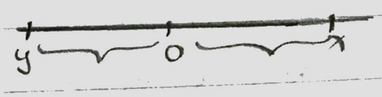
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

28/9/21

Μετρικοί Χώροι

Απόλυτη τιμή του $x \in \mathbb{R}$: $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

π.χ. $|7| = 7$, $|-3| = 3$



Επάγει την απόσταση $|x-y|$ των $x, y \in \mathbb{R}$

Ορισμοί από τον Απ. Λογισμό

- $a_n \to a \overset{ορσ}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$ ισχύει $|a_n - a| < \varepsilon$
- $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Η f είναι συνεχής στο $x_0 \overset{ορσ}{\iff}$ $\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ τ.ω. αν $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta$ τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

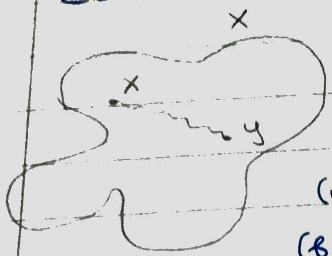
Βασικές ιδιότητες της απόλυτης τιμής (που χρησιμοποιούνται συνεχώς στη μελέτη ακολουθιών & συναρτήσεων)

(α) $\forall x \in \mathbb{R}$ $|x| \geq 0$ και $|x| = 0 \iff x = 0$

(β) $|x| = |-x|$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ $|x-y| = |y-x|$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$

(γ) $|x+y| \leq |x| + |y|$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ $|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

Έστω $X \neq \emptyset$ (τυχόν σύνολο)



Μια συνάρτηση $d: X \times X \to \mathbb{R}$ λέγεται <u>μετρική</u> στο X, αν

(α) $\forall x, y \in X \quad d(x,y) \geq 0$ και $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(β) $\forall x, y \in X \quad d(x,y) = d(y,x)$

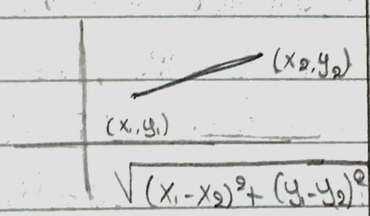
(γ) $\forall x, y, z \in X \quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Ένα ζευγάρι (X, d), όπου $X \neq \emptyset$ και d μετρική λέγεται <u>μετρικός χώρος</u>.

<u>Παραδείγματα</u>

1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ = το $\mathbb{R}$ με μετρική την $|x-y|$
   ↳ η συνήθης μετρική στο $\mathbb{R}$

2. $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$
   ↳ Ευκλείδεια μετρική



3. $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_2)$
   Αν $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$, τότε ορίζουμε
   $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (y_i - x_i)^2}$ (η τρ. ανισότητα εκκρεμεί)

4. <u>Διακριτή Μετρική</u>
   Έστω $X \neq \emptyset$. Ορίζουμε $\delta: X \times X \to \mathbb{R}$ με $\delta(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$

Η δ είναι μετρική. (α) απλή, (β) απλή

(γ) Έστω $x, y, z \in X$. Ζητάμε $\delta(x,z) \leq \delta(x,y) + \delta(y,z)$

· Αν $\delta(x,z)=0$ αφού $0\le \delta(x,y)+\delta(y,z)$ ισχύει η τριγωνική

· Αν $\delta(x,z)=1$ έχουμε $\delta(x,y)+\delta(y,z)\in\{0,\underset{\text{εντάξει}}{1},\underset{\text{εντάξει}}{2}\}$

Αν $\delta(x,y)+\delta(y,z)=0 \Rightarrow \delta(x,y)=\delta(y,z)=0 \Rightarrow x=y$ και $y=z$ $\Rightarrow x=z \Rightarrow \delta(x,z)=0$ άτοπο

Παρατήρηση: Οι μετρικοί χώροι $(\mathbb{R},|\cdot|)$ και $(\mathbb{R},\delta)$ είναι τελείως διαφορετικοί

(5) Έστω $X\neq\emptyset$ και $f: X\to\mathbb{R}$ 1-1 συνάρτηση

Ορίζουμε $d_f: X\times X\to\mathbb{R}$ με $d_f(x,y)=|f(x)-f(y)|$

Η d_f είναι μετρική

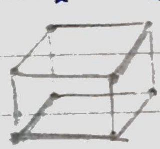
(α) $d_f(x,y)=|f(x)-f(y)|\geq 0$ και $d_f(x,y)=0 \iff |f(x)-f(y)|=0$
$\iff f(x)=f(y) \overset{f\ 1-1}{\iff} x=y$.

