Εισαγωγή στην Ανάλυση ΙΙ

Μ. Παπαδημητράκης
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Κρήτης

Φθινόπωρο 2006

Πρόλογος

Οι σημειώσεις αυτές διαφέρουν από τις παλιότερες κατά πολύ.

1. Έχει προστεθεί ύλη και έχουν γίνει πολλές αλλαγές ως προς την διάταξή της. Σε μερικές περιπτώσεις έχει αλλάξει ουσιαστικά η παρουσίαση της ύλης. Για παράδειγμα, δίνεται ο ορισμός της συμπάγειας μέσω της έννοιας της ανοικτής κάλυψης ενώ πριν δινόταν ο ορισμός μέσω της έννοιας της ακολουθίας. Επίσης, έχει αφαιρεθεί το κεφάλαιο για την τοπολογία του $\mathbf{R}$ και έχει απορροφηθεί μαζί με τους ευκλείδιους χώρους $\mathbf{R}^n$ ως εκτενές παράδειγμα στο κεφάλαιο των μετρικών χώρων.
2. Αρκετές αποδείξεις έχουν αλλάξει ριζικά.
3. Έχουν προστεθεί πάρα πολλά παραδείγματα και πολλές ασκήσεις σε όλα τα επίπεδα δυσκολίας. Οι ασκήσεις δεν είναι πια στο τέλος κάθε κεφαλαίου αλλά εκεί όπου εμφανίζονται οι αντίστοιχες έννοιες.
4. Έχουν διορθωθεί αρκετά λάθη (και, μάλλον, έχουν εμφανισθεί καινούρια).

Βιβλιογραφία

1. W. Rudin. *Principles of mathematical analysis* (3rd edition). McGraw-Hill.

2. T. Apostol. *Mathematical analysis* (2nd edition). Addison-Wesley.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Σειρές πραγματικών αριθμών.

1.1 Γενικά.

Ορισμός 1.1 *Αν έχουμε μία ακολουθία* (a_n) *στο* $\mathbf{R}$*, μπορούμε να κατασκευάσουμε την ακολουθία* (s_n)*, επίσης στο* $\mathbf{R}$*, βάσει του τύπου:*

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\,, \qquad n \in \mathbf{N}\,.$$

Δηλαδή, $s_1 = a_1$*,* $s_2 = a_1 + a_2$*,* $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$ *και ούτω καθεξής.*

Η ακολουθία (s_n) *ονομάζεται* ***σειρά των*** a_n $(n \in \mathbf{N})$ *και συμβολίζεται*

$$a_1 + \cdots + a_n + \cdots \qquad ή \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\,.$$

Πολλές φορές χρησιμοποιούμε και το σύμβολο $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ *ή το* $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ *κλπ, ανάλογα με το πόσους αρχικούς όρους θέλουμε να εμφανίσουμε. Επίσης χρησιμοποιούμε και το σύμβολο* $a_1 + a_2 + \cdots$ *ή το* $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ *κλπ, αν ο* n*-οστός όρος* a_n *είναι φανερός από τους αρχικούς όρους ή από τα συμφραζόμενα.*

Μερικές φορές εμφανίζεται και όρος a_0 *πριν από τους* $a_1, a_2, \ldots$ *, οπότε, κάνοντας τις κατάλληλες προσαρμογές, γράφουμε* $s_0 = a_0$*,* $s_1 = a_0 + a_1$*,* $s_2 = a_0 + a_1 + a_2$ *και, γενικότερα,* $s_n = a_0 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ $(n \in \mathbf{N}_0)$*. Επίσης, χρησιμοποιούμε τον όρο* ***σειρά των*** a_n $(n \in \mathbf{N}_0)$ *και το σύμβολο* $a_0 + \cdots + a_n + \cdots$ *ή το* $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$*.*

Μερικές φορές η ακολουθία (a_n) *ξεκινάει από τον όρο* a_{n_0} *για κάποιο* $n_0 > 1$*. Η προσαρμογή των συμβόλων για την αντίστοιχη σειρά είναι προφανής:* $a_{n_0} + \cdots + a_n + \cdots$ *ή* $\sum_{k=n_0}^{+\infty} a_k$*. Επίσης, για τα μερικά αθροίσματα γράφουμε* $s_{n_0} = a_{n_0}$*,* $s_{n_0+1} = a_{n_0} + a_{n_0+1}$ *και, γενικότερα,* $s_n = a_{n_0} + \cdots + a_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k$ $(n \in \mathbf{N}, n \geq n_0)$*.*

Παραδείγματα:

1. Η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} k$ είναι η ακολουθία με όρους: 1, $1 + 2 = 3$, $1 + 2 + 3 = 6$ και,

γενικότερα, $1+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.
2. Η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2$ είναι η ακολουθία με όρους: 1, $1+4=5$, $1+4+9=14$ και, γενικότερα, $1+4+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. Η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)$ είναι η ακολουθία με όρους: -1, $-1+(-1)=-2$, $-1+(-1)+(-1)=-3$ και, γενικότερα, $-1+\cdots+(-1)=-n$.
4. Η σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k$ είναι η ακολουθία με όρους: 1, $1+2=3$, $1+2+4=7$ και, γενικότερα, $1+2+\cdots+2^n=\frac{2^{n+1}-1}{2-1}=2^{n+1}-1$.
5. Η σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}$ είναι η ακολουθία με όρους: 1, $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$ και, γενικότερα, $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2^{n+1}}-1}{\frac{1}{2}-1}=2-\frac{1}{2^n}$.
6. Η σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k$ είναι η ακολουθία με όρους: 1, $1+(-1)=0$, $1+(-1)+1=1$ και, γενικότερα, $1+(-1)+\cdots+(-1)^n=\begin{cases}1, & \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος,}\\ 0, & \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός.}\end{cases}$

Ορισμός 1.2 *Το a_n ονομάζεται **n-οστός προσθετέος** της σειράς $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$. Το $s_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$, δηλαδή ο n-οστός όρος της ακολουθίας (s_n) ή, ισοδύναμα, της σειράς $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$, ονομάζεται **n-οστό μερικό άθροισμα των** a_n $(n\in\mathbf{N})$.*

Ας τονίσουμε ότι στους προηγούμενους ορισμούς δεν προϋποτίθεται τίποτα σε σχέση με τη σύγκλιση είτε της ακολουθίας (a_n) είτε της ακολουθίας (s_n).

Ορισμός 1.3 *Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ ή, ισοδύναμα, η ακολουθία (s_n) έχει όριο $s\in\mathbf{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$, γράφουμε*

$$s=a_1+\cdots+a_n+\cdots \qquad \text{ή} \qquad s=\sum_{k=1}^{+\infty} a_k\,.$$

*Το s ονομάζεται **άθροισμα της σειράς** $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$. Αν $s\in\mathbf{R}$, λέμε ότι η σειρά **συγκλίνει στο** s, ενώ, αν $s=+\infty$ ή $s=-\infty$, λέμε ότι η σειρά **αποκλίνει στο** $+\infty$ ή **αποκλίνει στο** $-\infty$, αντιστοίχως.*

Ορισμός 1.4 *Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ ή, ισοδύναμα, η ακολουθία (s_n) δεν έχει όριο, λέμε ότι η σειρά **αποκλίνει**.*

Ας δούμε τι μπορούμε να πούμε στις περιπτώσεις των προηγούμενων παραδειγμάτων.

Παραδείγματα:
1. Η ακολουθία $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$ αποκλίνει στο $+\infty$, οπότε η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} k$ αποκλίνει στο $+\infty$ ή, ισοδύναμα, έχει άθροισμα $+\infty$ και γράφουμε: $\sum_{k=1}^{+\infty} k=+\infty$.
2. Ομοίως, επειδή $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\to+\infty$, η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2$ αποκλίνει στο $+\infty$ ή, ισοδύναμα, έχει άθροισμα $+\infty$ και γράφουμε: $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2=+\infty$.
3. Επειδή $-n\to-\infty$, η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)$ αποκλίνει στο $-\infty$ ή, ισοδύναμα, έχει άθροισμα $-\infty$ και γράφουμε: $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)=-\infty$.
4. Επειδή $2^{n+1}-1\to+\infty$, η σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k$ αποκλίνει στο $+\infty$ ή, ισοδύναμα,

έχει άθροισμα $+\infty$ και γράφουμε: $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k = +\infty$.
5. Επειδή $2 - \frac{1}{2^n} \to 2$, η σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$ συγκλίνει στο 2 ή, ισοδύναμα, έχει άθροισμα 2 και γράφουμε: $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2$.
6. Επειδή η ακολουθία (s_n) με τύπο $s_n = \begin{cases} 1, & \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος,} \\ 0, & \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός} \end{cases}$ δεν έχει όριο, η σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k$ αποκλίνει και, μάλιστα, δεν αποκλίνει ούτε στο $+\infty$ ούτε στο $-\infty$.

Άσκηση 1: Υπολογίστε τα μερικά αθροίσματα και τα αθροίσματα, αν αυτά τα τελευταία υπάρχουν, των σειρών $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}k$, $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}k^2$, $\sum_{k=0}^{+\infty}(-3)^k$ και $\sum_{k=0}^{+\infty}\big(-\frac{1}{3}\big)^k$.

Από το γεγονός ότι μία σειρά είναι μία ακολουθία (η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων μίας προϋπάρχουσας ακολουθίας) είναι προφανές ότι η εξέταση της σύγκλισης μίας σειράς δεν είναι τίποτα άλλο από την εξέταση της σύγκλισης μίας ακολουθίας. Επειδή, όμως, οι σειρές εμφανίζονται πολύ συχνά στη Μαθηματική Ανάλυση και στις εφαρμογές της, θα τις μελετήσουμε ξεχωριστά από τις ακολουθίες.

Παραδείγματα:
1. Η **γεωμετρική σειρά**: $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k \quad (x \in \mathbf{R})$.

Το $x \in \mathbf{R}$ είναι παράμετρος και ονομάζεται **λόγος** της γεωμετρικής σειράς. Δηλαδή, ουσιαστικά, υπάρχουν άπειρες γεωμετρικές σειρές, μία για κάθε τιμή του x. Ο αρχικός προσθετέος της σειράς είναι ο x^0, ο οποίος έχει την τιμή 1 για κάθε $x \neq 0$. Όπως γνωρίζουμε, η παράσταση 0^0 είναι απροσδιόριστη, αλλά, ειδικά στην περίπτωση της γεωμετρικής σειράς (όπως και στην γενικότερη περίπτωση των *δυναμοσειρών* που θα μελετήσουμε αργότερα), κάνουμε την παραδοχή: $0^0 = 1$.

Ο n-οστός προσθετέος της γεωμετρικής σειράς είναι ο $x^0 = 1$, αν $n = 0$, και ο x^n, αν $n = 1, 2, \ldots$. Άρα, το n-οστό μερικό άθροισμα είναι το

$$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \begin{cases} \frac{x^{n+1}-1}{x-1}, & \text{αν } x \neq 1, \\ n+1, & \text{αν } x = 1. \end{cases}$$

Διακρίνοντας περιπτώσεις ως προς την τιμή του x, έχουμε τα παρακάτω συμπεράσματα.
(i) Αν $x = 1$, τότε $s_n = n + 1 \to +\infty$, οπότε η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$.
(ii) Αν $x > 1$, τότε $x^{n+1} \to +\infty$, οπότε $s_n \to +\infty$ και, επομένως, η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$.
(iii) Αν $x = -1$, τότε $s_n = \begin{cases} 1, & \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος,} \\ 0, & \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός.} \end{cases}$ Επομένως, η (s_n) ούτε συγκλίνει ούτε αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$.
(iv) Αν $x < -1$, τότε $s_n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} = \begin{cases} \frac{|x|^{n+1}-1}{x-1} \to -\infty, & \text{αν } n \text{ είναι περιττός.} \\ \frac{-|x|^{n+1}-1}{x-1} \to +\infty, & \text{αν } n \text{ είναι άρτιος.} \end{cases}$
Άρα, η (s_n) ούτε συγκλίνει ούτε αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$.
(v) Αν $|x| < 1$, τότε $x^{n+1} \to 0$, οπότε $s_n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \to \frac{1}{1-x}$. Επομένως, η σειρά συγκλίνει στο $\frac{1}{1-x}$.

Το γενικό συμπέρασμα για τη γεωμετρική σειρά είναι

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \begin{cases} \frac{1}{1-x}\,, & \text{αν } |x| < 1. \\ +\infty, & \text{αν } x \geq 1. \end{cases}$$

Σε κάθε άλλη περίπτωση, δηλαδή, αν $x \leq -1$, η γεωμετρική σειρά ούτε συγκλίνει ούτε αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$.

2. **Τηλεσκοπικές σειρές**.

Αν έχουμε την ακολουθία (a_n) και γνωρίζουμε μία άλλη ακολουθία (b_n) ώστε να ισχύει $a_n = b_{n+1} - b_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, λέμε ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=1}^{+\infty}(b_{k+1} - b_k)$ είναι **τηλεσκοπική**. Στην περίπτωση αυτή η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ συγκλίνει ή αποκλίνει στο $+\infty$ ή αποκλίνει στο $-\infty$ αν και μόνον αν η ακολουθία (b_n) συγκλίνει ή αποκλίνει στο $+\infty$ ή αποκλίνει στο $-\infty$, αντιστοίχως.

Η απόδειξη βασίζεται στον τύπο:

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n = (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \cdots + (b_{n+1} - b_n) = b_{n+1} - b_1\,.$$

Είναι φανερό ότι: $b_n \to b$ (ή, ισοδύναμα, $b_{n+1} \to b$) αν και μόνον αν $s_n \to b - b_1$.

Ας δούμε, για παράδειγμα, τη σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$. Μπορούμε να γράψουμε $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ και, επομένως,

$$s_n = \Big(1 - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1.$$

Δηλαδή,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

Άσκηση 2: Γράψτε τις $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ και $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ ως τηλεσκοπικές, και υπολογίστε τα μερικά αθροίσματα και τα αθροίσματά τους.

Πρόταση 1.1 *1. Αν οι σειρές $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ και $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ έχουν αθροίσματα τα οποία δεν είναι $+\infty$ και $-\infty$ ή $-\infty$ και $+\infty$, η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k + b_k)$ έχει άθροισμα και*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k\,.$$

2. Αν $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$ και η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ έχει άθροισμα, η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty}(\lambda a_k)$ έχει άθροισμα και

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\,.$$

Αν $\lambda = 0$, η ισότητα αυτή ισχύει κατά προφανή τρόπο, εκτός αν το άθροισμα της $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, οπότε η αριστερή μεριά είναι ίση με 0 και η δεξιά είναι απροσδιόριστη μορφή.

Απόδειξη: Έστω $s = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ και $t = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k$.
1. Αν $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ και $u_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)$ είναι τα n-οστά μερικά αθροίσματα των a_n, b_n και $a_n + b_n$, αντιστοίχως, έχουμε $u_n = s_n + t_n$. Επειδή $s_n \to s$ και $t_n \to t$, συνεπάγεται $u_n \to s + t$.
2. Αν $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ και $u_n = \sum_{k=1}^{n}(\lambda a_k)$ είναι τα n-οστά μερικά αθροίσματα των a_n και λa_n, αντιστοίχως, έχουμε $u_n = \lambda s_n$. Επειδή $s_n \to s$, συνεπάγεται $u_n \to \lambda s$. Ο.Ε.Δ.

Άσκηση 3: Υπολογίστε τα αθροίσματα των σειρών $\sum_{k=0}^{+\infty} \big(\frac{2}{3^k} - 3(-1)^k \frac{1}{2^k}\big)$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \big(-2^k + \frac{4}{2^k}\big)$, $\sum_{k=0}^{+\infty}(2^k + 4k)$ και $\sum_{k=0}^{+\infty}(2^k - 3k)$.

Πρόταση 1.2 ***Σύγκριση σειρών,*** **I**. *Αν οι σειρές $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ και $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ έχουν αθροίσματα και αν $a_n \le b_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, τότε*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \le \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \,.$$

Αν, επιπλέον, τα δύο αθροίσματα είναι ίσοι πραγματικοί αριθμοί, τότε $a_n = b_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$.

