30/9/21

Χώροι με νόρμα (παραδείγματα)

Στον $\mathbb{R}^m$ είδαμε ότι οι $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{m} |x_j|$ και

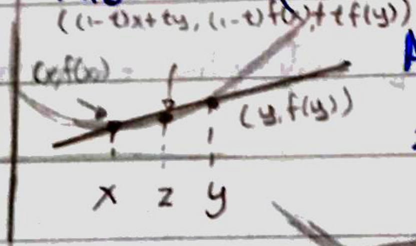
$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots\dots, |x_m|\}$ είναι νόρμες.

Και για κάθε $1<p<\infty$ ορίζουμε: $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p}$

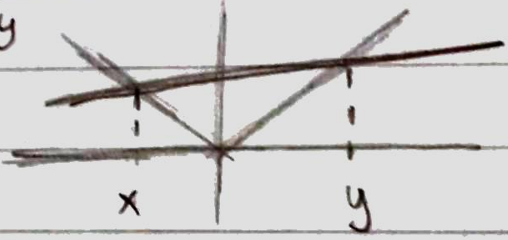
Θ.δ.ο. η $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^m$.

(a) Ανισότητα Young

Μια συνάρτηση $f: I \to \mathbb{R}$ λέγεται κυρτή



Αν $x<y \Rightarrow$ τυχόν $z\in(x,y)$ γράφεται ως $z=(1-t)x+ty$ για κάποιο $t\in(0,1)$

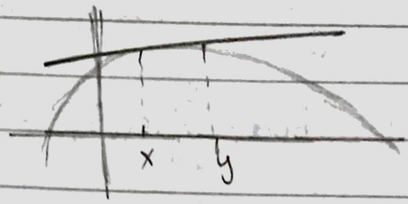


Ορισμός: Μια συνάρτηση $f: I \to \mathbb{R}$ λέγεται κυρτή, ανν $\forall x<y$ στο I και $\forall t$ με $0 \le t \le 1$ ισχύει ότι:

$$f((1-t)x+ty) \le (1-t)f(x) + tf(y).$$

Λέμε ότι η f είναι κοίλη, αν η $-f$ είναι κυρτή $\iff$ $\iff \forall x<y$ στο I $\forall t$ με $0 \le t \le 1$ ισχύει ότι:

$$f((1-t)x+ty) \geq (1-t)f(x) + f(y).$$

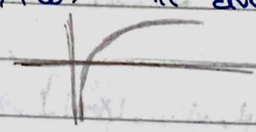


Με αυτόν τον ορισμό

(α) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο I, τότε f κυρτή $\iff f'$ αύξουσα

(β) Αν η f είναι 2 φορές —»— —»—, τότε f κυρτή $\iff f'' \geq 0$.

Η συνάρτηση $\ln: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ είναι κοίλη, αφού $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ και $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0$



Άρα $\forall x,y>0$ και $\forall t$ με $0<t<1$ έχουμε:

$\ln((1-t)x+ty) \geq (1-t)\ln x + t\ln y = \ln x^{(1-t)} + \ln y^t =$
$= \ln(x^{1-t}y^t)$. Άρα $\boxed{(1-t)x+ty \geq x^{1-t}y^t}$ $\overset{(*)}{\leadsto} a^{1-t}b^t \le (1-t)a+tb$.

$1/p$ $1/q$ x^p y^q

Ανισότητα Young

Αν $x,y \geq 0$ και $1<p<\infty$ και q συζυγής εκθέτης του p, τότε $xy \le \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$

<u>Απόδειξη</u>: Αν $x=0$ ή $y=0$ η ανισότητα ισχύει.
Έστω ότι ισχύει για $x,y>0$. Από την προηγούμενη σχέση:
$(1-t)x+ty \geq x^{1-t}\cdot y^{t}$ αν $\forall a,b>0$ $\forall 0<t<1$ έχω
$a^{1-t}\cdot b^{t} \leq (1-t)a+tb$. Θεωρώ $a=x^{p}$ και $b=y^{q}$ και
$t=1/q \Rightarrow (1-t)=1-1/q=1/p$. Άρα έχουμε:
$$(x^{p})^{1/p}(y^{q})^{1/q} \leq \frac{1}{p}\cdot x^{p}+\frac{1}{q}y^{q} \Rightarrow x\cdot y \leq \frac{x^{p}}{p}+\frac{y^{q}}{q}$$

