Πραγματική Ανάλυση (2015–16)

Συμπαγείς μετρικοί χώροι – Ασκήσεις

Ομάδα Α΄

1. Ένα υποσύνολο K του X λέγεται συμπαγές, αν είναι συμπαγής μετρικός χώρος με τη σχετική μετρική. Δείξτε ότι αυτό είναι ισοδύναμο με το εξής: για κάθε κάθε ανοικτό κάλυμμα $(V_i)_{i\in I}$ του K υπάρχουν $i_1,\ldots,i_m \in I$ ώστε $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} V_{i_j}$.

2. Έστω $a < b$ στο $\mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό του συμπαγούς μετρικού χώρου δείξτε ότι το $[a,b]$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, ενώ τα διαστήματα (a,b), $[a,b)$ και $[a,\infty)$ δεν είναι συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική.

3. Αν A, B είναι συμπαγή υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (X,ρ), αποδείξτε ότι το $A \cup B$ είναι συμπαγές.

4. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και E, F υποσύνολα του X ώστε το E να είναι συμπαγές, το F κλειστό και $E \cap F = \emptyset$. Αποδείξτε ότι $\mathrm{dist}(E,F) > 0$.

Δείξτε επίσης ότι υπάρχουν A, B κλειστά, ξένα υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ ώστε $\mathrm{dist}(A,B) = 0$.

5. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $x \in X$ και A συμπαγές υποσύνολο του X, τότε υπάρχει $y \in A$ ώστε $\mathrm{dist}(x,A) = \rho(x,y)$.

(β) Αν A, B είναι συμπαγή υποσύνολα του X τότε, υπάρχουν $x \in A, y \in B$ ώστε $\mathrm{dist}(A,B) = \rho(x,y)$.

6. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος.

(α) Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $x \in X$ το σύνολο $\overline{B}(x,\varepsilon)$ να είναι συμπαγές. Δείξτε ότι ο X είναι πλήρης μετρικός χώρος.

(β) Αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε το σύνολο $\overline{B}(x,\varepsilon)$ να είναι συμπαγές, τότε είναι ο X κατ' ανάγκην πλήρης;

7. Έστω (X,ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \to Y$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Η f είναι συνεχής.

(β) Η συνάρτηση *γράφημα* $G_f : X \to X \times Y$ με $G_f(x) = (x, f(x))$ είναι συνεχής.

(γ) Το γράφημα $\mathrm{Gr}(f) = \{(x,f(x)) : x \in X\}$ είναι συμπαγές στον $X \times Y$.

Είναι αναγκαία υπόθεση ο μετρικός χώρος X να είναι συμπαγής;

8. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $F \subseteq X$. Αποδείξτε ότι το F είναι κλειστό αν και μόνον αν για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του X το $F \cap K$ είναι κλειστό.

9. Γνωρίζουμε ότι κάθε συμπαγές υποσύνολο K ενός μετρικού χώρου (X,ρ) είναι φραγμένο. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in K$ ώστε $\rho(x,y) = \mathrm{diam}(K)$.

10. Έστω (X,d), (Y,ρ) μετρικοί χώροι με τον Y συμπαγή και $f : X \to Y$ συνάρτηση. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Η f είναι συνεχής.

(β) Το γράφημα $\mathrm{Gr}(f)$ της f είναι κλειστό στον $(X \times Y, \rho_1)$.

11. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι:

(α) Αν $A_1,\ldots,A_m$ είναι ολικά φραγμένα υποσύνολα του X τότε το $A_1 \cup \cdots \cup A_m$ είναι επίσης ολικά φραγμένο.

(β) Αν A είναι ολικά φραγμένο υποσύνολο του X τότε το $\overline{A}$ είναι επίσης ολικά φραγμένο.

12. (α) Έστω $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η f απεικονίζει τα ολικά φραγμένα υποσύνολα του X σε ολικά φραγμένα υποσύνολα του Y.

(β) Δείξτε ότι η ιδιότητα του ολικά φραγμένου δεν διατηρείται από ομοιομορφισμούς. (*Υπόδειξη:* Τα $\mathbb{R}$ και $(0,1)$ είναι ομοιομορφικά.)

13. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και (x_n) βασική ακολουθία στον X. Δείξτε ότι το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ολικά φραγμένο.

Ομάδα Β′

14. Έστω (X,ρ) συμπαγής μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι:

(α) Κάθε ισομετρία $f : X \to X$ είναι επί.

(β) Αν (Y,σ) είναι μετρικός χώρος ώστε να υπάρχουν ισομετρίες $g : X \to Y$ και $h : Y \to X$, τότε και ο Y είναι συμπαγής.

15. Έστω (X,ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και (F_n) φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X. Δείξτε ότι:

(α) Αν G είναι ανοικτό υποσύνολο του X ώστε $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq G$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $F_{n_0} \subseteq G$.

(β) Αν $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$, τότε υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $F_{m_0} = \emptyset$.

(γ) Αν $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ είναι μονοσύνολο, τότε $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$.