Απόδειξη: Έστω $s = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ και $t = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k$.
1. Αν $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ και $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ είναι τα n-οστά μερικά αθροίσματα των a_n και b_n, αντιστοίχως, έχουμε $s_n \le t_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Επειδή $s_n \to s$ και $t_n \to t$, συνεπάγεται $s \le t$.
2. Έστω $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ και η κοινή τιμή των δύο αθροισμάτων είναι πραγματικός αριθμός. Παίρνουμε οποιοδήποτε $m \in \mathbf{N}$ και παρατηρούμε ότι για κάθε $n \ge m$ ισχύει $t_n - s_n = \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) \ge b_m - a_m \ge 0$, αφού το $b_m - a_m$ είναι ένας από τους όρους του αθροίσματος και όλες οι άλλες παρενθέσεις είναι μη-αρνητικές. Παίρνουμε όριο καθώς $n \to +\infty$ και, επειδή οι (s_n) και (t_n) έχουν ως όριο τον ίδιο πραγματικό αριθμό, συμπεραίνουμε ότι $b_m - a_m = 0$. Άρα, $a_m = b_m$ για οποιοδήποτε $m \ge 1$. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 1.3 ***Σύγκριση σειρών,*** **II**. *Έστω $a_n \le b_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$.*
1. Αν $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = +\infty$, τότε $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k = +\infty$.
2. Αν $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k = -\infty$, τότε $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = -\infty$.

Απόδειξη: Αν $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ και $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ είναι τα n-οστά μερικά αθροίσματα των a_n και b_n, αντιστοίχως, έχουμε $s_n \le t_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$.
1. Επειδή $s_n \to +\infty$, συνεπάγεται $t_n \to +\infty$.
2. Επειδή $t_n \to -\infty$, συνεπάγεται $s_n \to -\infty$. Ο.Ε.Δ.

Άσκηση 4: Να συγκρίνετε τις σειρές $\sum_{k=1}^{+\infty} k$, $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2$ και $\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k$ με μία πολύ απλή σειρά για να αποδείξετε ότι και οι τρεις αποκλίνουν στο $+\infty$.

Πρόταση 1.4 *1. Αν απαλείψουμε πεπερασμένου πλήθους αρχικούς προσθετέους μιας σειράς, δεν επηρεάζεται η σύγκλισή της.*
2. Αν αλλάξουμε πεπερασμένου πλήθους προσθετέους μιας σειράς, δεν επηρεάζεται η σύγκλισή της.

Απόδειξη: 1. Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ και απαλείφουμε τους προσθετέους $a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}$, οπότε η καινούρια σειρά γράφεται $\sum_{k=n_0}^{+\infty} a_k$. Αν s_n είναι το n-οστό μερικό άθροισμα των a_n $(n = 1, 2, \ldots)$, τότε $s_n = a_1 + \cdots + a_n$. Ομοίως, αν t_n είναι το n-οστό μερικό άθροισμα των a_n $(n = n_0, n_0 + 1, \ldots)$, τότε $t_n = a_{n_0} + \cdots + a_n$. Επομένως, αν $n \geq n_0$,

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_0-1} + a_{n_0} + \cdots + a_n = a_1 + \cdots + a_{n_0-1} + t_n\,.$$

Άρα, η (s_n) συγκλίνει αν και μόνον αν η (t_n) συγκλίνει. Επιπλέον, αν $s_n \to s$ και $t_n \to t$, παίρνοντας όριο στην προηγούμενη ισότητα καθώς $n \to +\infty$, συμπεραίνουμε ότι $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_0-1} + t$. Δηλαδή,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = a_1 + \cdots + a_{n_0-1} + \sum_{k=n_0}^{+\infty} a_k\,.$$

2. Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ και αλλάζουμε *πεπερασμένου πλήθους* προσθετέους. Θα υπάρχει, τότε, n_0 ώστε τα a_n $(n = n_0, n_0 + 1, \ldots)$ να παραμείνουν ίδια. Επομένως, τόσο η αρχική όσο και η καινούρια σειρά έχουν το ίδιο κομμάτι $\sum_{k=n_0}^{+\infty} a_k$ και, απλώς, εφαρμόζουμε το αποτέλεσμα του μέρους 1. Ο.Ε.Δ.

Άσκηση 5: Μελετήστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές $\sum_{k=7}^{+\infty} 2^k$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+15}}$, $\sum_{k=3}^{+\infty} 2^{k-7}$ και $\sum_{k=8}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$, κάνοντας αναγωγή σε άλλες απλούστερες.

Πρόταση 1.5 *Έστω ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ συγκλίνει. Τότε*
1. $a_n \to 0$ και
2. για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbf{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \Big|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k\Big| < \epsilon\,.$$

Απόδειξη: Έστω $s = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ και $s \in \mathbf{R}$. Αν $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, τότε $s_n \to s$ και, επομένως,
1. $a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0$ και
2. $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = s - s_n \to 0$. Ο.Ε.Δ.

Πρέπει να τονισθεί *με έμφαση* ότι το αντίστροφο της Πρότασης 1.5.1 δεν ισχύει. Λίγο παρακάτω θα μελετήσουμε παράδειγμα σειράς $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ (την *αρμονική σειρά*) η οποία αποκλίνει ενώ $a_n \to 0$.

Παράδειγμα:
Αν $|x| \geq 1$, μπορούμε να δούμε και με δεύτερο τρόπο ότι η γεωμετρική σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ αποκλίνει. Πράγματι, $|x^n| = |x|^n \geq 1$ και, επομένως, $x^n \not\to 0$.

Άσκηση 6: Αποδείξτε ότι οι $\sum_{k=1}^{+\infty} \big(1+(-1)^k\big)$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2-k+1}{k^2+1}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k+3^k}{2^{k+1}+3^{k+1}}$ και $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\log(1+\frac{1}{k})}$ αποκλίνουν.

Θεώρημα 1.1 ***Κριτήριο του Cauchy.*** *Η σειρά* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *συγκλίνει αν και μόνον αν για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbf{N}$ *ώστε:*

$$n_0 \le m < n \quad \Rightarrow \quad \Big|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\Big| = |a_{m+1} + \cdots + a_n| < \epsilon\,.$$

Απόδειξη: Έστω $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ το n-οστό μερικό άθροισμα. Η σειρά συγκλίνει αν και μόνον αν η (s_n) συγκλίνει ή, ισοδύναμα, αν και μόνον αν η (s_n) είναι ακολουθία Cauchy. Όμως, το ότι η (s_n) είναι ακολουθία Cauchy ισοδυναμεί, εξ ορισμού, με το ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbf{N}$ ώστε: $n_0 \le m < n \Rightarrow |a_{m+1} + \cdots + a_n| = |(a_1 + \cdots + a_n) - (a_1 + \cdots + a_m)| = |s_n - s_m| < \epsilon$. Ο.Ε.Δ.

Το κριτήριο του Cauchy εκφράζεται και ως εξής: *η σειρά* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *συγκλίνει αν και μόνον αν* $\sum_{k=m+1}^{n} a_k \to 0$ *καθώς* $m, n \to +\infty$.

Παράδειγμα:
Η **αρμονική σειρά**: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$.

Κατ΄ αρχήν, αν $m < n$, ισχύει $\frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n} \ge \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} = (n-m)\frac{1}{n}$.

Εφαρμόζουμε, τώρα, το κριτήριο Cauchy. Αν η αρμονική σειρά συγκλίνει, τότε, παίρνοντας $\epsilon = \frac{1}{4}$, θα υπάρχει κάποιο $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε: $n_0 \le m < n \Rightarrow \big|\frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n}\big| < \frac{1}{4}$. Ειδικώτερα, παίρνοντας $m = n_0$ και $n = 2n_0$, θα ισχύει $\frac{1}{n_0+1} + \cdots + \frac{1}{2n_0} < \frac{1}{4}$. Αυτό, όμως, αντιφάσκει με το ότι $\frac{1}{n_0+1} + \cdots + \frac{1}{2n_0} \ge (2n_0 - n_0)\frac{1}{2n_0} = \frac{1}{2}$.

Άρα, η αρμονική σειρά αποκλίνει και έτσι αποδεικνύεται ότι το αντίστροφο της Πρότασης 1.5.1 δεν ισχύει.

Άσκηση 7: Εφαρμόστε το κριτήριο του Cauchy για να καταλήξετε στα ήδη γνωστά αποτελέσματα ως προς τη σύγκλιση των σειρών $\sum_{k=1}^{+\infty} 1$, $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k$, $\sum_{k=1}^{+\infty} k$, $\sum_{k=1}^{+\infty}(-2)^k$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ και $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

1.2 Σειρές με μη αρνητικούς προσθετέους.

Θεώρημα 1.2 *Έστω* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *με* $a_n \ge 0$ *για κάθε* $n \in \mathbf{N}$ *και* $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.
1. Αν η ακολουθία (s_n) *είναι άνω φραγμένη, η σειρά συγκλίνει.*
2. Αν η (s_n) *δεν είναι άνω φραγμένη, τότε* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = +\infty$.

Απόδειξη: Κατ΄ αρχήν παρατηρούμε ότι η (s_n) είναι αύξουσα. Πράγματι, $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \ge s_n$. Άρα, αν η (s_n) είναι άνω φραγμένη, τότε συγκλίνει και, επομένως, η σειρά συγκλίνει. Αντιθέτως, αν η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $s_n \to +\infty$ και, επομένως, $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = +\infty$. Ο.Ε.Δ.

Πρέπει να τονισθεί ότι, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.2, κάθε σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ με μη-αρνητικούς προσθετέους *είτε συγκλίνει είτε αποκλίνει στο* $+\infty$ *και, σε κάθε* *περίπτωση, έχει άθροισμα.* Μάλιστα, από την Πρόταση 1.2 έχουμε $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \geq \sum_{k=1}^{+\infty} 0 = 0$. Μπορούμε, λοιπόν, να συμπεράνουμε ότι κάθε σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ με μη-αρνητικούς προσθετέους έχει οπωσδήποτε άθροισμα το οποίο είναι είτε μη αρνητικός αριθμός είτε $+\infty$. Δηλαδή,

$$0 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \leq +\infty.$$

Έτσι, η σύγκλιση της σειράς είναι ισοδύναμη με την ανισότητα $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k < +\infty$, ενώ η απόκλιση της σειράς είναι ισοδύναμη με την ισότητα $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = +\infty$.

Επίσης πρέπει να επισημάνουμε ότι, αν έχουμε μία γενική σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$, μπορούμε να γράψουμε την ανισότητα $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \leq +\infty$, *μόνον αν γνωρίζουμε ότι η σειρά έχει άθροισμα, δηλαδή αν το* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *έχει υπόσταση ως στοιχείο του* $\mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Αυτή η προϋπόθεση είναι εκ των προτέρων εξασφαλισμένη, αν η σειρά έχει μη-αρνητικούς προσθετέους.

Πρόταση 1.6 ***Σύγκριση σειρών,* III**. *Έστω $0 \leq a_n \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Τότε*
1. $0 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ και
2. αν η $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ συγκλίνει.

Απόδειξη: Επειδή οι σειρές $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ και $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ έχουν μη-αρνητικούς προσθετέους, έχουν και οι δύο αθροίσματα.
1. Από την Πρόταση 1.2 συνεπάγεται $0 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{+\infty} b_k$.
2. Επειδή $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k < +\infty$, συμπεραίνουμε $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k < +\infty$. Ο.Ε.Δ.

Παραδείγματα:
1. Όπως είδαμε, η αρμονική σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει. Επειδή είναι σειρά με μη-αρνητικούς προσθετέους, συμπεραίνουμε ότι αποκλίνει στο $+\infty$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

2. Η σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$.

Για κάθε $k \geq 1$ ισχύει $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k \geq 1 \cdot 2 \cdots 2 = 2^{k-1}$ και, επομένως, $0 \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ για κάθε $n \geq 1$. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.2, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$. Άρα η $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ συγκλίνει.

Η επόμενη Πρόταση 1.7 λέει ότι το άθροισμα της σειράς $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ είναι το ίδιο με το όριο της ακολουθίας $\left((1 + \frac{1}{n})^n\right)$, τον γνωστό αριθμό e.

Πρόταση 1.7

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e\,.$$

Απόδειξη: Έστω $s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ και $t_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Τότε

$$t_n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$
$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) + \cdots + \frac{1}{k!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{2}{n}\Big)\ldots\Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{1}{n!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\ldots\Big(1 - \frac{n-1}{n}\Big).$$

Επειδή όλες οι παρενθέσεις είναι θετικές και μικρότερες από το 1, συνεπάγεται $t_n \leq 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} = s_n$ για κάθε $n \geq 1$. Ακόμη, αν $1 \leq k \leq n$, παραλείποντας τους (θετικούς) όρους μετά από τον k-οστό, έχουμε

$$t_n \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) + \cdots + \frac{1}{k!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{2}{n}\Big)\ldots\Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big).$$

Παίρνοντας όρια καθώς $n \to +\infty$, έχουμε $e \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} = s_k$ για κάθε $k \geq 1$ και, με αλλαγή συμβολισμού, $e \geq s_n$ για κάθε $n \geq 1$.

Άρα, $t_n \leq s_n \leq e$ για κάθε $n \geq 1$ και, επομένως, $s_n \to e$. Ο.Ε.Δ.

Άσκηση 8: Έστω $\rho \leq 1$. Συγκρίνοντας με μία γνωστή σειρά, αποδείξτε ότι $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\rho} = +\infty$.

Άσκηση 9: 1. Να συγκρίνετε (με κάποιο τρόπο) τη σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ με τη σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$ ώστε να αποδείξετε ότι $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$.
2. Έστω $\rho \geq 2$. Συγκρίνοντας με γνωστή σειρά, αποδείξτε ότι $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\rho} < +\infty$.

Άσκηση 10: Έστω $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Αν η $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{a_k a_{k+1}}$ συγκλίνει. (Υπόδειξη: $xy \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$.) Αν, επιπλέον, η (a_n) είναι φθίνουσα, αποδείξτε ότι αληθεύει και το αντίστροφο.

Άσκηση 11: Έστω η ακολουθία $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ των φυσικών αριθμών οι οποίοι δεν περιέχουν το ψηφίο 0 στη δεκαδική τους παράσταση. Αποδείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n_k}$ συγκλίνει σε αριθμό μικρότερο από 90. (Υπόδειξη: Βρείτε πόσοι όροι της (n_k) βρίσκονται ανάμεσα σε δύο διαδοχικές δυνάμεις του 10.)

Άσκηση 12: Έστω $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και η $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ συγκλίνει. Ορίζουμε $r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$.
1. Αν $1 \leq m < n$, αποδείξτε ότι $\frac{a_m}{r_m} + \cdots + \frac{a_n}{r_n} \geq 1 - \frac{r_{n+1}}{r_m}$ (Υπόδειξη: Η (r_n) είναι φθίνουσα.) και συμπεράνατε ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{r_k}$ αποκλίνει. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το κριτήριο του Cauchy και το ότι $r_n \to 0$.)
2. Αποδείξτε ότι $\frac{a_n}{\sqrt{r_n}} < 2(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}})$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και συμπεράνατε ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{\sqrt{r_k}}$ συγκλίνει.

Άσκηση 13: Έστω $a_n > 0$ και $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και η $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ αποκλίνει.

1. Αποδείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$ αποκλίνει. (Υπόδειξη: Υποθέστε ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$ συγκλίνει, οπότε $\frac{a_n}{1+a_n} \to 0$. Αποδείξτε ότι $a_n \to 0$. Άρα η (a_n) είναι άνω φραγμένη, οπότε $a_n \leq M$ για κάποιο M και, επομένως, $a_n \leq (1+M)\frac{a_n}{1+a_n}$. Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Σύγκρισης.)
2. Αν $1 \leq m < n$, αποδείξτε ότι $\frac{a_{m+1}}{s_{m+1}} + \cdots + \frac{a_n}{s_n} \geq 1 - \frac{s_m}{s_n}$ (Υπόδειξη: Η (s_n) είναι αύξουσα.) και συμπεράνατε ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{s_k}$ αποκλίνει. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το κριτήριο του Cauchy και το ότι $s_n \to +\infty$.)
3. Αποδείξτε ότι $\frac{a_n}{s_n^2} \leq \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ (Υπόδειξη: $a_n = s_n - s_{n-1}$.) και συμπεράνατε ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{s_k^2}$ συγκλίνει.