<u>(β)</u> Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Young δείχνουμε την ανισότητα Hölder (προηγ. μάθημα). Αν $x_1,\dots,x_m\in\mathbb{R}$ και $y_1,\dots,y_m\in\mathbb{R}$ και p,q συζυγείς εκθέτες, τότε
$$\left|\sum_{i=1}^{m}x_iy_i\right| \leq \sum_{i=1}^{m}|x_iy_i| \leq \left(\sum_{j=1}^{m}|x_i|^{p}\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{m}|y_i|^{q}\right)^{1/q}=\|x\|_p\cdot\|y\|_q$$

(γ) <u>Ανισότητα Minkowski</u>

Έστω $1<p<\infty$. Αν $x_1,\dots,x_m\in\mathbb{R}$ και $y_1,\dots,y_m\in\mathbb{R}$, τότε
$$\left(\sum_{j=1}^{m}|x_j+y_j|^{p}\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{m}|x_j|^{p}\right)^{1/p}+\left(\sum_{j=1}^{m}|y_j|^{p}\right)^{1/p}$$

<u>Δηλ.</u> $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p+\|y\|_p$

<u>Απόδειξη</u>: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A>0$.
$$\|x+y\|_p^{p}=\sum_{j=1}^{m}|x_j+y_j|^{p}=\sum_{j=1}^{m}|x_j+y_j|^{p-1}\cdot|x_j+y_j| \leq \sum_{j=1}^{m}|x_j+y_j|^{p-1}(|x_j|+|y_j|)$$
$$=\sum_{j=1}^{m}\underbrace{|x_j+y_j|^{p-1}}_{b_j}\cdot\underbrace{|x_j|}_{a_j}+\sum_{j=1}^{m}|x_j+y_j|^{p-1}\cdot|y_j|$$
$$\overset{\text{Hölder}}{\leq}\left(\sum_{j=1}^{m}|x_j+y_j|^{\overset{p}{\overset{\shortparallel}{(p-1)q}}}\right)^{1/q}\left[\left(\sum_{j=1}^{m}|x_j|^{p}\right)^{1/p}+\left(\sum_{j=1}^{m}|y_j|^{p}\right)^{p}\right]$$

$(p-1)q=pq-q=p$, διότι $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Leftrightarrow \frac{p+q}{pq}=1 \Leftrightarrow p+q=pq$

Άρα $\|x+y\|_p^p \le \left(\sum_{j=1}^{m} |x_j+y_j|^p\right)^{1/q} (\|x\|_p + \|y\|_p) =$

$= (\|x+y\|_p^p)^{1/q} (\|x\|_p + \|y\|_p) \Rightarrow (\|x+y\|_p^p)^{1-1/q} \le \|x\|_p + \|y\|_p \Rightarrow$

$\Rightarrow (\|x+y\|_p^p)^{1/p} \le \|x\|_p + \|y\|_p \Rightarrow \|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$

II Χώροι συναρτήσεων

Συμβολίζουμε με $C[a,b]$ το χώρο των συνεχών συναρτήσεων $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Είναι δ.χ. με πράξεις: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$

Για $1\le p<\infty$ ορίζουμε : $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$ και

για $p=\infty$ ορίζουμε $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : a\le x\le b\}$.

Θ.δ.ο. όλες αυτές νόρμες στο $C[a,b]$

(*) Οι δύο πρώτες ιδιότητες της νόρμας είναι απλές.

