Πραγματική Ανάλυση

1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1. Θεωρούμε το μετρικό χώρο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική. Για καθεμιά από τις παρακάτω σχέσεις, δώστε παράδειγμα άπειρου υποσυνόλου A του $\mathbb{R}$ που την ικανοποιεί:

(α1) $A' = \emptyset$.

(α2) $A = A'$.

(α3) $A \cap A' = \emptyset$ και $A' \neq \emptyset$.

(α4) $A' \subsetneqq A$ και $A' \neq \emptyset$.

(α5) $A \subsetneqq A'$.

(β1) $\mathrm{bd}(A) = \emptyset$.

(β2) $A = \mathrm{bd}(A)$.

(β3) $A \cap \mathrm{bd}(A) = \emptyset$.

(β4) $\mathrm{bd}(A) \subsetneqq A$.

(β5) $A \subsetneqq \mathrm{bd}(A)$.

2. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Ποιες από τις συνθήκες (α1) - (α5) και (β1) - (β5) της προηγούμενης άσκησης εξασφαλίζουν ότι (i) το A είναι κλειστό, (ii) το A δεν είναι κλειστό, (iii) το A είναι ανοικτό;

3. (α) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι:

(i) Για κάθε $x \in X$ και $r > 0$, ισχύει $\widehat{B}(x, r) = \overline{B(x, r)}$.

(ii) Αν για κάποια $x, y \in X$ και $r, s > 0$, ισχύει $B(y, s) \subseteq B(x, r)$, τότε $s \leq r$.

(β) Δείξτε με κατάλληλα παραδείγματα ότι οι ιδιότητες (i) και (ii) του ερωτήματος (α) δεν ισχύουν κατ΄ ανάγκη σε οποιονδήποτε μετρικό χώρο.

4. (α) Έστω (X, d) μετρικός χώρος και (x_n) ακολουθία στον X. Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

(i) Αν το $x \in X$ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A, δείξτε ότι το x είναι οριακό σημείο της ακολουθίας (x_n) - δηλαδή υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) με $x_{k_n} \to x$, καθώς $n \to \infty$.

(ii) Έστω y οριακό σημείο της ακολουθίας (x_n). Είναι κατ΄ ανάγκη το y σημείο συσσώρευσης του συνόλου A; Είναι κατ΄ ανάγκη το y σημείο επαφής του συνόλου A;

(β) Δώστε παράδειγμα φραγμένης ακολουθίας (x_n) στο $\mathbb{R}$, με την ιδιότητα: Το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ έχει ακριβώς ένα σημείο συσσώρευσης, αλλά η ακολουθία (x_n) δεν συγκλίνει.

(γ) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας (u_n) στον $\mathbb{R}^2$ με την Ευκλείδεια μετρική, με την ιδιότητα κάθε $v \in \mathbb{R}^2$ να είναι όριο κάποιας υπακολουθίας της (u_n).

5. Αποδείξτε ότι στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική δεν υπάρχουν σύνολα διαφορετικά από το κενό και το $\mathbb{R}$ που να είναι συγχρόνως ανοικτά και κλειστά (clopen).
(*Υπόδειξη:* Υποθέστε ότι το A είναι ένα μη κενό clopen σύνολο. Τότε το A θα γράφεται ώς $\cup_{i\in I}(a_i, b_i)$, όπου το σύνολο I είναι είτε πεπερασμένο είτε άπειρο αριθμήσιμο και τα διαστήματα (a_i, b_i), $i \in I$, είναι ξένα ανά δύο. Αν, για κάποιο $i \in I$, $b_i \in \mathbb{R}$ - δηλαδή δεν είναι το $+\infty$, καταλήξτε σε άτοπο, δείχνοντας ότι το b_i δεν μπορεί να ανήκει ούτε στο A ούτε στο A^c. Ανάλογα, αν $a_i \in \mathbb{R}$.)

6. Θεωρούμε το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ με τον περιορισμό της συνήθους μετρικής του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι:

(α) Οι μόνες συγκλίνουσες ακολουθίες στο $\mathbb{N}$ είναι οι τελικά σταθερές.

(β) Για οποιονδήποτε μετρικό χώρο (X, d), κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to X$ είναι συνεχής.

(γ) Δεν υπάρχει συνεχής 1-1 συνάρτηση $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$, όπου $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών με τον περιορισμό της συνήθους μετρικής του $\mathbb{R}$.

7. Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε τη συνήθη μετρική d και τη μετρική ρ με $\rho(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$.

(α) Αποδείξτε ότι οι μετρικοί χώροι $(\mathbb{R}, d)$ και $(\mathbb{R}, \rho)$ έχουν:

(i) τις ίδιες συγκλίνουσες ακολουθίες (δηλαδή μια ακολουθία (x_n) συγκλίνει στο x στον $(\mathbb{R}, d)$ αν και μόνο αν η (x_n) συγκλίνει στο x στον $(\mathbb{R}, \rho)$),

(ii) τα ίδια κλειστά σύνολα,

(iii) τα ίδια ανοικτά σύνολα.

(β) Βρείτε μια ακολουθία (x_n) η οποία είναι βασική στον $(\mathbb{R}, \rho)$, αλλά δεν είναι βασική στον $(\mathbb{R}, d)$.