Πολλές φορές συναντάμε σειρές $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ των οποίων οι προσθετέοι a_n *φθίνουν προς το 0*: $a_{n+1} \leq a_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και $a_n \to 0$. Θα δούμε δύο κριτήρια σύγκλισης χρήσιμα σε τέτοιες περιπτώσεις.

Πρόταση 1.8 ***Κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy.*** *Έστω σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ με προσθετέους οι οποίοι φθίνουν προς το 0. Η σειρά αυτή συγκλίνει αν και μόνον αν η σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει.*

Απόδειξη: Έστω ότι η $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει. Τότε τα μερικά αθροίσματα $a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^n a_{2^n}$ είναι άνω φραγμένα, έστω από τον αριθμό M. Αρκεί, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.2, να αποδείξουμε το ίδιο για τα μερικά αθροίσματα της $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$. Έστω $s_m = a_1 + \cdots + a_m$. Ο αριθμός m βρίσκεται ανάμεσα σε δύο διαδοχικές δυνάμεις του 2, έστω $2^n \leq m < 2^{n+1}$. Χρησιμοποιώντας ότι η (a_n) είναι φθίνουσα,

$$s_m = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^{n-1}} + \cdots + a_{2^n - 1}) +$$

$$+ (a_{2^n} + \cdots + a_m) \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^{n-1} a_{2^{n-1}} + 2^n a_{2^n} \leq M.$$

Αντιστρόφως, έστω ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ συγκλίνει. Τότε η (s_m) είναι άνω φραγμένη, οπότε υπάρχει κάποιο M ώστε $s_m \leq M$ για κάθε $m \in \mathbf{N}$. Συνεπάγεται

$$a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^n a_{2^n}$$

$$\leq 2a_1 + 2a_2 + 2(a_3 + a_4) + \cdots + 2(a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n})$$

$$= 2s_{2^n} \leq 2M.$$

Άρα, τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k a_{2^k}$ είναι άνω φραγμένα, οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.2, η $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει. Ο.Ε.Δ.

Παραδείγματα:
1. $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\rho}$ $(\rho \in \mathbf{R})$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις ως προς τις τιμές του ρ.
(i) Αν $\rho \leq 0$, τότε $\frac{1}{n^\rho} \geq 1$, οπότε, βάσει της Πρότασης 1.5.1, η σειρά δε συγκλίνει. Επειδή η σειρά έχει μη-αρνητικούς προσθετέους, αποκλίνει στο $+\infty$.

Εναλλακτικά, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\rho} \geq \sum_{k=1}^{+\infty} 1 = +\infty$ και, επομένως, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\rho} = +\infty$.
(ii) Αν $\rho > 0$, η ακολουθία $\left(\frac{1}{n^\rho}\right)$ φθίνει προς το 0. Εξετάζουμε τη σειρά

$\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^\rho} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{\rho-1}}\right)^k$. Η τελευταία σειρά είναι γεωμετρική με λόγο $\frac{1}{2^{\rho-1}}$. Η σειρά αυτή συγκλίνει, αν $\frac{1}{2^{\rho-1}} < 1$, δηλαδή αν $\rho > 1$, και αποκλίνει στο $+\infty$, αν $\frac{1}{2^{\rho-1}} \geq 1$, δηλαδή αν $0 < \rho \leq 1$.

Άρα, η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\rho}$ συγκλίνει, αν $\rho > 1$, και αποκλίνει στο $+\infty$, αν $\rho \leq 1$.

Άσκηση 14: Έστω $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Αν η $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{a_k}}{k}$ συγκλίνει. (Υπόδειξη: $xy \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$.)

2. $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(\log k)^\rho}$ $(\rho \in \mathbf{R})$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις ως προς το ρ.

(i) Αν $\rho \leq 0$, για κάθε $n \geq 3$ έχουμε $\frac{1}{n(\log n)^\rho} = \frac{(\log n)^{|\rho|}}{n} \geq \frac{1}{n}$ και, επομένως, $\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k(\log k)^\rho} \geq \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$. Άρα, $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(\log k)^\rho} = +\infty$.

(ii) Αν $\rho > 0$, η ακολουθία $\left(\frac{1}{n(\log n)^\rho}\right)$ φθίνει προς το 0. Βάσει του προηγούμενου παραδείγματος, η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k \frac{1}{2^k(\log(2^k))^\rho} = \frac{1}{(\log 2)^\rho} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\rho}$ συγκλίνει, αν $\rho > 1$, και αποκλίνει στο $+\infty$, αν $0 < \rho \leq 1$.

Άρα, η $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(\log k)^\rho}$ συγκλίνει, αν $\rho > 1$, και αποκλίνει στο $+\infty$, αν $\rho \leq 1$.

Άσκηση 15: Εξετάστε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k \log k \big(\log(\log k)\big)^\rho}$, ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου $\rho \in \mathbf{R}$.

Θα μελετήσουμε, τώρα, ένα δεύτερο κριτήριο σύγκλισης σειρών $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ με προσθετέους οι οποίοι φθίνουν προς το 0.

Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε μία συνάρτηση $f : [1, +\infty) \to \mathbf{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

(i) η f είναι φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ και

(ii) $f(n) = a_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$.

Για παράδειγμα, για την $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ μπορούμε να επιλέξουμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ $(1 \leq x < +\infty)$. Είναι πολύ εύκολο να αποδείξουμε κάποιες επιπλέον ιδιότητες της f. Μία τέτοια ιδιότητα είναι η

(iii) $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 1$.

Πράγματι, για τυχόν $x \geq 1$ παίρνουμε οποιονδήποτε φυσικό $n \geq x$, οπότε $f(x) \geq f(n) = a_n \geq 0$. Μία δεύτερη ιδιότητα είναι η

(iv) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Για να την αποδείξουμε παίρνουμε $\epsilon > 0$ και, επειδή $a_n \to 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε: $0 \leq a_n < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπάγεται ότι για κάθε $x \geq n_0$ ισχύει $0 \leq f(x) \leq f(n_0) = a_{n_0} < \epsilon$.

Κατόπιν, θεωρούμε τη συνάρτηση $\int_1^x f(t)\,dt$ $(1 \leq x < +\infty)$. Παρατηρήστε ότι, επειδή η f είναι φθίνουσα, είναι Riemann ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a, b] \subseteq [1, +\infty)$. Η συνάρτηση $\int_1^x f(t)\,dt$ του x είναι αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Πράγματι, αν $1 \leq x < y$, τότε $\int_1^y f(t)\,dt = \int_1^x f(t)\,dt + \int_x^y f(t)\,dt \geq \int_1^x f(t)\,dt$. Το τελευταίο ισχύει διότι $f(t) \geq 0$ για κάθε $t \in [x, y]$, οπότε $\int_x^y f(t)\,dt \geq 0$.

Επειδή η $\int_1^x f(t)\,dt$ είναι αύξουσα, συνεπάγεται ότι το $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)\,dt$ υπάρχει και, μάλιστα, έχουμε ακριβώς δύο ενδεχόμενα:

(*i*) αν η $\int_1^x f(t)\,dt$ είναι άνω φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M \in \mathbf{R}$ ώστε $\int_1^x f(t)\,dt \leq M$ για κάθε $x \geq 1$, τότε το $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)\,dt$ είναι πραγματικός αριθμός,
(*ii*) αν η $\int_1^x f(t)\,dt$ δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)\,dt = +\infty$.

Πρόταση 1.9 ***Κριτήριο ολοκληρώματος.*** *Έστω* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *με προσθετέους οι οποίοι φθίνουν προς το 0 και συνάρτηση* $f : [1, +\infty) \to \mathbf{R}$ *για την οποία ισχύει:*
(i) η f *είναι φθίνουσα στο* $[1, +\infty)$ *και*
(ii) $f(n) = a_n$ *για κάθε* $n \in \mathbf{N}$.
Το συμπέρασμα είναι:
1. αν το $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)\,dt$ *είναι πραγματικός αριθμός, η σειρά* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *συγκλίνει και*
2. αν $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)\,dt = +\infty$, *τότε* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = +\infty$.
Επίσης, σε κάθε περίπτωση

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)\,dt \leq \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \leq a_1 + \lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)\,dt.$$

Απόδειξη: Παίρνουμε τυχαίο $k \in \mathbf{N}$ και παρατηρούμε ότι, επειδή η f είναι φθίνουσα, για κάθε $t \in [k, k+1]$ ισχύει $a_{k+1} = f(k+1) \leq f(t) \leq f(k) = a_k$. Συνεπάγεται

$$a_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq a_k\,.$$

Αθροίζοντας αυτές τις ανισότητες για $k = 1, \ldots, n$, βρίσκουμε $a_2 + \cdots + a_{n+1} \leq \int_1^{n+1} f(t)\,dt \leq a_1 + \cdots + a_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Ισοδύναμα,

$$\int_1^{n+1} f(t)\,dt \leq a_1 + \cdots + a_n \leq a_1 + \int_1^n f(t)\,dt\,, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Επειδή υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)\,dt$, υπάρχει και το $\lim_{n\to+\infty} \int_1^n f(t)\,dt$ και $\lim_{n\to+\infty} \int_1^n f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)\,dt$. Επίσης, η $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ έχει άθροισμα, διότι έχει μη-αρνητικούς προσθετέους. Παίρνοντας όρια καθώς $n \to +\infty$ στην τελευταία διπλή ανισότητα, συμπεραίνουμε $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)\,dt \leq \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \leq a_1 + \lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)\,dt$.

Τώρα τα συμπεράσματα (1) και (2) είναι άμεσα. Ο.Ε.Δ.

Παράδειγμα:
Θεωρούμε, πάλι, την αρμονική σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$.

Επιλέγουμε τη συνεχή και φθίνουσα συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ $(1 \leq x < +\infty)$ και υπολογίζουμε $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty$. Άρα, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$.

Άσκηση 16: Έστω $\rho > 0$. Χρησιμοποιήστε το κριτήριο του ολοκληρώματος για να μελετήσετε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\rho}$ και $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(\log k)^\rho}$.

Άσκηση 17: 1. Έστω $\rho > 0$ και $\rho \neq 1$. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbf{N}$ $\frac{1}{\rho-1}\big(1 - \frac{1}{(n+1)^{\rho-1}}\big) \leq 1 + \frac{1}{2^\rho} + \cdots + \frac{1}{n^\rho} \leq 1 + \frac{1}{\rho-1}\big(1 - \frac{1}{n^{\rho-1}}\big)$. (Υπόδειξη:

Χρησιμοποιήστε την ανισότητα $\int_1^{n+1} f(t)\,dt \le a_1 + \cdots + a_n \le a_1 + \int_1^n f(t)\,dt$ που εμφανίζεται στην απόδειξη της Πρότασης 1.9.)
2. Αποδείξτε ότι $\log(n+1) \le 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \le 1 + \log n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$.
3. Αν $\rho > 1$, αποδείξτε ότι $\frac{1}{\rho-1} \le \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\rho} \le \frac{\rho}{\rho-1}$.
4. Αποδείξτε ότι $\lim_{\rho\to 1+}(\rho-1)\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\rho} = 1$.

1.3 Απόλυτη σύγκλιση σειρών.

Ορισμός 1.5 *Λέμε ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$* ***συγκλίνει απολύτως****, αν η $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ συγκλίνει. Λέμε ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$* ***συγκλίνει υπό συνθήκη****, αν συγκλίνει αλλά δε συγκλίνει απολύτως.*

Είναι προφανές ότι για σειρές με μη-αρνητικούς προσθετέους η έννοια της απόλυτης σύγκλισης ταυτίζεται με την έννοια της σύγκλισης.

Πρόταση 1.10 *Αν η $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει. Επίσης*

$$\Big|\sum_{k=1}^{+\infty} a_k\Big| \le \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|\,.$$

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το κριτήριο του Cauchy. Έστω $\epsilon > 0$. Αφού η $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ συγκλίνει, υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε: $n_0 \le m < n \;\Rightarrow\; \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \epsilon$. Συνεπάγεται: $n_0 \le m < n \;\Rightarrow\; \big|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\big| \le \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \epsilon$. Άρα, η $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ ικανοποιεί το κριτήριο του Cauchy και, επομένως, συγκλίνει.

Η ανισότητα $\big|\sum_{k=1}^{+\infty} a_k\big| \le \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ προκύπτει από τις στοιχειώδεις ανισότητες $\big|\sum_{k=1}^{n} a_k\big| \le \sum_{k=1}^{n} |a_k|$, παίρνοντας όριο καθώς $n \to +\infty$. Ο.Ε.Δ.

Η ανισότητα $\big|\sum_{k=1}^{+\infty} a_k\big| \le \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ ονομάζεται **τριγωνική ανισότητα**.

Η Πρόταση 1.10 λέει ότι, αν $\sum_{k=1}^{n} |a_k| < +\infty$, το $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ είναι πραγματικός αριθμός και ισχύει η τριγωνική ανισότητα $\big|\sum_{k=1}^{+\infty} a_k\big| \le \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$. Αυτό το αποτέλεσμα συμπληρώνεται ως εξής: αν $\sum_{k=1}^{n} |a_k| = +\infty$ και *αν η $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ έχει άθροισμα*, το $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ είναι στοιχείο του $\mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, οπότε το $\big|\sum_{k=1}^{+\infty} a_k\big|$ είναι στοιχείο του $[0, +\infty]$ και, επομένως, η τριγωνική ανισότητα ισχύει κατά προφανή τρόπο. Πρέπει, όμως, να τονισθεί *με έμφαση* ότι η τριγωνική ανισότητα $\big|\sum_{k=1}^{+\infty} a_k\big| \le \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ ισχύει *μόνο με την προϋπόθεση ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ έχει άθροισμα.*

Παραδείγματα:

1. Η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ συγκλίνει, αφού συγκλίνει απολύτως: $\sum_{k=1}^{+\infty} \big|\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\big| = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$.
2. Η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ δε συγκλίνει απολύτως, αφού $\sum_{k=1}^{+\infty} \big|\frac{(-1)^{k-1}}{k}\big| = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$. Θα δείξουμε τώρα ότι αυτή η σειρά συγκλίνει, δηλαδή ότι συγκλίνει υπό συνθήκη. Αν $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, τότε $s_{2m} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2m-1} -$

$\frac{1}{2m} = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m}\right)$. Συνεπάγεται $s_{2m+2}-s_{2m} = \frac{1}{2m+1}-\frac{1}{2m+2} \geq 0$ και, επομένως, η υποακολουθία (s_{2m}) είναι αύξουσα. Επιπλέον, η ίδια υποακολουθία είναι και άνω φραγμένη, διότι $s_{2m} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m} = 1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{2m-2}-\frac{1}{2m-1}\right)-\frac{1}{2m} < 1$. Άρα, η υποακολουθία (s_{2m}) συγκλίνει, οπότε $s_{2m} \to s$ για κάποιο $s \in \mathbf{R}$. Όμως, $s_{2m+1} = s_{2m}+\frac{1}{2m+1} \to s+0 = s$. Άρα, $s_n \to s$.

Θεώρημα 1.3 ***Σύγκριση σειρών,* IV**. *Έστω ότι για τις σειρές* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *και* $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ *ισχύει είτε το (i) είτε το (ii):*
(i) υπάρχει μη αρνητικός αριθμός M *ώστε* $|a_n| \leq M b_n$ *για κάθε* $n \in \mathbf{N}$ *ή*
(ii) ισχύει $b_n > 0$ *για κάθε* $n \in \mathbf{N}$ *και η ακολουθία* $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ *συγκλίνει.*
Τότε, αν η $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ *συγκλίνει, η* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *συγκλίνει απολύτως.*

Απόδειξη: (i) Αν η $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ συγκλίνει, η $\sum_{k=1}^{+\infty}(Mb_k)$ συγκλίνει, επίσης. Από την Πρόταση 1.6 συνεπάγεται ότι και η $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ συγκλίνει.
(ii) Η $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ συγκλίνει και, επομένως, είναι φραγμένη. Άρα, υπάρχει μη αρνητικός αριθμός M ώστε $\frac{|a_n|}{b_n} = \left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και καταλήγουμε στην περίπτωση (i). Ο.Ε.Δ.