$\|f\|_p = 0 \iff \int_a^b |f(x)|^p\, dx = 0 \overset{f\ge 0}{\underset{\text{συν.}\ (\text{Αν}\ \text{II})}{\iff}} |f(x)|=0\ \forall x \iff f\equiv 0$

$\|\lambda f\|_p = \left(\int_a^b |\lambda f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} = \left(\int_a^b |\lambda|^p\, |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} =$

$= \left(|\lambda|^p \int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} = (|\lambda|^p)^{1/p} \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} = |\lambda|\, \|f\|_p$

Για την τριγωνική ανισότητα:

Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχείς. $(p=\infty)$

Ζητάμε $\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \iff \max\{|f(x)+g(x)| : x\in[a,b]\} \le$
$\le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. Έστω $x\in[a,b] \Rightarrow |f(x)+g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le$
$\le \underbrace{\|f(x)\|_\infty + \|g(x)\|_\infty}_{\text{άνω φράγμα}}$. Άρα $\max\{|f(x)+g(x)| : x\in[a,b]\} \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

$p=1$ $\quad \|f+g\|_1 = \int_a^b |f(x)+g(x)|\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx + \int_a^b |g(x)|\,dx = \|f\|_1 + \|g\|_1$

$1<p<\infty$ $\quad$ Ανισότητα Hölder (για ολοκληρώματα) (Άσκηση 10)

Έστω $f, g \in C[a,b]$ και $1<p<\infty$ (q ο συζυγής του p)

Τότε $\left|\int_a^b f(x)+g(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)+g(x)|\,dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{1/q}$

Απόδειξη: Αν $\int |f|^p = 0 \Rightarrow f \equiv 0$ και Ισχύει $0 \le 0$

Αν $\int |g|^q = 0 \Rightarrow g \equiv 0$ και Ισχύει $0 \le 0$

Άρα υποθέτουμε ότι $\int |f|^p = \|f\|_p^p > 0$, $\int |g|^q = \|g\|_q^q > 0$

(*) Κανονικοποίηση: Ορίζουμε $f_1(x) = \dfrac{f(x)}{\|f\|_p}$, $g_1(x) = \dfrac{g(x)}{\|g\|_q}$.

Έχουμε $f_1, g_1 \in C[a,b]$ και $\int_a^b |f_1(x)|^p dx = \int_a^b \dfrac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} dx =$

$= \dfrac{1}{\|f\|_p^p} \int_a^b |f(x)|^p dx = \dfrac{\|f\|_p^p}{\|f\|_p^p} = 1$. Ομοίως, $\int_a^b |g_1(x)|^q dx = 1$

$\forall x \in [a,b]$ έχουμε $|f_1(x)||g_1(x)| \le \dfrac{|f_1(x)|^p}{p} + \dfrac{|g_1(x)|^q}{q}$ (Young)

Ολοκληρώνοντας παίρνουμε: $\int_a^b |f_1(x) g_1(x)|\,dx \le \dfrac{1}{p}\underbrace{\int_a^b |f_1(x)|^p dx} + \dfrac{1}{q}\underbrace{\int_a^b |g_1(x)|^q}$

$= \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Άρα: $\int_a^b \dfrac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} dx \le 1 \Rightarrow \dfrac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int_a^b |fg|\,dx \le 1$

$\Rightarrow \int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \le \|f(x)\|_p \|g(x)\|_q = \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g|^q\right)^{1/q}$.

Ανισότητα Minkowski (για ολοκληρώματα)

Έστω $f,g \in C[a,b]$ και $1<p<\infty$. Τότε $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$

Απόδειξη: $\|f+g\|_p^p = \int_a^b |f+g|^p = \int_a^b |f+g|^{p-1}|f+g| \le \int_a^b |f+g|^{p-1}(|f|+|g|)$

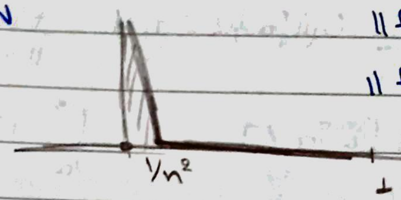
$\le \int_a^b |f+g|^{p-1}|f| + \int_a^b |f+g|^{p-1}|g| \overset{\text{Hölder}}{\le} \left(\int_a^b |f+g|^{\overset{p}{\overbrace{(p-1)q}}}\right)^{1/q}\left[\left(\int|f|^p\right)^{1/p} + \left(\int|g|^p\right)^{1/p}\right]$

$\Rightarrow \|f+g\|_p^p \le (\|f+g\|_p^p)^{1/q}(\|f\|_p+\|g\|_p)$

$\Rightarrow (\|f+g\|_p^p)^{1-1/q=1/p} \le \|f\|_p+\|g\|_p \Rightarrow \|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$