(β) $d_f(x,y)=|f(x)-f(y)|=|f(y)-f(x)|=d_f(y,x)$

(γ) $d_f(x,z)=|f(x)-f(z)|=|f(x)-f(y)+f(y)-f(z)|\leq |f(x)-f(y)|+$
$+|f(y)-f(z)|=d_f(x,y)+d_f(y,z)$

(6) Διακριτός κύβος

$E_2^m=\{\varepsilon=(\varepsilon_1,\dots\dots,\varepsilon_m):\ \forall j\ \varepsilon_j=\pm1\}$ → έχει 2^m στοιχεία



Ορίζουμε $\eta_m(\varepsilon,\zeta)=\#\{j:\ \varepsilon_j\neq\zeta_j\}$ → Hamming μετρική

π.χ. για $n=7$ $\varepsilon=(1,1,-1,1,-1,-1,-1)$ ς $\zeta=(1,1,-1,-1,-1,1,1)$

Άρα $\eta_7(\varepsilon,\zeta)=3$

Παρατήρηση: $\boxed{\eta_m(\varepsilon,\zeta)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}{}' |\varepsilon_j-\zeta_j|}$

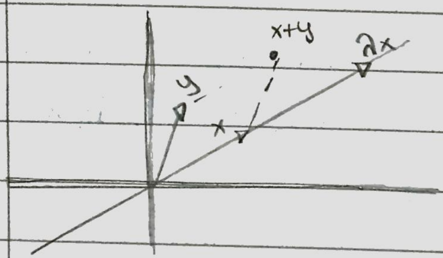
Τότε $\forall \varepsilon, \zeta, \theta \in E_2^m$ έχουμε: $\eta_m(\varepsilon,\theta) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} |\varepsilon_j - \theta_j| \leq$

$$\leq \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} \left(|\varepsilon_j - \zeta_j| + |\zeta_j - \theta_j|\right) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} |\varepsilon_j - \zeta_j| + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} |\zeta_j - \theta_j| = \eta_m(\varepsilon,\zeta) + \eta_m(\zeta,\theta)$$

7. S_n = το σύνολο των μεταθέσεων $\sigma : [n] \to [n]$
όπου $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ $(\# S_n = n!)$
$d(\sigma,\pi) = \#\{i : \sigma(i) \neq \pi(i)\}$ $\rightsquigarrow$ παίρνει τιμή στο $\{0, \dots, n\}$ και <u>είναι μετρική</u> (άσκηση)

<u>Χώρος με νόρμα</u>

Έστω X δ.χ. πάνω στο $\mathbb{R}$ (έχουμε $+ : X \times X \to X$, $(x,y) \to x+y$, $\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$, $(\lambda, x) \to \lambda x$)



<u>Νόρμα</u> στο <u>δ.χ. X</u> είναι μια συνάρτηση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) $\forall x \in X$: $\|x\| \geq 0$ και $\|x\| = 0 \iff x = 0$

(β) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\forall x \in X$: $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

(γ) $\forall x, y \in X$: $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$

Το ζεύγος $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται <u>χώρος με νόρμα</u>.

<u>Πρόταση</u>

Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Ορίζουμε $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με $d(x,y) \overset{\text{ορσ}}{=} \|x-y\|$. Τότε η d είναι μετρική.
[Η d είναι μετρική και επάγεται στο X από την $\|\cdot\|$].

<u>Απόδειξη</u>: (α) $d(x,y) = \|x-y\| \geq 0$ και $d(x,y)=0 \iff \|x-y\|=0 \iff$
$\iff x-y=0 \iff x=y$

(β) $d(y,x) = \|y-x\| = \|(-1)(x-y)\| = |-1|\,\|x-y\| = \|x-y\| = d(x,y)$

(γ) $d(x,z) = \|x-z\| = \|(x-y)+(y-z)\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y)+d(y,z)$

<u>Σημείωση</u>: Όταν μια μετρική d επάγεται σε έναν δ.χ. X από μια νόρμα $\|\cdot\|$, τότε έχει δύο ακόμα χρήσιμες ιδιότητες:

(δ) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\forall x,y \in X$ $d(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\| = \|\lambda(x-y)\| = |\lambda|\,\|x-y\|$

Άρα $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(x,y)$

(ε) $\forall x,y \in X$ $d(x+z, y+z) = \|(x+z)-(y+z)\| = \|x-y\| = d(x,y)$

Άρα $d(x+z, y+z) = d(x,y)$.