Παραδείγματα:
1. $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3k-k^2}{k^4-k^2+3}$.

Παρατηρούμε ότι $\frac{3n-n^2}{n^4-n^2+3} = \frac{1}{n^2}\frac{\frac{3}{n}-1}{1-\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^4}}$. Άρα, $\frac{\frac{3n-n^2}{n^4-n^2+3}}{\frac{1}{n^2}} \to -1$ και, αφού η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3k-k^2}{k^4-k^2+3}$ συγκλίνει απολύτως.
2. $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k+1}{3^k+2^k+5}$.

Τώρα, $\frac{2^n+1}{3^n+2^n+5} = \frac{2^n}{3^n}\frac{1+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{2^n}{3^n}+\frac{5}{3^n}}$, οπότε $\frac{\frac{2^n+1}{3^n+2^n+5}}{\frac{2^n}{3^n}} \to 1$. Επειδή η $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$ συγκλίνει, η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k+1}{3^k+2^k+5}$ συγκλίνει.

Άσκηση 18: Έστω $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Αν η $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι οι $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$ και $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k^2}{1+a_k^2}$ συγκλίνουν.

Άσκηση 19: Μελετήστε τις $\sum_{k=1}^{+\infty}(\sqrt{1+k^2}-k)$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} k^p\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$ $(p \in \mathbf{R})$, $\sum_{k=1}^{+\infty} k^p(\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}+\sqrt{k-1})$ $(p \in \mathbf{R})$, $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^p-k^q}$ $(0 < q < p)$ και $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p^k-q^k}$ $(0 < q < p)$ ως προς τη σύγκλιση, συγκρίνοντάς τις με σειρές της μορφής $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\rho}$ ή $\sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k$ για κατάλληλα ρ. Όπου εμφανίζονται οι παράμετροι p, q βρείτε τις τιμές τους για τις οποίες η αντίστοιχες σειρές συγκλίνουν.

Άσκηση 20: Βρείτε τις τιμές του $x \neq -1$ για τις οποίες η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^k}$ συγκλίνει. (Υπόδειξη: Δείτε πότε $\frac{1}{1+x^n} \to 0$ και συγκρίνατε τη σειρά με κατάλληλη γεωμετρική σειρά.)

Θεώρημα 1.4 ***Κριτήριο λόγου του d' Alembert.*** *Έστω σειρά* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *με* $a_n \neq 0$ *για κάθε* $n \in \mathbf{N}$.
1. Αν $\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, *η* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *συγκλίνει απολύτως.*
2. Αν $\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, *η* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *αποκλίνει.*
3. Αν $\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq 1 \leq \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, *δεν υπάρχει γενικό συμπέρασμα.*

Απόδειξη: 1. Παίρνουμε x ώστε $\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < x < 1$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq x$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπάγεται $|a_{n_0+1}| \leq x|a_{n_0}|$, $|a_{n_0+2}| \leq x|a_{n_0+1}| \leq x^2|a_{n_0}|$ και, επαγωγικά, $|a_n| \leq x^{n-n_0}|a_{n_0}|$ γιά κάθε $n \geq n_0$.

Συγκρίνουμε τις σειρές $\sum_{k=n_0}^{+\infty} |a_k|$ και $\sum_{k=n_0}^{+\infty} x^k$. Ισχύει $|a_n| \leq Mx^n$, όπου $M = \frac{|a_{n_0}|}{x^{n_0}}$. Η $\sum_{k=n_0}^{+\infty} x^k$ συγκλίνει, διότι προέρχεται από τη γεωμετρική σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ μετά από απαλοιφή των $n_0 - 1$ αρχικών προσθετέων της και $0 \leq x < 1$. Άρα, η $\sum_{k=n_0}^{+\infty} |a_k|$ συγκλίνει και, επομένως, η $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ συγκλίνει.
2. Υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή, $|a_n| \geq |a_{n-1}| \geq \ldots \geq |a_{n_0}| > 0$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα, $a_n \not\to 0$ και, επομένως, η $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ δε συγκλίνει.
3. Για την $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$, η οποία δε συγκλίνει, ισχύει $\left|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right| = \frac{n}{n+1} \to 1$. Για την $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$, η οποία συγκλίνει, ισχύει $\left|\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}\right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1$. Ο.Ε.Δ.

Παραδείγματα:
1. Η **εκθετική σειρά**: $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Ισχύει $\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = |x|\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{|x|}{n+1} \to 0$. Άρα $\limsup \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = 0 < 1$ και, επομένως, η σειρά συγκλίνει.
2. Η γεωμετρική σειρά: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$.

Ισχύει $\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = |x| \to |x|$. Αν $|x| < 1$, $\limsup \left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = |x| < 1$ και η σειρά συγκλίνει. Αν $|x| > 1$, $\liminf \left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = |x| > 1$ και η σειρά αποκλίνει. Αν $|x| = 1$, δηλαδή $x = \pm 1$, το κριτήριο λόγου δε δίνει συμπέρασμα, οπότε μελετάμε τη σειρά με άλλο τρόπο. Αυτό έχει ήδη γίνει και ευτυχώς, *διότι η γεωμετρική σειρά χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.4.*

Θεώρημα 1.5 ***Κριτήριο ρίζας του Cauchy.*** *Έστω σειρά* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.
1. Αν $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, *η σειρά συγκλίνει απολύτως.*
2. Αν $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, *η σειρά αποκλίνει.*
3. Αν $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, *δεν υπάρχει γενικό συμπέρασμα.*

Απόδειξη: 1. Διαλέγουμε x ώστε $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < x < 1$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε: $n \geq n_0 \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{|a_n|} \leq x \;\Rightarrow\; |a_n| \leq x^n$. Συγκρίνουμε τις σειρές $\sum_{k=n_0}^{+\infty} |a_k|$ και $\sum_{k=n_0}^{+\infty} x^k$. Αφού $x < 1$, η δεύτερη σειρά συγκλίνει. Άρα, η $\sum_{k=n_0}^{+\infty} |a_k|$ συγκλίνει και, επομένως, η $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.
2. Υπάρχουν άπειροι όροι της ακολουθίας $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ οι οποίοι είναι ≥ 1. Δηλαδή, για άπειρα n ισχύει $|a_n| \geq 1$. Άρα, $a_n \not\to 0$ και, επομένως, η $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ δε

συγκλίνει.

3. Για τις σειρές $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}$ και $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$ ισχύει $\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|}\to 1$ και $\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2}\right|}\to 1$. Η πρώτη σειρά αποκλίνει ενώ η δεύτερη συγκλίνει. Ο.Ε.Δ.

Παραδείγματα:

1. $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k}$ $(x\in\mathbf{R})$.

Ισχύει $\sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n}\right|}=\frac{|x|}{\sqrt[n]{n}}\to|x|$ και, επομένως, $\limsup\sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n}\right|}=|x|$. Αν $|x|<1$, η σειρά συγκλίνει απολύτως. Αν $|x|>1$, η σειρά αποκλίνει. Αν $|x|=1$, το κριτήριο ρίζας δε δίνει συμπέρασμα. Αν $x=1$, η σειρά είναι η $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}$, η οποία αποκλίνει. Αν $x=-1$, η σειρά είναι η $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}$, η οποία συγκλίνει υπό συνθήκη. Άρα, η $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k}$ συγκλίνει μόνο όταν $-1\leq x<1$ και συγκλίνει απολύτως μόνο όταν $-1<x<1$.

2. $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^{2k}}{k^2}$ $(x\in\mathbf{R})$.

Τώρα, $\sqrt[n]{\left|\frac{x^{2n}}{n^2}\right|}=\frac{x^2}{\sqrt[n]{n^2}}\to x^2$. Άρα, $\limsup\sqrt[n]{\left|\frac{x^{2n}}{n^2}\right|}=x^2$. Αν $|x|>1$, η σειρά αποκλίνει. Αν $|x|<1$, η σειρά συγκλίνει απολύτως. Αν $|x|=1$, το κριτήριο ρίζας δε δίνει συμπέρασμα. Όμως, όταν $x=\pm1$, η σειρά είναι η $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$ και συγκλίνει. Άρα, η σειρά συγκλίνει απολύτως, όταν $|x|\leq 1$, και αποκλίνει, όταν $|x|>1$.

Άσκηση 21: Εξετάστε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{k=1}^{+\infty}(\sqrt[k]{k}-1)^k$.

Άσκηση 22: Βρείτε τις τιμές των παραμέτρων $p,q\in\mathbf{R}$ για τις οποίες η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty}p^k k^q$ συγκλίνει.

Άσκηση 23: Εξετάστε τη σύγκλιση των σειρών $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots$ και $\frac{1}{2}+1+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\frac{1}{128}+\frac{1}{64}+\cdots$, εφαρμόζοντας τα κριτήρια λόγου και ρίζας.

Ίσως αναρωτηθεί κανείς αν υπάρχει κάποια σχέση ανάμεσα στο κριτήριο λόγου και στο κριτήριο ρίζας στην περίπτωση που μπορούν να εφαρμοσθούν και τα δύο ταυτοχρόνως, δηλαδή, αν έχουμε σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty}a_k$ με $a_n\neq 0$ για κάθε n. Η απάντηση είναι ότι το κριτήριο ρίζας είναι *ισχυρότερο* από το κριτήριο λόγου. Δηλαδή, αν το κριτήριο λόγου δίνει κάποιο αποτέλεσμα για τη σύγκλιση της σειράς, τότε και το κριτήριο ρίζας δίνει το ίδιο αποτέλεσμα και υπάρχουν παραδείγματα σειρών για τα οποία το κριτήριο λόγου δε δίνει αποτέλεσμα ενώ το κριτήριο ρίζας δίνει. Από την άλλη μεριά, μερικές φορές, όπως στο επόμενο παράδειγμα, είναι πιο εύκολο να εφαρμοσθεί το κριτήριο λόγου από το να εφαρμοσθεί το κριτήριο ρίζας.

Παράδειγμα:

Η εκθετική σειρά: $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}$.

Μελετήσαμε τη σύγκλιση της σειράς αυτής με το κριτήριο λόγου. Για να εφαρμόσουμε το κριτήριο ρίζας, χρειαζόμαστε την τιμή του $\limsup\sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n!}\right|}=$

$\limsup \frac{|x|}{\sqrt[n]{n!}}$. Για να την υπολογίσουμε θα αποδείξουμε πρώτα το όριο

$$\sqrt[n]{n!} \to +\infty,$$

το οποίο είναι χρήσιμο αλλά όχι αρκετά γνωστό. Έχουμε $\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdots n} \geq \sqrt[n]{([\frac{n}{2}]+1) \cdots n} > \sqrt[n]{\frac{n}{2} \cdots \frac{n}{2}} = \sqrt[n]{(\frac{n}{2})^{n-[\frac{n}{2}]}} \geq \sqrt[n]{(\frac{n}{2})^{n-\frac{n}{2}}} = \sqrt{\frac{n}{2}}$ για κάθε $n \geq 2$. Επειδή $\sqrt{\frac{n}{2}} \to +\infty$, συνεπάγεται $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$.

Άρα, $\frac{|x|}{\sqrt[n]{n!}} \to 0$ και, επομένως, $\limsup \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n!}\right|} = 0 < 1$. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η εκθετική σειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Άσκηση 24: Εφαρμόστε τα κριτήρια λόγου *και* ρίζας στις σειρές $\sum_{k=1}^{+\infty} k^k x^k$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} k^3 x^k$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} x^k$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k x^k}{k^2}$ και $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^3}{3^k} x^k$. Τι παρατηρείτε; Μπορείτε να αποφασίσετε τη σύγκλιση των σειρών αυτών για τις τιμές του x για τις οποίες τα δύο κριτήρια δε δίνουν απάντηση;

Άσκηση 25: Αν $a_n > 0$ για κάθε n, αποδείξτε ότι $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Συμπεράνατε ότι, όταν το κριτήριο λόγου δείχνει σύγκλιση ή απόκλιση σειράς, το ίδιο συμβαίνει και με το κριτήριο ρίζας και, όταν το κριτήριο ρίζας δε δείχνει τίποτα, το ίδιο συμβαίνει και με το κριτήριο λόγου. (Υπόδειξη: Έστω $x > \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq x$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα, αν $n \geq n_0$, $\frac{a_n}{a_{n_0}} = \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq x^{n-n_0}$. Οπότε $\sqrt[n]{a_n} < x x^{-\frac{n_0}{n}} \sqrt[n]{a_{n_0}}$ και, επομένως, $\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq x$. Αφού για κάθε $x > \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$ συνεπάγεται $\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq x$, συμπεραίνουμε ότι $\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$.)

1.4 Σύγκλιση υπό συνθήκη.

Στην προηγούμενη ενότητα μελετήσαμε τα κριτήρια σύγκρισης, λόγου και ρίζας, τα οποία, όμως, είναι κριτήρια για να συμπεράνουμε αν μία σειρά είναι *απολύτως συγκλίνουσα*. Χρήσιμο θα ήταν και κάποιο κριτήριο για σειρές οι οποίες συγκλίνουν χωρίς, όμως, να συγκλίνουν απολύτως (δηλαδή, για σειρές οι οποίες συγκλίνουν υπό συνθήκη). Θα δούμε, τώρα, μία αρκετά σημαντική μέθοδο γι αυτόν τον σκοπό.

Λήμμα 1.1 ***Άθροιση κατά μέρη του Abel.*** *Έστω ακολουθίες (a_n) και (b_n) και ορίζουμε $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Για κάθε $n \geq 2$ ισχύει*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n b_{n+1} .$$

Απόδειξη: $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_1 b_1 + \sum_{k=2}^{n} (s_k - s_{k-1}) b_k = s_1 b_1 + \sum_{k=2}^{n} s_k b_k - \sum_{k=2}^{n} s_{k-1} b_k = \sum_{k=1}^{n} s_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} s_k b_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} s_k b_k - \sum_{k=1}^{n} s_k b_{k+1} + s_n b_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n b_{n+1}$. Ο.Ε.Δ.

Δε χρειάζεται να θυμόμαστε αυτήν την ισότητα! Αρκεί να κατανοήσουμε την ιδέα: το άθροισμα $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ αντικαθίσταται με ένα άλλο, στο οποίο τη θέση των a_k παίρνουν τα διαδοχικά μερικά αθροίσματά τους s_k και τη θέση των b_k παίρνουν οι διαδοχικές διαφορές τους $b_k - b_{k+1}$. Εμφανίζεται και ο «ακραίος» όρος $s_n b_{n+1}$.

Θεώρημα 1.6 ***Dirichlet***. *Έστω δύο ακολουθίες (a_n) και (b_n) με τις ιδιότητες:*
(i) η (b_n) φθίνει προς το 0 και
(ii) η ακολουθία $(s_n = a_1 + \cdots + a_n)$ είναι φραγμένη. Δηλαδή, υπάρχει M ώστε $|a_1 + \cdots + a_n| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$.
Τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$ συγκλίνει.

Απόδειξη: Η $\sum_{k=1}^{+\infty} s_k(b_k - b_{k+1})$ συγκλίνει απολύτως, διότι $\sum_{k=1}^{+\infty} |s_k(b_k - b_{k+1})| = \sum_{k=1}^{+\infty} |s_k|(b_k - b_{k+1}) \leq M \sum_{k=1}^{+\infty}(b_k - b_{k+1}) = Mb_1 < +\infty$. Η τελευταία ισότητα ισχύει, αφού η $\sum_{k=1}^{+\infty}(b_k - b_{k+1})$ είναι τηλεσκοπική και $b_n \to 0$.

Άρα, η $\sum_{k=1}^{+\infty} s_k(b_k - b_{k+1})$ συγκλίνει, οπότε το $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} s_k(b_k - b_{k+1})$ είναι πραγματικός αριθμός. Επίσης, έχουμε $\lim_{n\to+\infty} s_n b_{n+1} = 0$, αφού η (s_n) είναι φραγμένη και $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$.

Από το Λήμμα 1.1 συνεπάγεται ότι το $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ είναι πραγματικός αριθμός και, επομένως, η $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$ συγκλίνει. Ο.Ε.Δ.