16. Έστω $f : (X,d) \to (Y,\rho)$ συνεχής και $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots$ ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων του X. Αποδείξτε ότι

$$f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(K_n).$$

17. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ μη συμπαγές. Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ η οποία:

(α) δεν είναι φραγμένη.

(β) είναι φραγμένη αλλά δεν παίρνει μέγιστη τιμή.

18. Έστω (X,ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και συνάρτηση $f : X \to X$ ώστε $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x,y)$ για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$. Αποδείξτε ότι η f έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο.

19. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Ο X είναι συμπαγής.

(β) Κάθε φθίνουσα ακολουθία (F_n) μη κενών, κλειστών υποσυνόλων του X έχει μη κενή τομή, δηλαδή $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

20. (α) Έστω (X,ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Δείξτε ότι το A είναι συμπαγές αν και μόνον αν είναι κλειστό και ολικά φραγμένο.

(β) Έστω (X,ρ) ολικά φραγμένος μετρικός χώρος. Δείξτε ότι η πλήρωσή του $(\tilde{X},\tilde{\rho})$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος.

21. Δείξτε ότι ο μετρικός χώρος (X,d) είναι ολικά φραγμένος αν και μόνον αν ο (X,ρ) είναι ολικά φραγμένος, όπου $\rho = \frac{d}{1+d}$.

22. (α) Έστω $(X_1,d_1),\dots,(X_k,d_k)$ πεπερασμένη οικογένεια ολικά φραγμένων μετρικών χώρων. Δείξτε ότι ο χώρος (X,ρ_1), όπου $X = \prod_{i=1}^{k} X_i$ και $\rho_1 = \sum_{i=1}^{k} d_i$ είναι ολικά φραγμένος μετρικός χώρος.

(β) Δείξτε ότι ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}^k$ είναι ολικά φραγμένο αν και μόνον αν είναι φραγμένο.

23. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του X είναι συμπαγές.

(β) Ο X είναι πλήρης και κάθε φραγμένο υποσύνολο του X είναι ολικά φραγμένο.

24. (α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε κάθε συνεχής συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ να είναι ομοιόμορφα συνεχής. Δείξτε ότι το A είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Είναι κατ' ανάγκην φραγμένο;

(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ φραγμένο και όχι κλειστό. Δείξτε ότι υπάρχει $g : A \to \mathbb{R}$ Lipschitz και φραγμένη, η οποία δεν παίρνει μέγιστη τιμή.

(γ) Έστω $K \subseteq \mathbb{R}$ κλειστό και φραγμένο. Δείξτε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : K \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(δ) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής και $A \subseteq \mathbb{R}$ φραγμένο. Δείξτε ότι το $f(A)$ είναι επίσης φραγμένο.

Ομάδα Β′ – Συμπληρωματικές ασκήσεις

25. Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος, (Y, σ) μετρικός χώρος και $f : X \to Y$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι: αν $K \subseteq Y$ είναι συμπαγές τότε το $f^{-1}(K) \subseteq X$ είναι συμπαγές.

26. Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος και έστω $f : X \to X$ συνεχής. Ορίζουμε μια ακολουθία υποσυνόλων του X ώς εξής: $K_1 = X$ και $K_{n+1} = f(K_n)$ για κάθε $n \geq 1$. Αποδείξτε ότι η $\{K_n\}$ είναι φθίνουσα ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων του X. Αν $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$, αποδείξτε ότι $K \neq \emptyset$ και $f(K) = K$.

27. Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος και έστω $f : X \to X$ συνεχής. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) στον X ώστε $d(x_n, f(x_n)) \to 0$. Δείξτε ότι η f έχει σταθερό σημείο.

28. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω D πυκνό υποσύνολο του X. Αν κάθε ακολουθία στοιχείων του D έχει υπακολουθία που συγκλίνει (στον X) δείξτε ότι ο (X, d) είναι συμπαγής.

29. Έστω $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι αν ο X είναι συμπαγής τότε για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει ότι $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

30. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε την απάντησή σας):

(i) Αν $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ είναι ομοιομορφισμός και ο X είναι ολικά φραγμένος, τότε και ο Y θα είναι ολικά φραγμένος.

(ii) Αν (x_n) είναι βασική ακολουθία σε έναν μετρικό χώρο (X, ρ), τότε το σύνολο $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ολικά φραγμένο.

31. Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος και έστω (K_n) φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X ώστε το $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ να είναι μονοσύνολο. Δείξτε ότι $\mathrm{diam}(K_n) \to 0$.

32. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω $x_0 \in X$. Αν για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $X \setminus B(x_0, \varepsilon)$ είναι συμπαγές, αποδείξτε ότι ο (X, d) είναι συμπαγής.

33. Αν A, B είναι δύο συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$, αποδείξτε ότι το σύνολο

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

είναι συμπαγές.

Ομάδα Γ′

34. (α) Έστω $\{(X_n, \rho_n)\}$ ακολουθία μετρικών χώρων με $\rho_n(x, y) \leqslant 1$ για κάθε $x, y \in X_n$ και $n = 1, 2, \ldots$. Δείξτε ότι ο χώρος γινόμενο $(\prod_{n=1}^{\infty} X, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \rho_n)$ είναι συμπαγής.