<u>Παραδείγματα</u> (συνέχεια)

8. Στον $\mathbb{R}^m \overset{\text{ορσ}}{=} \{x = (x_1, \dots, x_m) : x_i \in \mathbb{R}\}$ μπορούμε να ορίσουμε (ο οποίος είναι δ.χ. με πράξεις κατά συντεταγμένη)

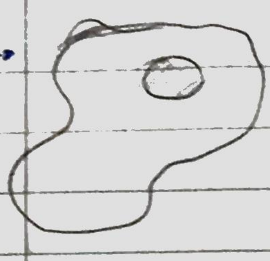
- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |x_i|$
- $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_m|\}$
- $\forall\, 1<p<\infty$ $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p}$

Όλες αυτές είναι νόρμες στον $\mathbb{R}^m$.

<u>Τρεις βασικοί ορισμοί</u>

(A) Έστω (X,d) μετρικός χώρος.
Η <u>ανοιχτή μπάλα</u> με κέντρο $x_0 \in X$ και ακτίνα $r>0$ είναι το σύνολο $B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$

Μπάλα → ανοικτή



(*) Στο παράδειγμα του $\mathbb{R}$:

$x\in B(x_0,r) \iff |x-x_0|<r \iff -r<x-x_0<r \iff x_0-r<x<x_0+r$

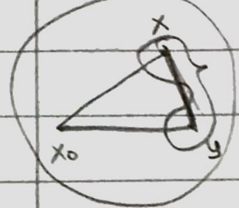
Δηλαδή $B(x_0,r)=(x_0-r,\ x_0+r)$

(B) Ένα υποσύνολο A του (X,d) λέγεται <u>φραγμένο</u>, αν περιέχεται σε κάποια ανοικτή μπάλα του X, δηλ. αν $\exists\ x_0\in X$ και $r>0$: $A\subseteq B(x_0,r)$.

<u>Τότε</u>: $\forall x,y\in A$ έχουμε $d(x,y)\le d(x,x_0)+d(y,x_0)<r+r=2r$

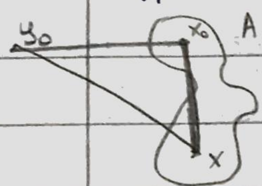
<u>Δηλ.</u> $\underset{\text{ορσ}//}{\sup}\{d(x,y): x,y\in A\}\le 2r<\infty$

diam(A) : η διάμετρος του A.



Δ.ο. αν $A\neq\emptyset$ είναι φραγμένο $\Rightarrow \operatorname{diam}(A)\overset{\text{ορσ}}{=}\sup\{d(x,y): x,y\in A\}<\infty$

Ισχύει και το αντίστροφο: Έστω $A\neq\emptyset$, $A\subseteq X$ με $\operatorname{diam}(A)=R<\infty$



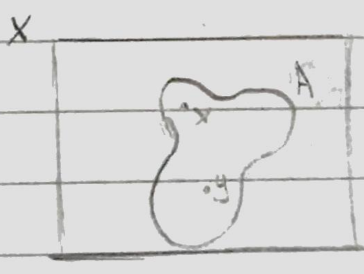
Θεωρούμε τυχόν $x_0\in A$. $\forall x\in A$ έχουμε:

$d(x,x_0)\le \operatorname{diam}(A)=R<R+1$, <u>δηλ.</u> $x\in B(x_0,R+1)$

<u>Σημείωση</u>: Συμφωνάμε ότι το $\emptyset$ είναι φραγμένο με $\operatorname{diam}(\emptyset)=0$

(Γ) <u>Σχετική Μετρική</u>

Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $\emptyset\neq A\subseteq X$



Ορίζουμε $d_A: A\times A\to\mathbb{R}$ με $d_A(x,y)=d(x,y)\ \forall x,y\in A$

Η d_A είναι η <u>σχετική μετρική</u> (της d) στο A.

Νόρμες στον $\mathbb{R}^m$

Πρόταση 1

Η $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{m} |x_j|$ είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^m$.