Παράδειγμα:
Θεωρούμε οποιαδήποτε σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1} b_k$, με την (b_n) να φθίνει προς το 0. Τυπικό παράδειγμα αποτελεί η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Τα μερικά αθροίσματα της ακολουθίας $\big((-1)^{n-1}\big)$ είναι φραγμένα, αφού $s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} = \begin{cases} 0, & \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος.} \\ 1, & \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός.} \end{cases}$ Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα του Dirichlet, η $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1} b_k$ συγκλίνει.

Άσκηση 26: Βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $\rho \in \mathbf{R}$ για τις οποίες η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\rho}$ συγκλίνει. Για ποιες από τις τιμές αυτές η σειρά συγκλίνει απολύτως και για ποιες συγκλίνει υπό συνθήκη;

Άσκηση 27: Μελετήστε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \frac{\log k}{k}$.

Άσκηση 28: Έστω (b_n) η οποία φθίνει προς το 0 και $s = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1} b_k$. Αποδείξτε ότι $0 \leq (-1)^n(s - s_n) \leq b_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$.

1.5 Δεκαδικές παραστάσεις.

Θεωρούμε σειρές της μορφής

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k} = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots ,$$

όπου $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ για κάθε $n \geq 1$ και όπου *δεν* επιτρέπεται να είναι όλα τα a_n από έναν δείκτη και πέρα ίσα με το 9. Κάθε τέτοια σειρά ονομάζεται **δεκαδική σειρά**.

Κάθε δεκαδική σειρά έχει μη-αρνητικούς προσθετέους και, επομένως, έχει άθροισμα το οποίο είναι είτε μη αρνητικός αριθμός είτε $+\infty$. Όμως, επειδή $0 \leq \frac{a_n}{10^n} \leq \frac{9}{10^n}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και επειδή $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{9}{10} \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 1$, συμπεραίνουμε ότι $0 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = 1$. Αν $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k} = 1$, συνεπάγεται, βάσει της Πρότασης 1.2, ότι $a_n = 9$ για κάθε $n \geq 1$, το οποίο αντιφάσκει με μία από τις παραδοχές μας για τις δεκαδικές σειρές. Επομένως, κάθε δεκαδική σειρά συγκλίνει και το άθροισμά της είναι αριθμός στο $[0, 1)$:

$$0 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k} < 1 \,.$$

Θεώρημα 1.7 *Για κάθε $x \in [0, 1)$ υπάρχει ακριβώς μία δεκαδική σειρά της οποίας το άθροισμα είναι ίσο με τον x. Πιο αναλυτικά: για κάθε $x \in [0, 1)$*
(i) υπάρχουν $a_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ $(n \geq 1)$ ώστε να μην είναι όλα τα a_n από έναν δείκτη και πέρα ίσα με το 9 και ώστε

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k} \,.$$

(ii) αν, εκτός των a_n, υπάρχουν $b_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ $(n \geq 1)$ ώστε να μην είναι όλα τα b_n από έναν δείκτη και πέρα ίσα με το 9 και ώστε $x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{10^k}$, τότε $a_n = b_n$ για κάθε $n \geq 1$.

Απόδειξη: Έστω $x \in [0, 1)$.
(i) Χωρίζουμε το διάστημα $[0, 1)$ σε δέκα υποδιαστήματα ίσου μήκους $\frac{1}{10}$. Το x βρίσκεται σε ένα από αυτά, οπότε υπάρχει $a_1 \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ ώστε

$$\frac{a_1}{10} \leq x < \frac{a_1 + 1}{10} \,.$$

Το διάστημα $[\frac{a_1}{10}, \frac{a_1+1}{10})$ έχει μήκος $\frac{1}{10}$ και το χωρίζουμε σε δέκα ίσα υποδιαστήματα μήκους $\frac{1}{10^2}$ το καθένα. Το x βρίσκεται σε ένα από αυτά, οπότε υπάρχει $a_2 \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ ώστε

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \leq x < \frac{a_1}{10} + \frac{a_2 + 1}{10^2} \,.$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά, βλέπουμε ότι για κάθε $n \geq 1$ υπάρχει $a_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ ώστε

$$\frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \leq x < \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n + 1}{10^n} \,.$$

Επομένως, τα μερικά αθροίσματα s_n των $\frac{a_n}{10^n}$ $(n \geq 1)$ ικανοποιούν την $s_n \leq x < s_n + \frac{1}{10^n}$ ή, ισοδύναμα, την $0 \leq x - s_n < \frac{1}{10^n}$ για κάθε $n \geq 1$. Άρα $s_n \to x$ και, επομένως,

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k} \,.$$

Ας υποθέσουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι τα a_n είναι από έναν δείκτη και πέρα όλα ίσα με το 9. Δηλαδή, ότι υπάρχει $n_0 \geq 1$ ώστε $a_n = 9$ για κάθε $n \geq n_0 + 1$. Τότε

$$x = \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_{n_0}}{10^{n_0}} + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_{n_0}}{10^{n_0}} + \frac{9}{10^{n_0+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{10^k}$$

$$= \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_{n_0}}{10^{n_0}} + \frac{9}{10^{n_0+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_{n_0}}{10^{n_0}} + \frac{1}{10^{n_0}}$$

και αυτό αντιφάσκει με το ότι ισχύει $\frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \leq x < \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n+1}{10^n}$ για κάθε n και, επομένως, και για το n_0.
(ii) Έστω ότι, εκτός των a_n, υπάρχουν $b_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ $(n \geq 1)$ ώστε να μην είναι όλα τα b_n από έναν δείκτη και πέρα ίσα με το 9 και ώστε να ισχύει $x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{10^k}$. Ας υποθέσουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι υπάρχει κάποιο $n \geq 1$ ώστε $a_n \neq b_n$. Βαφτίζουμε n_0 το ελάχιστο $n \in \mathbf{N}$ για το οποίο ισχύει $a_n \neq b_n$, δηλαδή, $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1, \ldots, a_{n_0-1} = b_{n_0-1}$ και $a_{n_0} \neq b_{n_0}$. Ας υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $a_{n_0} < b_{n_0}$. Τότε από την ισότητα $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{10^k}$ συνεπάγεται η $\sum_{k=n_0}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=n_0}^{+\infty} \frac{b_k}{10^k}$ και από αυτήν, χρησιμοποιώντας και το ότι $a_n - b_n \leq 9$ για κάθε n, συνεπάγεται

$$\frac{1}{10^{n_0}} \leq \frac{b_{n_0} - a_{n_0}}{10^{n_0}} = \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k} - \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{b_k}{10^k}$$

$$= \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{a_k - b_k}{10^k} \leq \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{1}{10^{n_0}}.$$

Τώρα, όμως, συνεπάγεται ότι κάθε ανισότητα στην προηγούμενη αλληλουχία ισοτήτων και ανισοτήτων πρέπει να είναι ισότητα, οπότε $\sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{a_k - b_k}{10^k} = \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{9}{10^k}$ και, βάσει της Πρότασης 1.2, $a_n - b_n = 9$ για κάθε $n \geq n_0 + 1$. Αυτό συμβαίνει μόνον αν $a_n = 9$ και $b_n = 0$ για κάθε $n \geq n_0 + 1$ και καταλήγουμε σε αντίφαση με έναν από τους περιορισμούς για τις δεκαδικές σειρές. Άρα, ισχύει $a_n = b_n$ για κάθε $n \geq 1$. Ο.Ε.Δ.

Ορισμός 1.6 *Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.7, για κάθε $x \in [0, 1)$ υπάρχει ακριβώς μία δεκαδική σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$ ώστε $x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$. Τότε λέμε ότι **ο x έχει τη δεκαδική παράσταση***

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots .$$

*Επίσης, το a_n ονομάζεται **n-οστό δεκαδικό ψηφίο του** x.*

Άσκηση 29: Αποδείξτε ότι, αν $x \in [0, 1)$ και $x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ είναι η δεκαδική παράσταση του x, ισχύει $a_n = \left[10^n x - 10[10^{n-1} x]\right]$ για κάθε $n \geq 1$.

1.6 Δυναμοσειρές.

Ορισμός 1.7 *Αν* (a_n) *είναι οποιαδήποτε ακολουθία στο* $\mathbf{R}$, *η σειρά*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k$$

ονομάζεται ***δυναμοσειρά με συντελεστές*** a_n $(n=0,1,\ldots)$, ***παράμετρο*** $x \in \mathbf{R}$ ***και κέντρο*** $x_0 \in \mathbf{R}$.

Όπως και στο παράδειγμα της γεωμετρικής σειράς, κάνουμε την παραδοχή ότι, αν $t=0$, η τιμή του t^0 είναι ίση με το 1, όπως και για κάθε $t \neq 0$. Πιο αναλυτικά: $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k$.

Είναι φανερό ότι η γεωμετρική σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ είναι ειδική περίπτωση δυναμοσειράς.

Το ουσιαστικό πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε, δεδομένης μιας δυναμοσειράς, είναι να βρούμε όλες τις τιμές της παραμέτρου x για τις οποίες η δυναμοσειρά συγκλίνει.

Είναι, βέβαια, προφανές ότι κάθε δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k$ συγκλίνει όταν η παράμετρος x πάρει την τιμή x_0. Πράγματι, $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x_0-x_0)^k = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x_0-x_0)^k = a_0$.

Ορισμός 1.8 *Έστω δυναμοσειρά* $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k$. *Αν* $a = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ *(οπότε* $0 \leq a \leq +\infty$*), ο αριθμός*

$$R = \frac{1}{a} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

ονομάζεται ***ακτίνα σύγκλισης*** *της δυναμοσειράς. (Δεχόμαστε ότι* $\frac{1}{0} = +\infty$ *και* $\frac{1}{+\infty} = 0$ *και, επομένως,* $0 \leq R \leq +\infty$.*) Επίσης, το διάστημα* (x_0-R, x_0+R) *ονομάζεται* ***διάστημα σύγκλισης*** *της δυναμοσειράς.*

Αυτή η ονομασία του R καθώς και η ονομασία του (x_0-R, x_0+R) δικαιολογούνται από το παρακάτω Θεώρημα 1.8.

Θεώρημα 1.8 *Έστω δυναμοσειρά* $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k$ *και* $R = \frac{1}{a} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$.
1. Αν $R > 0$ *και* $x \in (x_0-R, x_0+R)$, *η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως.*
2. Αν $R < +\infty$ *και* $x \notin [x_0-R, x_0+R]$, *η δυναμοσειρά αποκλίνει.*
3. Αν $R < +\infty$ *και* $x = x_0 \pm R$, *δεν υπάρχει γενικό συμπέρασμα (εκτός, βέβαια, από την περίπτωση* $R=0$, *οπότε η σειρά συγκλίνει απολύτως).*

Απόδειξη: Για τα 1 και 2 εφαρμόζουμε το κριτήριο της ρίζας για σύγκλιση σειρών.
1. Έστω $0 < R \leq +\infty$ (ή, ισοδύναμα, $0 \leq a < +\infty$) και $|x-x_0| < R$. Τότε

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0| \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = |x-x_0|a = \frac{|x-x_0|}{R} < 1.$$

2. Έστω $0 \le R < +\infty$ (ή, ισοδύναμα, $0 < a \le +\infty$) και $|x - x_0| > R$. Τότε

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0| \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = |x-x_0|a = \frac{|x-x_0|}{R} > 1.$$

3. Για τη δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{+\infty}(x-x_0)^k$ υπολογίζουμε $R=1$. Πράγματι, $\sqrt[n]{|1|} = 1 \to 1$, οπότε $a=1$. Αν $x = x_0 \pm 1$, καταλήγουμε στις σειρές $\sum_{k=0}^{+\infty} 1^k$ και $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k$ οι οποίες αποκλίνουν.

Για τη δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x-x_0)^k}{(k+1)^2}$ έχουμε $\sqrt[n]{\left|\frac{1}{(n+1)^2}\right|} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n+1})^2} \to 1$, οπότε $a=1$ και $R=1$. Αν $x = x_0 \pm 1$, καταλήγουμε στις σειρές $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$ και $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$ οι οποίες συγκλίνουν.

Για τη δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k+1}$ έχουμε $\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n+1}\right|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} \to 1$, οπότε $a=1$ και $R=1$. Αν $x = x_0+1$, καταλήγουμε στη σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1}$ η οποία αποκλίνει και, αν $x = x_0 - 1$, στη σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$ η οποία συγκλίνει.

Για τη δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{(x-x_0)^k}{k+1}$ έχουμε $\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} \to 1$, οπότε $a=1$ και $R=1$. Αν $x = x_0+1$, καταλήγουμε στη σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$ η οποία συγκλίνει και, αν $x = x_0-1$, στη σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1}$ η οποία αποκλίνει. Ο.Ε.Δ.

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι σε κάθε δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k$ αντιστοιχίζεται η ακτίνα σύγκλισής της $R \in [0, +\infty]$ και ότι υπάρχουν τα εξής απλά ενδεχόμενα:
1. αν $R = +\infty$, η σειρά συγκλίνει για κάθε $x \in (-\infty, +\infty)$,
2. αν $R = 0$, η σειρά συγκλίνει, αν $x = x_0$, και αποκλίνει για κάθε άλλη τιμή του x και
3. αν $0 < R < +\infty$, η σειρά συγκλίνει για κάθε $x \in A$ και αποκλίνει για κάθε $x \notin A$, όπου A είναι το διάστημα $(x_0 - R, x_0 + R)$ στο οποίο μπορεί να έχουν προστεθεί ένα ή και τα δύο άκρα $x_0 \pm R$. Δηλαδή $A = (x_0 - R, x_0 + R)$ ή $(x_0 - R, x_0 + R]$ ή $[x_0 - R, x_0 + R)$ ή $[x_0 - R, x_0 + R]$, ανάλογα με τη συγκεκριμένη σειρά.

Γράφοντας $A = (-\infty, +\infty)$ στην πρώτη περίπτωση και $A = \{x_0\}$ στη δεύτερη περίπτωση, βλέπουμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις η $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k$ συγκλίνει για κάθε $x \in A$. Άρα, σε κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται ο αριθμός

$$s(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k$$

και, επομένως, ορίζεται μία συνάρτηση $s : A \to \mathbf{R}$. Λέμε ότι **η δυναμοσειρά ορίζει τη συνάρτηση** $s : A \to \mathbf{R}$ ή ότι **η** $s : A \to \mathbf{R}$ **ορίζεται από τη δυναμοσειρά.**

Για παράδειγμα, η γεωμετρική σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ ορίζει την $s : (-1,1) \to \mathbf{R}$ με τύπο $s(x) = \frac{1}{1-x}$ για κάθε $x \in (-1,1)$.

Όπως φαίνεται και στο παράδειγμα, είναι δυνατόν η συνάρτηση s να επεκτείνεται και εκτός του συνόλου A. Δηλαδή να υπάρχει συνάρτηση $f : B \to \mathbf{R}$ με

$B \supseteq A$, $B \neq A$, ώστε $f(x) = s(x)$ για κάθε $x \in A$. Πράγματι, στο παράδειγμα η $f : \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{1}{1-x}$ για κάθε $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ είναι επέκταση της s. Όμως, προσέξτε ότι η δυναμοσειρά ορίζει την s και όχι την f.

Παραδείγματα:

1. **Η εκθετική δυναμοσειρά**: $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Γνωρίζουμε ήδη ότι $\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n!}\right|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \to 0$, οπότε $a = 0$ και, επομένως, η ακτίνα σύγκλισης της εκθετικής δυναμοσειράς είναι $R = +\infty$. Δηλαδή, το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $(-\infty, +\infty)$, οπότε η εκθετική δυναμοσειρά συγκλίνει και, μάλιστα, απολύτως για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Η ονομασία αυτής της δυναμοσειράς οφείλεται στο επόμενο αποτέλεσμα.