(β) Δείξτε ότι κύβος του Hilbert $\mathcal{H}^{\infty}$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος.

35. Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $(G_i)_{i=1}^{n}$ ανοικτό κάλυμμα του X. Θέτουμε $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \max\{\mathrm{dist}(x, X \setminus G_i) : i = 1, \ldots, n\}$ για $x \in X$. Αποδείξτε ότι

(α) Για κάθε $x \in X$ ισχύει $f(x) > 0$.

(β) Η f είναι συνεχής.

(γ) Χρησιμοποιώντας τα (α) και (β) αποδείξτε το λήμμα του Lebesgue.

36. (α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $R : [0, 2\pi) \to S^1$, με $R(t) = (\cos t, \sin t)$, όπου $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 = 1\}$ ο μοναδιαίος κύκλος είναι συνεχής, 1-1 και επί. Είναι οι χώροι $[0, 2\pi)$ και S^1 ομοιομορφικοί;

(β) Εξετάστε αν οι χώροι $([0, 2\pi], |\cdot|)$ και $(S^1, \|\cdot\|_2)$ είναι ομοιομορφικοί.

37. (α) Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \to X$ συνάρτηση με την ιδιότητα

$$\rho(f(x), f(y)) \geqslant \rho(x, y)$$

για κάθε $x, y \in X$. Δείξτε ότι η f είναι ισομετρία και επί.

(β) Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \to X$ 1-1, επί ώστε

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant \rho(x, y)$$

για κάθε $x, y \in X$. Δείξτε ότι η f είναι ισομετρία.

38. (α) Έστω (E_n) ακολουθία ξένων ανά δυο διαστημάτων του $[0, 1]$. Δείξτε ότι $\mathrm{diam}(E_n) \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

(β) Έστω $\delta > 0$. Βρείτε ακολουθία (F_n) ξένων ανά δύο κλειστών υποσυνόλων του $[0, 1]$ ώστε $\mathrm{diam}(F_n) \geqslant 1 - \delta$ για $n = 1, 2, \ldots$. Εξηγήστε που οφείλεται η διαφορά των αποτελεσμάτων (α) και (β).

(γ) Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ακολουθία ξένων ανά δύο κλειστών υποσυνόλων (F_n) του μοναδιαίου δίσκου $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ ώστε $\mathrm{diam}(F_n) \geqslant 2 - \varepsilon$ για $n = 1, 2, \ldots$.

(δ) Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ φραγμένο και (B_n) ακολουθία από ξένες ανά δύο κλειστές μπάλες στο K. Δείξτε ότι $\mathrm{diam}(\mathrm{B_n}) \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

(ε) Έστω (X, ρ) ολικά φραγμένος μετρικός χώρος και B_n ακολουθία από ξένες ανά δύο μπάλες στον X. Δείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\mathrm{diam}(B_n)\big) = 0$.

39. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $\delta > 0$. Ένα υποσύνολο A του X λέγεται δ–διαχωρισμένο αν για κάθε $x, y \in A$ με $x \neq y$ ισχύει $\rho(x, y) \geqslant \delta$.

(α) Δείξτε ότι αν κάθε δ–διαχωρισμένο υποσύνολο του X είναι πεπερασμένο και αν το $A \subseteq X$ είναι δ–διαχωρισμένο, τότε υπάρχει $B \subseteq X$ μεγιστικό δ–διαχωρισμένο ώστε $A \subseteq B$.

(β) Δείξτε ότι αν κάθε δ–διαχωρισμένο υποσύνολο του X είναι πεπερασμένο, τότε ο (X, ρ) είναι διαχωρίσιμος.

40. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Ο X είναι ολικά φραγμένος.

(β) Για κάθε $\delta > 0$, κάθε δ–διαχωρισμένο υποσύνολο του X είναι πεπερασμένο.

41. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Το A λέγεται *σχετικά συμπαγές* υποσύνολο του X αν το $\overline{A}$ είναι είναι συμπαγές υποσύνολο του X.

(α) Αποδείξτε ότι το A είναι σχετικά συμπαγές αν και μόνον αν κάθε ακολουθία (a_n) στοιχείων του A έχει υπακολουθία που συγκλίνει (όχι κατ' ανάγκην σε στοιχείο του A).

(β) Έστω (Y, ρ) μετρικός χώρος και $f : X \to Y$ συνεχής. Δείξτε ότι η f απεικονίζει σχετικά συμπαγή υποσύνολα του X σε σχετικά συμπαγή υποσύνολα του Y.

(γ) Αποδείξτε ότι κάθε σχετικά συμπαγές υποσύνολο είναι ολικά φραγμένο. Ισχύει το αντίστροφο;

42. Έστω (X, d) μετρικός χώρος με την εξής ιδιότητα: κάθε συνεχής συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη. Δείξτε ότι ο (X, d) είναι συμπαγής.