Πραγματική Ανάλυση
Εξέταση Περιόδου Σεπτεμβρίου 2019-20 (25/9/2020)
1ο Κλιμάκιο

Οδηγίες

Α. Διάρκεια εξέτασης: **90 λεπτά**.
Β. **Να απαντήσετε σε 3 από τα 4 θέματα.** Τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα με συνολική αξία 11,5 μονάδες.
Γ. Στο πάνω μέρος της κόλλας σας να γράψετε:
1ο Κλιμάκιο: Θέλω να βαθμολογηθούν τα Θέματα: (π.χ. 1, 2, 4).

Θέμα 1ο

(α) Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Δοθέντος ότι η $\rho = \min\{d, 1\}$ είναι μετρική επί του X, αποδείξτε ότι:

(i) Η ταυτοτική συνάρτηση $I : (X, d) \to (X, \rho)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και προς τις δύο κατευθύνσεις.

(ii) Ο (X, d) είναι πλήρης αν και μόνο αν ο (X, ρ) είναι πλήρης.

(β) Για έναν μετρικό χώρο (X, d) αποδείξτε ότι είναι πλήρης αν και μόνο αν κάθε αριθμήσιμο κλειστό υποσύνολο του X είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος.

Θέμα 2ο

Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $\emptyset \neq A \subseteq X$. Αποδείξτε ότι:

(α) Για τη συνάρτηση απόστασης $d_A : X \to [0, +\infty)$ ισχύει ότι:

$$d_A(x) = 0 \Longleftrightarrow x \in \overline{A}$$

(β) Αν $G \subseteq X$, τότε: Το G είναι ανοικτό αν και μόνο αν υπάρχουν συνεχής συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ και ανοικτό σύνολο $V \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $G = f^{-1}(V)$.

(γ) Αν $X = \mathbb{R}^2, d =$ η Ευκλείδεια μετρική και $A = \{(x, y) : \ |y| \leq 1\}$, υπολογίστε τη συνάρτηση d_A.

Θέμα 3ο

Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν ο (X, d) είναι πλήρης και $D \subseteq X$ ώστε τα D και $X \setminus D$ να είναι πυκνά υποσύνολα του X, τότε τουλάχιστον ένα από αυτά δεν είναι $F_\sigma-$σύνολο.

(β) Αν το A είναι ολικά φραγμένο υποσύνολο του X, τότε το $\overline{A}$ είναι ολικά φραγμένο.

(γ) Αν τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι ολικά φραγμένα υποσύνολα του X, τότε και η ένωσή τους $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ είναι ολικά φραγμένο σύνολο.

Θέμα 4ο

Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $x_n \xrightarrow{d} x$, τότε το σύνολο $K = \{x_n : \ n \geq 1\} \cup \{x\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X.

(β) Αν $F \subseteq X$, τότε το F είναι κλειστό αν και μόνο αν, για κάθε συμπαγές $\Omega \subseteq X$, το $\Omega \cap F$ είναι κλειστό στον X.

(γ) Αν $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$ είναι ακολουθία συνεχών συναρτήσεων με την ιδιότητα:
υπάρχει $a > 0$ ώστε για κάθε $x \in X$ και για κάθε $n \geq 1$, ισχύει $|f_n(x)| \leq n^2 + a$,
τότε ο τύπος

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x)$$

ορίζει συνεχή συνάρτηση στον X.

Καλή Επιτυχία

Πραγματική Ανάλυση - 2ο Κλιμάκιο
Εξέταση Περιόδου Σεπτεμβρίου 2019-20 (25/9/2020)

Οδηγίες

Α. Διάρκεια εξέτασης: **90 λεπτά**.

Β. **Να απαντήσετε σε 3 από τα 4 θέματα.** Τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα με συνολική αξία 11,5 μονάδες.

Γ. Στο πάνω μέρος της κόλλας σας να γράψετε:
2ο Κλιμάκιο: Θέλω να βαθμολογηθούν τα Θέματα: (π.χ. 1, 2, 4).