Πρόταση 1.11

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Απόδειξη: 1. Παίρνουμε τυχόν $x > 0$ και $n \in \mathbf{N}$ και θεωρούμε την παράσταση $\frac{1}{n!}\int_0^x e^t (x-t)^n \,dt$. Εφαρμόζοντας διαδοχικές ολοκληρώσεις κατά μέρη, έχουμε $\frac{1}{n!}\int_0^x e^t (x-t)^n \,dt = -\frac{x^n}{n!} + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x e^t (x-t)^{n-1} \,dt = -\frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!}\int_0^x e^t (x-t)^{n-2} \,dt = \ldots = -\frac{x^n}{n!} - \cdots - \frac{x^1}{1!} + \frac{1}{0!}\int_0^x e^t \,dt = -\frac{x^n}{n!} - \cdots - \frac{x^1}{1!} - 1 + e^x$. Άρα $\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| = \frac{1}{n!}\int_0^x e^t (x-t)^n \,dt \leq \frac{e^x}{n!}\int_0^x (x-t)^n \,dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x \to 0$ καθώς $n \to +\infty$. Το τελευταίο ισχύει, διότι η σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ συγκλίνει και, επομένως, $\frac{x^n}{n!} \to 0$.

Άρα, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$ για κάθε $x > 0$. Η απόδειξη είναι παρόμοια στην περίπτωση $x < 0$ και το αποτέλεσμα είναι προφανές, αν $x = 0$.

2. Ας δούμε μία εναλλακτική απόδειξη.

Παίρνουμε, πάλι, τυχόν $x > 0$ και οποιοδήποτε $n \in \mathbf{N}$ και θέτουμε $A = \frac{(n+1)!}{x^{n+1}}\left(e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)$. Ορίζουμε την $f(t) = e^t - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} - A\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$ για κάθε $t \in [0, x]$. Παρατηρούμε ότι $f(0) = f'(0) = f^{(2)}(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 0$ και $f(x) = 0$. Από τις $f(0) = f(x) = 0$ συνεπάγεται ότι υπάρχει $x_1 \in (0, x)$ ώστε $f'(x_1) = 0$. Από τις $f'(0) = f'(x_1) = 0$ συνεπάγεται ότι υπάρχει $x_2 \in (0, x_1) \subseteq (0, x)$ ώστε $f^{(2)}(x_2) = 0$. Από τις $f^{(2)}(0) = f^{(2)}(x_2) = 0$ συνεπάγεται ότι υπάρχει $x_3 \in (0, x_2) \subseteq (0, x)$ ώστε $f^{(3)}(x_3) = 0$. Συνεχίζοντας επαγωγικά, από τις $f^{(n)}(0) = f^{(n)}(x_n) = 0$ συνεπάγεται ότι υπάρχει $x_{n+1} \in (0, x_n) \subseteq (0, x)$ ώστε $f^{(n+1)}(x_{n+1}) = 0$. Βλέπουμε ότι $f^{(n+1)}(t) = e^t - A$ για κάθε t, οπότε η τελευταία ισότητα γράφεται $A = e^{x_{n+1}}$. Συμπεραίνουμε $e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{x_{n+1}}$ και, επομένως, $\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{x_{n+1}} \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x \to 0$ καθώς $n \to +\infty$. Άρα $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \to e^x$, οπότε $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$ για κάθε $x > 0$.

Η απόδειξη είναι παρόμοια στην περίπτωση $x < 0$ και το αποτέλεσμα είναι προφανές, αν $x = 0$. Ο.Ε.Δ.

Άσκηση 30: Συμπληρώστε τις δύο αποδείξεις της Πρότασης 1.11 στην περίπτωση $x < 0$.

Αργότερα, στο κεφάλαιο για σειρές συναρτήσεων, θα δούμε και τρίτη απόδειξη της Πρότασης 1.11.

2. **Η λογαριθμική δυναμοσειρά**: $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{(x-1)^k}{k}$.

Επειδή $\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|}=\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\to 1$, συνεπάγεται $a=1$ και, επομένως, $R=1$. Άρα το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $(1-1,1+1)=(0,2)$ και η σειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε $x\in(0,2)$. Βλέπουμε εύκολα ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει (υπό συνθήκη) όταν $x=2$ και αποκλίνει όταν $x=0$.

Η ονομασία της δυναμοσειράς οφείλεται στο επόμενο αποτέλεσμα.

Πρόταση 1.12

$$\log x=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{(x-1)^k}{k}\,,\qquad x\in(0,2].$$

Απόδειξη: Έστω $x\in(0,2]$. Θεωρούμε την παράσταση $\frac{1}{n}\int_1^x\frac{1}{t^n}(x-t)^n\,dt$. Με διαδοχικές ολοκληρώσεις κατά μέρη: $(-1)^n\int_1^x\frac{1}{t^{n+1}}(x-t)^n\,dt=(-1)^n\frac{(x-1)^n}{n}+(-1)^{n-1}\int_1^x\frac{1}{t^n}(x-t)^{n-1}\,dt=\ldots=(-1)^n\frac{(x-1)^n}{n}+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^{n-1}}{n-1}+\cdots+\frac{(x-1)^2}{2}-(x-1)+\int_1^x\frac{1}{t}\,dt=(-1)^n\frac{(x-1)^n}{n}+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^{n-1}}{n-1}+\cdots+\frac{(x-1)^2}{2}-(x-1)+\log x$. Άρα, $\left|\log x-\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\frac{(x-1)^k}{k}\right|=\left|\int_1^x\frac{1}{t^{n+1}}(x-t)^n\,dt\right|$. Αλλάζοντας τη μεταβλητή από t σε $\frac{x}{t}$, βρίσκουμε $\left|\log x-\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\frac{(x-1)^k}{k}\right|=\left|\int_1^x\frac{(t-1)^n}{t}\,dt\right|$. Αν $1\le x\le 2$, τότε $\left|\int_1^x\frac{(t-1)^n}{t}\,dt\right|\le\int_1^x(t-1)^n\,dt=\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}\le\frac{1}{n+1}\to 0$ καθώς $n\to+\infty$. Αν $0<x\le 1$, τότε $\left|\int_1^x\frac{(t-1)^n}{t}\,dt\right|=\int_x^1\frac{(1-t)^n}{t}\,dt\le(1-x)^n\int_x^1\frac{1}{t}\,dt=(1-x)^n\log\frac{1}{x}\to 0$ καθώς $n\to+\infty$.

Άρα, αν $x\in(0,2]$, ισχύει $\left|\log x-\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\frac{(x-1)^k}{k}\right|\to 0$ καθώς $n\to+\infty$ και, επομένως, $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{(x-1)^k}{k}=\log x$. Ο.Ε.Δ.

Όπως και για την εκθετική δυναμοσειρά, στο κεφάλαιο για σειρές συναρτήσεων θα δούμε μία ακόμη απόδειξη της Πρότασης 1.12.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η ειδική περίπτωση του αποτελέσματος της Πρότασης 1.12, δηλαδή:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\log 2\,.$$

3. **Η δυναμοσειρά του συνημιτόνου**: $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$.

Τώρα, πρέπει να προσέξουμε λίγο. Η ακολουθία των συντελεστών της δυναμοσειράς αυτής είναι

$$a_n=\begin{cases}\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n!}\,, & \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος,}\\ 0, & \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός.}\end{cases}$$

Συνεπάγεται $\sqrt[n]{|a_n|}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\,, & \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος,}\\ 0, & \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός,}\end{cases}$ οπότε οι υποακολουθίες άρτιων και περιττών δεικτών της $(\sqrt[n]{|a_n|})$ συγκλίνουν στο 0. Άρα, $a=0$ και, επομένως, $R = +\infty$. Και αυτή, λοιπόν, η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Η ονομασία αυτής της δυναμοσειράς οφείλεται στο ότι χρησιμεύει για να ορισθεί το *συνημίτονο του* x για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Ορισμός 1.9 *Για κάθε $x \in \mathbf{R}$ ορίζουμε το* ***συνημίτονο του*** x, *το οποίο συμβολίζουμε* $\cos x$, *ως το άθροισμα της* $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$. *Δηλαδή,*

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\,, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Αυτός είναι, ίσως, ο απλούστερος τρόπος να ορισθεί με αυστηρά μαθηματικό τρόπο το συνημίτονο ενός αριθμού. Ο συνήθης ορισμός που μαθαίνει κανείς στο λύκειο εξαρτάται από τη γεωμετρική εποπτεία και δεν είναι αυστηρά θεμελιωμένος στα αξιώματα των πραγματικών αριθμών.

Από τον ορισμό αποδεικνύονται ορισμένες απλές ιδιότητες του συνημιτόνου.
(i) $\cos 0 = 1$.
(ii) $\cos(-x) = \cos x$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.
(iii) Η συνάρτηση cos είναι συνεχής στο σημείο 0: $\lim_{x\to 0}\cos x = 1 = \cos 0$.

Η απόδειξη βασίζεται στις γνωστές μας ανισότητες $n! \geq 2^{n-1}$. Πράγματι, αν $|x| < 2$, $|\cos x - 1| = \left|\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{|x|^{2k}}{(2k)!} \leq \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{|x|^{2k}}{2^{2k-1}} = 2\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{x^2}{4}\right)^k = \frac{2x^2}{4-x^2} \to 0$ καθώς $x \to 0$.
(iv) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Όπως και στην απόδειξη της προηγούμενης ιδιότητας, αν $|x| < 2$, έχουμε $\left|1 - \cos x - \frac{1}{2}x^2\right| = \left|-\sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right| \leq \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{|x|^{2k}}{(2k)!} \leq \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{|x|^{2k}}{2^{2k-1}} = 2\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{x^2}{4}\right)^k = \frac{x^4}{8-2x^2}$ και, επομένως, $\left|\frac{1-\cos x}{x^2} - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{x^2}{8-2x^2} \to 0$ καθώς $x \to 0$.
(v) Η συνάρτηση cos είναι παραγωγίσιμη στο σημείο 0 και $\cos' 0 = 0$.

Πράγματι, $\frac{\cos x - \cos 0}{x-0} = -x\frac{1-\cos x}{x^2} \to 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$ καθώς $x \to 0$.

Θα δούμε λίγο αργότερα ότι η συνάρτηση cos είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in \mathbf{R}$. Μία απόδειξη θα παρουσιασθεί στην επόμενη ενότητα και θα χρησιμοποιεί τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα στο 0 που μόλις αποδείξαμε. Μία ακόμη απόδειξη θα παρουσιασθεί στο κεφάλαιο για σειρές συναρτήσεων.

4. **Η δυναμοσειρά του ημιτόνου**: $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, η ακολουθία των συντελεστών της δυναμοσειράς αυτής είναι

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος,} \\ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n!}\,, & \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός.} \end{cases}$$

Άρα, $\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 0, & \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος,} \\ \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\,, & \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός,} \end{cases}$ οπότε οι υποακολουθίες άρτιων και περιττών δεικτών της $(\sqrt[n]{|a_n|})$ συγκλίνουν στο 0. Άρα, $a = 0$ και, επομένως, $R = +\infty$. Η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως, και αυτή, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Τώρα, η δυναμοσειρά αυτή χρησιμεύει για να ορισθεί το *ημίτονο του* x για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Ορισμός 1.10 *Για κάθε $x \in \mathbf{R}$ ορίζουμε το **ημίτονο του** x, το οποίο συμβολίζουμε $\sin x$, ως το άθροισμα της $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Δηλαδή,*

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Το σχόλιο που κάναμε μετά από τον ορισμό του συνημιτόνου ισχύει και για τον ορισμό του ημιτόνου. Επίσης, είναι εύκολο να αποδείξουμε μερικές απλές ιδιότητές του.
(i) $\sin 0 = 0$.
(ii) $\sin(-x) = -\sin x$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.
(iii) Η συνάρτηση sin είναι συνεχής στο σημείο 0: $\lim_{x\to 0}\sin x = 0 = \sin 0$.

Διότι, αν $|x| < 2$, έχουμε $|\sin x| = \big|\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\big| \leq \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{|x|^{2k+1}}{2^{2k}} = |x|\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{x^2}{4}\right)^k = \frac{4|x|}{4-x^2} \to 0$ καθώς $x \to 0$.
(iv) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Ομοίως, αν $|x| < 2$, τότε $|\sin x - x| = \big|\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\big| \leq \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} \leq \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{|x|^{2k+1}}{2^{2k}} = |x|\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{x^2}{4}\right)^k = \frac{|x|^3}{4-x^2}$ και, επομένως, $\big|\frac{\sin x}{x} - 1\big| \leq \frac{x^2}{4-x^2} \to 0$ καθώς $x \to 0$.
(v) Η συνάρτηση sin είναι παραγωγίσιμη στο σημείο 0 και $\sin' 0 = 1$.

Πράγματι, $\frac{\sin x - \sin 0}{x-0} = \frac{\sin x}{x} \to 1$ καθώς $x \to 0$.

Όπως και με την cos, θα δούμε λίγο αργότερα και, μάλιστα, με δύο αποδείξεις ότι η συνάρτηση sin είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Άσκηση 31: Εφαρμόστε το κριτήριο λόγου για να αποδείξετε τη σύγκλιση των δυναμοσειρών του συνημιτόνου και του ημιτόνου.

Άσκηση 32: Έστω $\rho \in \mathbf{R}$. Βρείτε τις ακτίνες σύγκλισης των $\sum_{k=0}^{+\infty} k^\rho x^k$, $\sum_{k=0}^{+\infty}\rho^k x^k$, $\sum_{k=0}^{+\infty} k!x^k$ και $\sum_{k=0}^{+\infty}(2k)!\,x^{2k}$.

Άσκηση 33: Έστω $A, B \in \mathbf{R}$ και δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$. Υποθέτουμε ότι $a_n + Aa_{n-1} + Ba_{n-2} = 0$ για κάθε $n \geq 2$.
1. Αποδείξτε ότι για κάθε x στο διάστημα σύγκλισής της η σειρά έχει άθροισμα $\frac{a_0+(a_1+Aa_0)x}{1+Ax+Bx^2}$. (Υπόδειξη: Πολλαπλασιάστε την $a_n + Aa_{n-1} + Ba_{n-2} = 0$ με το x^n, σχηματίστε το $\sum_{n=2}^{+\infty}$ του αποτελέσματος και λύστε ως προς το $s(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$.)
2. Υπολογίστε την ακτίνα σύγκλισης της σειράς. (Υπόδειξη: Βρείτε ρ και σ ώστε $\rho + \sigma = -A$ και $\rho\sigma = B$ και παρατηρήστε ότι $a_n - \rho a_{n-1} = \sigma(a_{n-1} - \rho a_{n-2})$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Υπολογίστε, επαγωγικά, το $a_n - \rho a_{n-1}$ και, κατόπιν, πάλι επαγωγικά, το a_n.)

Άσκηση 34: Έστω ότι η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k$ είναι R. Αν $m \in \mathbf{N}$, βρείτε τις ακτίνες σύγκλισης των $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^m(x-x_0)^k$, $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^{mk}$ και $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{km}(x-x_0)^k$.

1.7 Γινόμενο Cauchy σειρών.

Έστω δύο σειρές $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ και $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$. Σχηματίζουμε μια καινούρια σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$ ως εξής:

$$c_0 = a_0 b_0$$

$$c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1$$

$$c_2 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n = \sum_{m=0}^{n} a_{n-m} b_m$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Ορισμός 1.11 *Η σειρά* $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{k} a_{k-m} b_m \right)$ *ονομάζεται* ***γινόμενο Cauchy*** *των* $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ *και* $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$.

Η ιδέα για τέτοιου είδους πολλαπλασιασμό προέρχεται από τις δυναμοσειρές, δηλαδή τις σειρές της μορφής $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$. Αν πολλαπλασιάσουμε δύο σειρές $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ και $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$ όπως πολλαπλασιάζουμε δύο πολυώνυμα, δηλαδή ομαδοποιώντας ίδιες δυνάμεις του x, βλέπουμε ότι σχηματίζεται η σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$, της οποίας οι συντελεστές c_n δίνονται από τους παραπάνω τύπους.