Παρατήρηση: Οι νόρμες $\|\cdot\|_p$ ορίζονται στον ίδιο χώρο του $C[a,b]$, αλλά είναι πολύ διαφορετική

π.χ. Έστω $n\in\mathbb{N}$



$\|f\|_\infty = n$

$\|f\|_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot n = \frac{1}{2n}$

(Άσκηση Αναλ. II) $\left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \max|f|$

$\|f\|_p \xrightarrow{p\to+\infty} \|f\|_\infty$

$\sqrt[n]{|x_1|^n+\dots+|x_n|^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \max\{|x_1|,\dots,|x_n|\}$

III Χώροι ακολουθιών

- S = το σύνολο όλων των ακολουθιών πρ. αριθμών
  [Στοιχεία του S: $x=(x_k)_{k\ge1}^\infty$, $x\in\mathbb{R}$]
- c_0 = το σύνολο όλων των μηδενικών ακολουθιών που έχουν όριο το 0
  [$x=(x_k)\in c_0 \iff x_k\to 0$]
- c = οι συγκλίνουσες ακολουθίες.

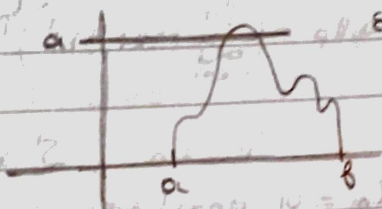
• c_{00} = οι τελικά μηδενικές ακολουθίες

$[x=(x_k)\in c_{00} \iff \exists N\in\mathbb{N} : \forall k>N : x_k=0]$

$\|x\|_p = \|x\|_\infty = \sup\{|x_k| : k\in\mathbb{N}\}$.

$$\int_a^b |f(x)|^n\,dx \le \int_a^b \|f\|_\infty^n\,dx = \|f\|_\infty^n (b-a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\int_a^b |f(x)|^n\,dx\right)^{1/n} \le \left(\int_a^b \|f\|_\infty^n\,dx\right)^{1/n} = \|f\|_\infty (b-a)^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|f\|_\infty$$



$\varepsilon>0$ $\exists$ το $(x_0-\delta, x_0+\delta)$: $|f(x)|>\|f\|_\infty-\varepsilon$

$$\int_a^b |f(x)|^n\,dx \ge \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(x)|^n\,dx > (\|f\|_\infty-\varepsilon)\cdot 2\delta$$

$$\Rightarrow \left(\int_a^b |f(x)|^n\,dx\right)^{1/n} \ge \left(\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(x)|^n\,dx\right)^{1/n} > \left((\|f\|-\varepsilon)^n\right)^{1/n}(2\delta)^{1/n}$$

$\|f\|_\infty-\varepsilon$

$c_{00}\subseteq c_0\subseteq c\subseteq S$.

• Έστω $1\le p<\infty$ $\quad \ell_p=\{x=(x_k)_{k=1}^\infty : \sum_{k=1}^\infty |x_k|^p<\infty\}$

$(1/k^2)_{k=1}^\infty \in \ell_1 \iff \sum_{k=1}^\infty 1/k^2 <\infty$ $\qquad \ell_1\subseteq \ell_2$

$(1/k)_{k=1}^\infty \to \in \ell_2 \rightsquigarrow \sum_{k=1}^\infty \left|\frac{1}{k}\right|^2<\infty$

$(1/k)_{k=1}^\infty \to \notin \ell_1$

<u>Παρατήρηση</u>: Σαν σύνολα, οι ℓ_p <u>δεν</u> συμπίπτουν.

Για $x=(x_k)_{k=1}^\infty\in\ell_p$ ορίζουμε: $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p\right)^{1/p}$

Αν $x=(x_k)$, $y=(y_k)\in \ell_p \Rightarrow x+y=(x_k+y_k)\in\ell_p$

<u>δηλ.</u> $\left(\sum_{k=1}^\infty |x_k+y_k|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^\infty |y_k|^p\right)^{1/p}$

