

<u>Λύση</u>: Έστω $x,y \in A \Rightarrow x,y \in B$ (διότι $A \subseteq B$) $\Rightarrow d(x,y) \le diam(B)$

Άρα $\underbrace{\sup\{d(x,y) : x,y \in A\}}_{= \, diam(A)} \le diam(B)$.

(γ) Αν $A,B \subseteq X \Rightarrow diam(A \cap B) \overset{(i)}{\le} \max\{diam(A), diam(B)\} \le$

$\le \max\{diam(A), diam(B)\} \overset{(ii)}{\le} diam(A \cup B)$

<u>Λύση</u>: Για την (i) ανισότητα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} A\cap B \in A \Rightarrow diam(A\cap B) \le diam(A) \\ A\cap B \in B \Rightarrow diam(A\cap B) \le diam(B) \end{array}\right\} \Rightarrow diam(A\cap B) \le \max\{diam(A), diam(B)\}$$

Για την (ii) ανισότητα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq A\cup B \Rightarrow diam(A) \le diam(A\cup B) \\ B \subseteq A\cup B \Rightarrow diam(B) \le diam(A\cup B) \end{array}\right\} \Rightarrow \max\{diam(A), diam(B)\} \le diam(A\cup B).$$

Είναι σωστό ότι $^{(*)}\, diam(A\cup B) \le diam(A) + diam(B)$;;;

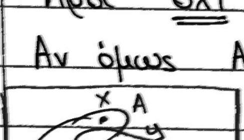
$A = \{1\} \longrightarrow diam(A) = 0$

$B = \{101\} \longrightarrow diam(B) = 0$

$A \cup B = \{1, 101\} \longrightarrow diam(A\cup B) = 100$

Άρα <u>ΟΧΙ</u>.

Αν όμως $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow$ η (*) ισχύει. Έστω $z \in A\cap B$ και $x,y \in A\cup B$.



- Αν $x \in A$, $y \in B \Rightarrow d(x,y) \le \overset{\in A}{d(x,z)} + \overset{\in B}{d(z,y)} \le diam(A) + diam(B)$
- Αν $x,y \in A$: $d(x,y) \le diam(A)$
- Αν $x,y \in B$: $d(x,y) \le diam(B)$.

Άρα $\forall x,y \in A\cup B$: $d(x,y) \le diam(A) + diam(B) \Rightarrow diam(A\cup B) \le diam(A) + diam(B)$