Θέμα 1ο

Έστω $(X_1, d_1),\ (X_2, d_2)$ μετρικοί χώρος. Ορίζουμε την $d : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ με

$$d\left((x,y),(x',y')\right) = \max\{d_1(x,x'), d_2(y,y')\},\ \text{για κάθε } x, x' \in X_1 \text{ και } y, y' \in X_2.$$

Αποδείξτε ότι:

(α) Η d είναι μετρική επί του $X = X_1 \times X_2$ με την ιδιότητα ότι

$$(x_n, y_n) \xrightarrow{d} (x,y) \iff x_n \xrightarrow{d_1} x \text{ και } y_n \xrightarrow{d_2} y\ .$$

(β) Αν οι $(X_1, d_1),\ (X_2, d_2)$ είναι συμπαγείς χώροι, τότε και ο (X, d) είναι συμπαγής χώρος.

(γ) Έστω $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$ και $d_1 = d_2 = \rho$ η συνήθης μετρική του $\mathbb{R}$. Σχεδιάστε την κλειστή μοναδιαία μπάλα $B = \widehat{B}(0,1)$ του χώρου $(\mathbb{R}^2, d)$.

Θέμα 2ο

Έστω $d_1,\ d_2$ μετρικές επί του συνόλου X για τις οποίες υπάρχουν σταθερές $a > 0$ και $b > 0$ ώστε:
$$a \cdot d_1(x,y) \le d_2(x,y) \le b \cdot d_1(x,y),\ \text{για κάθε } x, y \in X.$$

Αποδείξτε ότι:

(α) Αν η (x_n) είναι ακολουθία στον X, τότε η (x_n) είναι d_1-συγκλίνουσα αν και μόνο αν η (x_n) είναι d_2-συγκλίνουσα.

(β) Αν η (x_n) είναι ακολουθία στον X, τότε η (x_n) είναι d_1-Cauchy αν και μόνο αν η (x_n) είναι d_2-Cauchy.

(γ) Ο (X, d_1) είναι πλήρης αν και μόνο αν ο (X, d_2) είναι πλήρης.

(δ) Αν $X = \mathbb{R}^2$, βρείτε κατάλληλες σταθερές a και b οι οποίες να συσχετίζουν τις μετρικές $d_2\left((x,y),(x',y')\right) = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$ και $d_\infty\left((x,y),(x',y')\right) = \max\{|x-x'|, |y-y'|\}$ ως ανωτέρω.

Θέμα 3ο

Έστω (X, d) και (Y, ρ) μετρικοί χώροι και $K \neq \emptyset$ συμπαγές υποσύνολο του X. Αποδείξτε ότι:

(α) Υπάρχουν $x, y \in K$ ώστε $d(x,y) = \text{diam}K$.

(β) Αν $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ συνεχής συνάρτηση, τότε το $f(K)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y.

(γ) Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ n \ge 1$, ακολουθία συνεχών συναρτήσεων η οποία είναι ομοιόμορφα συγκλίνουσα επί του $\mathbb{Q}$. Αποδείξτε ότι η (f_n) είναι ομοιόμορφα συγκλίνουσα επί του $\mathbb{R}$.

Θέμα 4ο

Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι:

(α) Ο (X, d) είναι πλήρης αν και μόνο αν, για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\varepsilon > 0$, η κλειστή μπάλα $\widehat{B}(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) \le \varepsilon\}$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.

(β) (i) Αν $f_n : X \to \mathbb{R},\ n \ge 1$ είναι ακολουθία συνεχών συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{R}$ συνάρτηση ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα επί του X, τότε η f είναι συνεχής.

(ii) Αν $X = [0, +\infty)$ με τη συνήθη μετρική, οι $(f_n),\ f$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του (i) και επιπλέον, για κάθε $n \ge 1$, $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$, τότε και $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Καλή Επιτυχία