Απόδειξη: (α) $\|x\|_1 \geq 0$ και $\|x\|_1 = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{m} |x_j| = 0 \Leftrightarrow \forall j \ |x_j| = 0$
$\Leftrightarrow \forall j \quad x_j = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(β) $\|\lambda x\|_1 = \sum_{j=1}^{m} |\lambda x_j| = \sum_{j=1}^{m} |\lambda| \, |x_j| = |\lambda| \sum_{j=1}^{m} |x_j| = |\lambda| \, \|x\|_1$

(γ) $\|x+y\|_1 = \sum_{j=1}^{m} |x_j + y_j| \leq \sum_{j=1}^{m} |x_j| + \sum_{j=1}^{m} |y_j| = \|x\|_1 + \|y\|_1$

Επαγόμενη μετρική: $d_1(x,y) = \|x-y\|_1 = \sum_{j=1}^{m} |x_j - y_j|$

Πρόταση 2

Η $\|x\|_\infty = \sup\{|x_1|, \ldots\ldots, |x_m|\}$ είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^m$

Απόδειξη: (α),(β) Homework

(γ) Έστω $x, y \in \mathbb{R}^m$. Έστω $1 \leq j \leq m$. Έχουμε ότι:
$|x_j + y_j| \leq |x_j| + |y_j| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

Άρα $\|x+y\| = \sup\{|x_1+y_1|, \ldots\ldots, |x_m+y_m|\} \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

Πρόταση 3

Έστω $1 < p < \infty$. Τότε η $\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{m} |x_j|^p\right)^{1/p}$ είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^m$.

Απόδειξη : (α), (β) είναι εύκολα αποδεικνύομενα.
(γ) Θ.ν.δ.ο. $\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$ ← ΤΑ.
δηλ. $\forall\ x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ και $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\left(\sum_{j=1}^{m} |x_j+y_j|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{j=1}^{m} |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{m} |y_j|^p\right)^{1/p}$$ → ανισότητα Minkowski

Για την απόδειξη αυτής της ανισότητας (Minkowski) χρειαζόμαστε την ανισότητα Hölder

Συζυγής εκθέτης

Έστω $1<p<\infty$. Ο συζυγής εκθέτης q του p είναι η λύση της εξίσωσης: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, δηλ. $q=\frac{p}{p-1}$ με $1<q<\infty$

Θεώρημα (Ανισότητα Hölder)

Έστω $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ και $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}$.
Τότε

$$\sum_{j=1}^{m} x_j y_j = \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m} |x_j|^p\right)^{1/p}}_{\|x\|_p} \left(\sum_{j=1}^{m} |y_j|^q\right)^{1/q} = \|y\|_q$$

όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε την ανισότητα του Young:
$\forall x, y \ge 0$ και $\forall p$ όπου $1<p<\infty$ ισχύει $xy \le \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ (q συζυγής p)

Θ.δ.ο. $\sum_{j=1}^{m} |x_j y_j| \le \|x\|_p \|y\|_q$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sum_{j=1}^{m} |x_j|^p > 0$ και $\sum_{j=1}^{m} |y_j|^q > 0$

Ορίζουμε $a_j = \dfrac{|x_j|}{\|x\|_p}$, $b_j = \dfrac{|y_j|}{\|y\|_q}$

<u>Τότε</u>: $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} |a_j|^p = \sum_{j=1}^{m} \frac{|x_j|^p}{\|x\|_p^p} = \frac{\|x\|_p^p}{\|x\|_p^p} = 1$ $\quad = \|x\|_p^p$

και $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} |b_j|^q = \sum_{j=1}^{m} \frac{|y_j|^q}{\|y\|_q^q} = \frac{\|y\|_q^q}{\|y\|_q^q} = 1$

$\forall j: \ a_j b_j \le \dfrac{a_j^p}{p} + \dfrac{b_j^q}{q}$ (Young) $\Rightarrow \displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_j b_j \le \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{m} a_j^p + \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{m} b_j^q$

$= \dfrac{1}{p}\cdot 1 + \dfrac{1}{q}\cdot 1 = 1$. Άρα, $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_j b_j \le 1$

Όμως, επειδή $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \frac{|x_j|\,|y_j|}{\|x\|_p \|y\|_q} = \sum_{j=1}^{m} a_j b_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{m} |x_j y_j| \le \|x\|_p \|y\|_q$