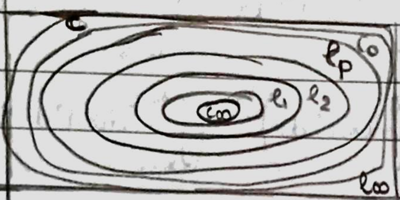
Σταθεροποιούμε $N \in \mathbb{N}$. Από την ανισότητα Minkowski για N-άδες: $\left(\sum_{k=1}^{N} |x_k+y_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{N} |y_k|^p\right)^{1/p} \leq$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\right)^{1/p} = \|x\|_p + \|y\|_p$$

Άρα $\forall N \in \mathbb{N}: \sum_{k=1}^{N} |x_k+y_k|^p \leq \underbrace{(\|x\|_p + \|y\|_p)^p}_{\text{σταθερός}} < \infty \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k+y_k|^p}_{\text{συγκλίνει}} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} |x_k+y_k|^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p)^p < \infty$$

δηλ. $x+y \in \ell_p$ και $\|x+y\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k+y_k|^p\right)^{1/p} \leq \|x\|_p + \|y\|_p$



$\ell_p \subseteq c_0$, $\sum |x_k|^p < \infty \Rightarrow |x_k| \to 0$

ℓ_∞ = οι φραγμένες ακολουθίες

$\|x\|_\infty = \sup\{|a_k| : k \in \mathbb{N}\}$

$\forall p \in \mathbb{N}$

$$c_{00} \subseteq \ell_p \subseteq c_0 \subseteq c \subseteq \ell_\infty \subseteq S \quad \text{και} \quad \ell_1 \subseteq \ell_2 \subseteq \ldots \subseteq \ell_p.$$

Ασκήσεις

② Έστω (X,d) μετρικός χώρος

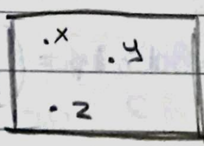
(α) $\forall x,y,z \in X: |d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$

(β) $\forall x,y,z,w \in X: |d(x,y) - d(z,w)| \leq d(x,z) + d(y,w)$

(ανισότητα των 4 σημείων)

Λύση: (α)

$\left.\begin{matrix} a \leq b \\ -a \leq b \end{matrix}\right\} \Rightarrow |a| \leq b$

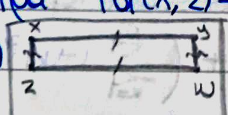


$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \Rightarrow d(x,z) - d(y,z) \leq d(x,y)$

$d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z) \Rightarrow d(y,z) - d(x,z) \leq \underset{d(x,y)}{\underset{\parallel}{d(y,x)}}$

Άρα $|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$

(β)



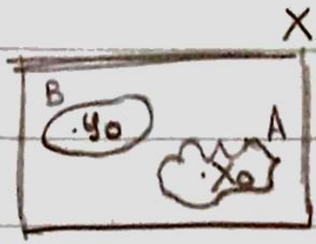
$|d(x,y) - d(z,w)| = |d(x,y) - d(y,z) + d(y,z) - d(z,w)| \leq$

$\leq |d(x,y) - d(y,z)| + |d(y,z) - d(z,w)| \overset{(α)}{\leq} d(x,z) + d(y,w)$

(8) Έστω $A_1, \ldots\ldots, A_k$ φραγμένα μη κενά $\subseteq (X,d)$.

Ν.δ.ο. το $A_1 \cup \ldots\ldots \cup A_k$ είναι φραγμένο.

Λύση:



Θεωρούμε δύο σύνολα $A, B \subseteq X$

Σταθεροποιούμε $x_0 \in A$ κ $y_0 \in B$. Έστω $x, y \in A \cup B$

- Αν $x, y \in A \Rightarrow d(x,y) \leq \mathrm{diam}(A)$
- Αν $x, y \in B \Rightarrow d(x,y) \leq \mathrm{diam}(B)$
- Αν $x \in A$ και $y \in B \Rightarrow d(x,y) \leq d(x,x_0) + d(x_0,y_0) + d(y,y_0) \leq$

$\leq \mathrm{diam}(A) + d(x_0,y_0) + \mathrm{diam}(B)$

Άρα σε όλες τις περιπτώσεις $d(x,y) \leq \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B) + d(x_0,y_0) < \infty$

$\Rightarrow \mathrm{diam}(A \cup B) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A \cup B\} \leq \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B) + d(x_0,y_0)$