Θεώρημα 1.9 *1. Αν η μία από τις σειρές* $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ *και* $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ *συγκλίνει απολύτως και η άλλη, απλώς, συγκλίνει, το γινόμενο Cauchy* $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$ *των δύο σειρών συγκλίνει και*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \,.$$

2. Αν και οι δύο σειρές $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ *και* $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ *συγκλίνουν απολύτως, το γινόμενο Cauchy* $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$ *των δύο σειρών συγκλίνει απολύτως.*

Απόδειξη: 1. Ας υποθέσουμε ότι η $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως, δηλαδή ότι η $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$ συγκλίνει, και ότι η $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ συγκλίνει. Έστω $s = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ και $t = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $t_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ και $u_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$ καθώς και τα $S_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$. Θεωρούμε, επίσης, τον μη αρνητικό αριθμό $S = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$.

Γνωρίζουμε ότι $s_n \to s$, $t_n \to t$ και ότι $S_n \leq S$ για κάθε n και θέλουμε να αποδείξουμε ότι $u_n \to st$.

$$u_n = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) + \cdots + (a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_0 b_n)$$

$$= a_0(b_0 + b_1 + \cdots + b_n) + a_1(b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1}) + \cdots + a_{n-1}(b_0 + b_1) + a_n b_0$$

$$= a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_{n-1} t_1 + a_n t_0 .$$

Άν ορίσουμε $t_n^* = t_n - t$, τότε $t_n^* \to 0$ και

$$u_n = a_0(t_n^* + t) + a_1(t_{n-1}^* + t) + \cdots + a_{n-1}(t_1^* + t) + a_n(t_0^* + t)$$

$$= a_0t_n^* + a_1t_{n-1}^* + \cdots + a_{n-1}t_1^* + a_nt_0^* + (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)t$$

$$= a_0t_n^* + a_1t_{n-1}^* + \cdots + a_{n-1}t_1^* + a_nt_0^* + s_nt.$$

Άφου $s_nt \to st$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$a_0t_n^* + a_1t_{n-1}^* + \cdots + a_{n-1}t_1^* + a_nt_0^* \to 0.$$

Επειδή $t_n^* \to 0$, υπάρχει κάποιο M ώστε $|t_n^*| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Επίσης, αφού $t_n^* \to 0$ και αφού η $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$ συγκλίνει, προκύπτει ότι για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε: $|t_n^*| < \frac{\epsilon}{2S}$ και $\sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| < \frac{\epsilon}{2M}$ για κάθε $n \geq n_0$. (Για το δεύτερο εφαρμόζουμε την Πρόταση 1.5.2 στη σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$.)

Άρα, αν $n \geq 2n_0$,

$$|a_0t_n^* + a_1t_{n-1}^* + \cdots + a_{n-1}t_1^* + a_nt_0^*|$$

$$\leq |a_0||t_n^*| + |a_1||t_{n-1}^*| + \cdots + |a_{n-n_0}||t_{n_0}^*| + |a_{n-n_0+1}||t_{n_0-1}^*| + \cdots$$

$$\cdots + |a_n||t_0^*|$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2S}(|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-n_0}|) + M(|a_{n-n_0+1}| + \cdots + |a_n|)$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2S}\,S + M \sum_{k=n-n_0+1}^{+\infty} |a_k|.$$

Αφού, όμως, $n - n_0 \geq n_0$,

$$|a_0t_n^* + a_1t_{n-1}^* + \cdots + a_nt_0^*| \leq \frac{\epsilon}{2S}S + M\frac{\epsilon}{2M} = \epsilon.$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $|a_0t_n^* + a_1t_{n-1}^* + \cdots + a_nt_0^*| \leq \epsilon$ για κάθε $n \geq 2n_0$. Αυτό σημαίνει ότι

$$a_0t_n^* + a_1t_{n-1}^* + \cdots + a_{n-1}t_1^* + a_nt_0^* \to 0.$$

2. Τώρα, υποθέτουμε ότι και η $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ συγκλίνει απολύτως και θεωρούμε τον μη αρνητικό αριθμό $T = \sum_{k=0}^{+\infty} |b_k|$ καθώς και τα μερικά αθροίσματα $T_n = \sum_{k=0}^{n} |b_k|$ και $U_n = \sum_{k=0}^{n} |c_k|$. Τότε

$$U_n = |a_0b_0| + |a_1b_0 + a_0b_1| + |a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2| + \cdots$$

$$\cdots + |a_nb_0 + a_{n-1}b_1 + \cdots + a_1b_{n-1} + a_0b_n|$$

$$\leq |a_0||b_0| + (|a_1||b_0| + |a_0||b_1|) + (|a_2||b_0| + |a_1||b_1| + |a_0||b_2|) + \cdots$$

$$\cdots + (|a_n||b_0| + |a_{n-1}||b_1| + \cdots + |a_1||b_{n-1}| + |a_0||b_n|)$$

$$= |a_0|(|b_0| + |b_1| + \cdots + |b_n|) + |a_1|(|b_0| + |b_1| + \cdots + |b_{n-1}|) + \cdots$$

$$\begin{aligned}
&\cdots + |a_{n-1}|(|b_0| + |b_1|) + |a_n||b_0| \\
&= |a_0|T_n + |a_1|T_{n-1} + \cdots + |a_{n-1}|T_1 + |a_n|T_0 \\
&\le |a_0|T + |a_1|T + \cdots + |a_{n-1}|T + |a_n|T \\
&= S_nT \le ST
\end{aligned}$$

για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Άρα η (U_n) είναι άνω φραγμένη και, επομένως, η $\sum_{k=0}^{+\infty} |c_k|$ συγκλίνει. Ο.Ε.Δ.

Παραδείγματα:

1. Γινόμενο Cauchy της $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ με τον εαυτό της.

Αν $|x| < 1$, η σειρά συγκλίνει απολύτως και $x^n 1 + x^{n-1}x + \cdots + xx^{n-1} + 1x^n = (n+1)x^n$. Άρα, η σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)x^k$ συγκλίνει απολύτως, αν $|x| < 1$, και

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)x^k = \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\Big)^2 = \frac{1}{(1-x)^2}\,, \qquad |x| < 1.$$

2. Θεωρούμε οποιαδήποτε $x, y \in \mathbf{R}$ και τις σειρές $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ και $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{y^k}{k!}$, οι οποίες συγκλίνουν απολύτως. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
&\frac{x^n}{n!}\frac{y^0}{0!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\frac{y^1}{1!} + \cdots + \frac{x^1}{1!}\frac{y^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^0}{0!}\frac{y^n}{n!} \\
&= \frac{1}{n!}\Big(\binom{n}{n} x^n y^0 + \binom{n}{n-1} x^{n-1}y^1 + \cdots + \binom{n}{1} x^1 y^{n-1} + \binom{n}{0} x^0 y^n\Big) \\
&= \frac{(x+y)^n}{n!}\,.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{y^k}{k!}\,, \qquad x, y \in \mathbf{R}.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 1.11, η ισότητα αυτή επαληθεύει τη γνωστή ιδιότητα της εκθετικής συνάρτησης:

$$e^{x+y} = e^x e^y\,, \qquad x, y \in \mathbf{R}.$$

Θα δούμε αργότερα, στο κεφάλαιο για τις σειρές συναρτήσεων, ότι η ισότητα $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{y^k}{k!}$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δοθεί εναλλακτική απόδειξη της Πρότασης 1.11.

3. Θεωρούμε οποιαδήποτε $x, y \in \mathbf{R}$ και τις σειρές $\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ και $\cos y = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!}$, οι οποίες συγκλίνουν απολύτως. Θέτουμε

$$c_n = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\frac{y^0}{0!} + (-1)^{n-1}\frac{x^{2(n-1)}}{(2(n-1))!}(-1)^1\frac{y^2}{2!} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^1 \frac{x^2}{2!} (-1)^{n-1} \frac{y^{2(n-1)}}{(2(n-1))!} + \frac{x^0}{0!} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!}$$
$$= \frac{(-1)^n}{(2n)!} \Big(\binom{2n}{2n} x^{2n} y^0 + \binom{2n}{2n-2} x^{2n-2} y^2 + \cdots$$
$$\cdots + \binom{2n}{2} x^2 y^{2n-2} + \binom{2n}{0} x^0 y^{2n} \Big).$$

Ειδικώτερα, $c_0 = 1$, οπότε, βάσει του Θεωρήματος 1.9,

$$\cos x \cos y = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k = 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} c_{k+1}\,.$$

Κατόπιν, κάνουμε το ίδιο με τις σειρές $\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ και $\sin y = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Δηλαδή, θέτουμε

$$c'_n = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{y^1}{1!} + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} (-1)^1 \frac{y^3}{3!} + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^1 \frac{x^3}{3!} (-1)^{n-1} \frac{y^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^1}{1!} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$= \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} \Big(\binom{2n+2}{2n+1} x^{2n+1} y^1 + \binom{2n+2}{2n-1} x^{2n-1} y^3 + \cdots$$
$$\cdots + \binom{2n+2}{3} x^3 y^{2n-1} + \binom{2n+2}{1} x^1 y^{2n+2} \Big)$$

και έχουμε

$$\sin x \sin y = \sum_{k=0}^{+\infty} c'_k\,.$$

Παρατηρούμε, τώρα, ότι

$$c_{n+1} - c'_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!} \Big(\binom{2n+2}{2n+2} x^{2n+2} y^0 + \binom{2n+2}{2n+1} x^{2n+1} y^1 + \cdots$$
$$\cdots + \binom{2n+2}{1} x^1 y^{2n+1} + \binom{2n+2}{0} x^0 y^{2n+2} \Big)$$
$$= (-1)^{n+1} \frac{(x+y)^{2n+2}}{(2n+2)!}\,.$$

Επομένως,

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y = 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} (c_{k+1} - c'_k) = 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{(x+y)^{2k+2}}{(2k+2)!}$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{(x+y)^{2k}}{(2k)!} = \cos(x+y).$$

Πρόταση 1.13 *1.* $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ *για κάθε* $x, y \in \mathbf{R}$.
2. $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ *για κάθε* $x, y \in \mathbf{R}$.
3. $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$, $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ *και* $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ *για κάθε* $x \in \mathbf{R}$.
4. $|\sin x| \leq 1$ *και* $|\cos x| \leq 1$ *για κάθε* $x \in \mathbf{R}$.
5. Οι συναρτήσεις $\cos$ *και* $\sin$ *είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες στο* $\mathbf{R}$. *Επίσης,* $\cos' x = -\sin x$ *και* $\sin' x = \cos x$ *για κάθε* $x \in \mathbf{R}$.
6. $|\sin x| \leq |x|$ *και* $0 \leq 1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}$ *για κάθε* $x \in \mathbf{R}$.

Απόδειξη: 1 και 2. Η πρώτη ισότητα έχει ήδη αποδειχθεί και η δεύτερη αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο.
3. Θέτουμε $y = x$ στην ισότητα της 1, $y = x$ στην ισότητα της 2 και $y = -x$ στην ισότητα της 1, αντιστοίχως.
4. Από την $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ έχουμε $\sin^2 x \leq 1$ και $\cos^2 x \leq 1$ και, επομένως, $|\sin x| \leq 1$ και $|\cos x| \leq 1$.
5. Από τη συνέχεια της $\cos$ στο 0, $\lim_{y \to x} \cos y = \lim_{y \to x}(\cos x \cos(y-x) - \sin x \sin(y-x)) = \cos x \cos 0 - \sin x \sin 0 = \cos x$. Επίσης, από τη συνέχεια της $\sin$ στο 0, $\lim_{y \to x} \sin y = \lim_{y \to x}(\sin x \cos(y-x) + \cos x \sin(y-x)) = \sin x \cos 0 + \cos x \sin 0 = \sin x$.

Από την παραγωγισιμότητα της $\cos$ και της $\sin$ στο 0, $\lim_{y \to x} \frac{\cos y - \cos x}{y - x} = \lim_{y \to x} \frac{\cos x \cos(y-x) - \sin x \sin(y-x) - \cos x}{y-x} = \lim_{y \to x} \big(\cos x \frac{\cos(y-x)-1}{y-x} - \sin x \frac{\sin(y-x)}{y-x} \big)$ $= \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 = -\sin x$ και, επομένως, $\cos' x = -\sin x$.

Με τον ίδιο τρόπο, $\lim_{y \to x} \frac{\sin y - \sin x}{y-x} = \lim_{y \to x} \frac{\sin x \cos(y-x) + \cos x \sin(y-x) - \sin x}{y-x}$ $= \lim_{y \to x} \big(\sin x \frac{\cos(y-x)-1}{y-x} + \cos x \frac{\sin(y-x)}{y-x} \big) = \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x$ και, επομένως, $\sin' x = \cos x$.
6. Η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x - \sin x$ έχει παράγωγο $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ για κάθε x και, επομένως, είναι αύξουσα. Άρα, $f(x) \geq f(0)$ ή, ισοδύναμα, $\sin x \leq x$ για κάθε $x \geq 0$. Αν $0 \leq x \leq 1 < \frac{\pi}{2}$, συνεπάγεται $|\sin x| = \sin x \leq x = |x|$. Αν $1 < x$, $|\sin x| \leq 1 < x = |x|$. Άρα, $|\sin x| \leq |x|$ για κάθε $x \geq 0$. Τέλος, αν $x \leq 0$, $|\sin x| = |\sin(-x)| \leq |-x| = |x|$.

Τέλος, $1 - \cos x = 1 - \cos^2\big(\frac{x}{2}\big) + \sin^2\big(\frac{x}{2}\big) = 2\big|\sin\big(\frac{x}{2}\big)\big|^2 \leq 2\big|\frac{x}{2}\big|^2 = \frac{x^2}{2}$. Ο.Ε.Δ.

Όλα τα αποτελέσματα της Πρότασης 1.13 θα αποδειχθούν με εναλλακτικό τρόπο αργότερα, στο κεφάλαιο για σειρές συναρτήσεων.

Άσκηση 35: Αποδείξτε ότι $\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)(k+2)x^k = \frac{2}{(1-x)^3}$ για κάθε $x \in (-1, 1)$.

Άσκηση 36: Η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ συγκλίνει. Αποδείξτε ότι το γινόμενο Cauchy της σειράς αυτής με τον εαυτό της αποκλίνει. (Υπόδειξη: Το γινόμενο Cauchy είναι η σειρά $\sum_{k=2}^{+\infty} c_k$, όπου $c_n = (-1)^n \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{m}\sqrt{n-m}}$ για κάθε $n \geq 2$. Χρησιμοποιήστε την ανισότητα $2\sqrt{m}\sqrt{n-m} \leq m + (n-m) = n$ για να αποδείξετε ότι $|c_n| \geq \frac{2(n-1)}{n}$ και, επομένως, ότι $c_n \not\to 0$.)

1.8 Αναδιατάξεις σειρών.

Ορισμός 1.12 *Έστω (a_n) μία ακολουθία στο $\mathbf{R}$. Θεωρούμε μία ένα-προς-ένα και επί απεικόνιση*

$$\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}, \qquad \mathbf{N} \ni n \mapsto \sigma(n) \in \mathbf{N}.$$

Δηλαδή, οι αριθμοί $\sigma(n)$ $(n \in \mathbf{N})$ περιλαμβάνουν από μία φορά κάθε φυσικό αριθμό ή, με άλλα λόγια, αποτελούν μία αναδιάταξη των φυσικών αριθμών. Αν θέσουμε

$$a'_n = a_{\sigma(n)}\,, \qquad n \in \mathbf{N},$$

τότε η (a'_n) ονομάζεται ***αναδιάταξη*** *της (a_n). Επίσης, λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a'_n$ είναι μία* ***αναδιάταξη*** *της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.*

Αν $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ και $s'_n = \sum_{k=1}^{n} a'_k$, οι αριθμοί s_n και s'_n δεν είναι ίδιοι. Το s_n περιέχει τους $a_1, a_2, \dots, a_n$ ενώ το s'_n περιέχει τους $a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \dots, a_{\sigma(n)}$. Επομένως, δεν είναι καθόλου βέβαιο και εν γένει δεν ισχύει ότι, αν $s = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$, δηλαδή, αν $s_n \to s$, τότε $s = \sum_{k=1}^{+\infty} a'_k$, δηλαδή, $s'_n \to s$.

Παράδειγμα:

Γνωρίζουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ συγκλίνει. Θεωρούμε τη σειρά $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$, η οποία είναι αναδιάταξη της προηγούμενης. Θα αποδείξουμε ότι η δεύτερη σειρά συγκλίνει, επίσης, αλλά ότι έχει διαφορετικό άθροισμα από την πρώτη.

Παρατηρούμε ότι η δεύτερη σειρά αποτελείται από ομάδες τριών όρων, όπου η n-οστή ομάδα είναι η $\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}$. Αν ονομάσουμε s_n τα μερικά αθροίσματα της δεύτερης σειράς, έχουμε $s_{3n} = \big(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\big) + \big(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\big) + \cdots + \big(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\big)$. Τότε $s_{3(n+1)} - s_{3n} = \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{2n+2} > 0$ και, επομένως, η (s_{3n}) είναι αύξουσα. Επίσης, $s_{3n} = 1 + \frac{1}{3} - \big(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\big) - \cdots - \big(\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-1}\big) - \frac{1}{2n} < 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ επειδή κάθε παρένθεση είναι θετική. Άρα, η (s_{3n}) είναι και άνω φραγμένη και, επομένως, συγκλίνει σε κάποιο $s \in \mathbf{R}$. Τώρα, $s_{3n+1} - s_{3n} = \frac{1}{4n+1} \to 0$ και $s_{3n+2} - s_{3n} = \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} \to 0$, οπότε $s_{3n+1} \to s$ και $s_{3n+2} \to s$. Άρα, $s_n \to s$ και, επομένως, $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots = s$.

Τέλος, έχουμε $s = \big(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\big) + \big(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\big) + \big(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}\big) + \cdots > 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$. Αν, τώρα, $t = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$, τότε $t = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \big(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\big) - \big(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\big) - \cdots < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. Άρα, $t < s$.

Θεώρημα 1.10 *Έστω ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως. Τότε οποιαδήποτε αναδιάταξη $\sum_{k=1}^{+\infty} a'_k$ της $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ συγκλίνει, επίσης, απολύτως και*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a'_k = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k.$$

Απόδειξη: Έστω ότι $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ είναι η ένα-προς-ένα και επί απεικόνιση η οποία ορίζει την αναδιάταξη. Δηλαδή, $a'_n = a_{\sigma(n)}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$.

Έστω $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| = S$. Αν $S'_n = \sum_{k=1}^{n} |a'_k|$, τότε $S'_n \leq S$, αφού οι όροι $|a'_1|, \ldots, |a'_n|$, δηλαδή οι όροι $|a_{\sigma(1)}|, \ldots, |a_{\sigma(n)}|$, είναι ορισμένοι μόνον από τους $|a_1|, |a_2|, \ldots$. Άρα η (S'_n) είναι άνω φραγμένη και, επομένως, η $\sum_{k=1}^{+\infty} |a'_k|$ συγκλίνει.

Έστω, τώρα, $s = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ και θα αποδείξουμε ότι $\sum_{k=1}^{+\infty} a'_k = s$.

Αφού η $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως και αφού $s_n \to s$, για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $\sum_{k=n_0+1}^{+\infty} |a_k| < \frac{\epsilon}{2}$ και: $n > n_0 \Rightarrow |s_n - s| < \frac{\epsilon}{2}$.

Θα συγκρίνουμε, τώρα, τα s_n και s'_n για μεγάλα n.

Διαλέγουμε n_1 αρκετά μεγάλο ώστε οι δείκτες $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n_1)$ να περιλαμβάνουν τους $1, 2, \ldots, n_0$. Είναι προφανές ότι $n_1 \geq n_0$. Τότε, αν $n \geq n_1 (\geq n_0)$, στο $s_n - s'_n$ δεν περιλαμβάνονται οι όροι $a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}$, αφού καθένας από αυτούς περιέχεται από μία φορά στο s_n και στο s'_n. Επομένως, αν $n \geq n_1$, $|s_n - s'_n| \leq \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} |a_k| < \frac{\epsilon}{2}$. Άρα, για κάθε $n \geq n_1$ ισχύει $|s'_n - s| \leq |s'_n - s_n| + |s_n - s| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Άρα, $s'_n \to s$. Ο.Ε.Δ.

Άσκηση 37: Υπολογίστε το άθροισμα της σειράς $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^{15}} + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{2^{13}} + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{2^{11}} + \cdots$.

Άσκηση 38: Έστω η συγκλίνουσα σειρά $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$. Θεωρούμε την αναδιάταξη $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} + \frac{1}{25} + \frac{1}{27} + \frac{1}{29} + \frac{1}{31} - \frac{1}{10} + \cdots$. Αποδείξτε ότι η δεύτερη σειρά αποκλίνει στο $+\infty$.

Κεφάλαιο 2

Ακολουθίες Συναρτήσεων.

2.1 Κατά σημείο σύγκλιση.

Έστω οποιοδήποτε μη κενό σύνολο A, συνάρτηση $f : A \to \mathbf{R}$ και συναρτήσεις $f_n : A \to \mathbf{R}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Οι συναρτήσεις αυτές σχηματίζουν μία **ακολουθία συναρτήσεων** (f_n). Συνήθως, το A είναι υποσύνολο του $\mathbf{R}$ ή, γενικότερα, του $\mathbf{R}^m$ για κάποιο $m \geq 1$.

Ορισμός 2.1 *Λέμε ότι **η** (f_n) **συγκλίνει κατά σημείο στην** f **στο σύνολο** A και συμβολίζουμε*

$$f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f \quad \textit{στο } A,$$

αν για κάθε $x \in A$ η ακολουθία αριθμών $(f_n(x))$ συγκλίνει στον αριθμό $f(x)$, δηλαδή,

$$f_n(x) \to f(x)\,, \qquad x \in A.$$

Ή αλλιώς: $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$ στο A, αν για κάθε $x \in A$ και για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\epsilon, x) \in \mathbf{N}$ ώστε: $n \geq n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

Τα επόμενα παραδείγματα πρέπει να μελετηθούν προσεκτικά, διότι θα γίνεται συχνή αναφορά σε αυτά.

Παραδείγματα:

1. Έστω $A \neq \emptyset$, $f : A \to \mathbf{R}$ και $f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$.
Τότε $f_n : A \to \mathbf{R}$ και $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$ στο A, αφού $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in A$.

2. Έστω $f_n : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ με τύπο $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$.
Τότε $f_n(0) = 0 \to 0$ και, αν $x > 0$, $f_n(x) = \frac{x}{1+nx} \to 0$. Άρα, $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in [0, \infty)$, οπότε $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} \mathbf{0}$ στο $[0, \infty)$.

Όταν γράφουμε $\mathbf{0}$ εννοούμε τη **μηδενική συνάρτηση** με οποιοδήποτε πεδίο ορισμού A. Δηλαδή, τη συνάρτηση $\mathbf{0} : A \to \mathbf{R}$ με τύπο $\mathbf{0}(x) = 0$ για κάθε $x \in A$.

3. Έστω $f_n : [0, 1] \to \mathbf{R}$ με τύπο

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+nx}\,, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1, \\ \frac{nx}{2}\,, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}\,. \end{cases}$$

Τότε $f_n(0) = 0 \to 0$ και, αν $0 < x \leq 1$, για αρκετά μεγάλο n, και συγκεκριμένα για $n \geq \frac{1}{x}$, ισχύει $f_n(x) = \frac{1}{1+nx} \to 0$. Άρα, $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in [0,1]$ και, επομένως, $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} \mathbf{0}$ στο $[0,1]$.

4. Έστω $f_n : (0,1] \to \mathbf{R}$ με τύπο $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$.

Αν $0 < x \leq 1$, $f_n(x) \to 0$. Άρα, $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} \mathbf{0}$ στο (0,1].

5. Έστω $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ με τύπο $f_n(x) = \frac{x}{n}$.

Τότε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$, οπότε $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} \mathbf{0}$ στο $\mathbf{R}$.

6. Έστω $f_n : (1,+\infty) \to \mathbf{R}$ με τύπο $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$.

Τότε $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} \mathbf{0}$ στο $(1,+\infty)$.

7. Έστω $f_n : [0,+\infty) \to \mathbf{R}$ με τύπο $f_n(x) = \frac{n}{x+n^2}$.

Πάλι, $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} \mathbf{0}$ στο $[0,+\infty)$.

8. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ με τύπο $f_n(x) = x^n$.

Τότε $f_n(1) = 1 \to 1$ και, αν $0 \leq x < 1$, $f_n(x) = x^n \to 0$. Άρα, $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$ στο $[0,1]$, όπου η f έχει τύπο $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$

9. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ με τύπο $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{(n+1)x-1}, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1, \\ n^2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}. \end{cases}$

Τότε $f_n(0) = 0 \to 0$ και, αν $0 < x \leq 1$, για αρκετά μεγάλο n ισχύει $\frac{1}{n} \leq x$, οπότε $f_n(x) = \frac{1}{(n+1)x-1} \to 0$. Άρα $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} \mathbf{0}$ στο $[0,1]$.

10. Έστω $f_n : [0,2\pi] \to \mathbf{R}$ με τύπο $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$.

Για κάθε $x \in [0,2\pi]$ ισχύει $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \to 0$. Άρα, $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} \mathbf{0}$ στο $[0,2\pi]$.

11. Έστω $f_n : [0,2\pi] \to \mathbf{R}$ με τύπο $f_n(x) = \cos(nx)$.

Αν $x = \pi$, $\cos(n\pi) = (-1)^n$, οπότε η $(f_n(\pi))$ δε συγκλίνει. Άρα, η (f_n) δε συγκλίνει κατά σημείο σε καμία συνάρτηση στο $[0,2\pi]$.

Άσκηση 1: Έστω $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ και $g_n(x) = \frac{n^2x}{1+n^2x^2}$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Αποδείξτε ότι οι (f_n) και (g_n) συγκλίνουν κατά σημείο σε κάποιες συναρτήσεις f και g, αντιστοίχως, στο $\mathbf{R}$. Ποιες είναι οι συναρτήσεις αυτές;

Άσκηση 2: Έστω $f_n(x) = \frac{x}{n}[\frac{n}{x}]$ για κάθε $x \neq 0$. Αποδείξτε ότι $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} \mathbf{1}$ στο $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, όπου $\mathbf{1}$ είναι η σταθερή συνάρτηση με τύπο $\mathbf{1}(x) = 1$ για κάθε x. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την ανισότητα $[a] \leq a \leq [a]+1$.)

Άσκηση 3: Έστω $f_n(x) = \frac{n}{x}[\frac{x}{n}]$ για κάθε $x \neq 0$.

1. Αποδείξτε ότι $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} \mathbf{0}$ στο $(0,+\infty)$. (Υπόδειξη: Αν $x > 0$, μελετήστε τις τιμές του $\frac{x}{n}$ και, επομένως, του $[\frac{x}{n}]$ όταν το n είναι πολύ μεγάλο.)
2. Αποδείξτε ότι, αν το $A \subseteq \mathbf{R} \setminus \{0\}$ περιέχει τουλάχιστον έναν αρνητικό αριθμό, η (f_n) δε συγκλίνει κατά σημείο σε καμία συνάρτηση στο A. (Υπόδειξη: Εφαρμόστε την προηγούμενη υπόδειξη στην περίπτωση $x < 0$.)

Πρόταση 2.1 *Έστω $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$ στο A και $g_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} g$ στο A και $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Τότε*
1. $\lambda f_n + \mu g_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} \lambda f + \mu g$ στο A,
2. $f_n g_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} fg$ στο A και,
3. αν, επιπλέον, $g(x) \neq 0$ και $g_n(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$ και για κάθε $n \geq 1$, τότε $\frac{f_n}{g_n} \xrightarrow{\kappa.\sigma.} \frac{f}{g}$ στο A.

Απόδειξη: Έστω οποιοδήποτε $x \in A$. Τότε
1. $(\lambda f_n + \mu g_n)(x) = \lambda f_n(x) + \mu g_n(x) \to \lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda f + \mu g)(x)$,
2. $(f_n g_n)(x) = f_n(x) g_n(x) \to f(x)g(x) = (fg)(x)$ και
3. $\left(\frac{f_n}{g_n}\right)(x) = \frac{f_n(x)}{g_n(x)} \to \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$
λόγω γνωστών ιδιοτήτων των ακολουθιών αριθμών. Ο.Ε.Δ.

Οι επόμενες τρεις ερωτήσεις είναι *πολύ σημαντικές* για τη Μαθηματική Ανάλυση.

Ερώτηση 1: Αν $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$ στο A και κάθε f_n είναι συνεχής σε κάποιο $x_0 \in A$, είναι η f συνεχής στο x_0;
Απάντηση: Όχι πάντοτε. Στο παράδειγμα 8 όλες οι f_n είναι συνεχείς στο 1 αλλά η f δεν είναι συνεχής στο 1.

Ερώτηση 2: Αν $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$ στο $[a,b]$ και κάθε f_n είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, είναι η f Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και ισχύει $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$;
Απάντηση: Όχι πάντοτε. Στο παράδειγμα 9, $\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2} + 2\frac{\log n}{n+1} \to \frac{1}{2}$, ενώ $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \mathbf{0}(x)\,dx = 0$.

Ερώτηση 3: Αν $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$ στο A και κάθε f_n είναι παραγωγίσιμη στο A, είναι η f παραγωγίσιμη στο A και ισχύει $f_n' \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f'$ στο A;
Απάντηση: Όχι πάντοτε.

Στο παράδειγμα 2, $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} \mathbf{0}$ στο $[0,+\infty)$. Η σταθερή συνάρτηση $\mathbf{0}$ είναι παραγωγίσιμη. Αλλά $f_n'(x) = \frac{1}{(1+nx)^2}$, οπότε $f_n'(0) = 1 \to 1$ και, αν $x > 0$, $f_n'(x) \to 0$. Δηλαδή η (f_n') συγκλίνει κατά σημείο στο $[0,+\infty)$ στη συνάρτηση με τύπο $g(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ και, επομένως, $f_n' \overset{\kappa.\sigma}{\not\longrightarrow} \mathbf{0}' = \mathbf{0}$ στο $[0,+\infty)$.

Στο παράδειγμα 8 κάθε f_n είναι παραγωγίσιμη στο 1 ενώ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

Στο παράδειγμα 10, $f_n'(x) = \cos(nx)$ και η (f_n') δεν συγκλίνει κατά σημείο σε καμία συνάρτηση, όπως φαίνεται στο παράδειγμα 11.

Αν ορίσουμε ένα δεύτερο είδος σύγκλισης ακολουθίας συναρτήσεων, την *ομοιόμορφη σύγκλιση*, τα δύο πρώτα ερωτήματα έχουν καταφατική απάντηση ενώ μία παραλλαγή του τρίτου ερωτήματος έχει, επίσης, καταφατική απάντηση.

2.2 Ομοιόμορφη σύγκλιση.

Ορισμός 2.2 *Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο A και συναρτήσεις $f : A \to \mathbf{R}$ και $g : A \to \mathbf{R}$. Ορίζουμε την **ομοιόμορφη απόσταση των f και** g, και την συμβολίζουμε $d_u(f,g)$, με τον τύπο:*

$$d_u(f,g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|.$$

Δηλαδή, για κάθε $x \in A$ βρίσκουμε την απόσταση των αριθμών $f(x)$ και $g(x)$ και μετά βρίσκουμε το supremum αυτών των αποστάσεων καθώς το x διατρέχει το κοινό πεδίο ορισμού A. Το σύνολο αυτών των αποστάσεων είναι, προφανώς, μη κενό, αφού υπάρχει τουλάχιστον ένα x στο A ($A \neq \emptyset$). Αν το σύνολο αυτό είναι και άνω φραγμένο, τότε το $d_u(f,g)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός και, μάλιστα, μη αρνητικός, αφού όλες οι αποστάσεις είναι μη-αρνητικές. Αν, όμως, το σύνολο των αποστάσεων αυτών δεν είναι άνω φραγμένο, τότε $d_u(f,g) = +\infty$. Άρα,

$$0 \le d_u(f,g) \le +\infty.$$

Παραδείγματα:

1. Έστω $f,g : [0,1] \to \mathbf{R}$ με τύπους $f(x) = x$ και $g(x) = x^2$.
   Τότε $|f(x)-g(x)| = |x-x^2| = x-x^2$, οπότε $d_u(f,g) = \sup_{x\in[0,1]}(x-x^2) = \frac{1}{4}$.
2. Έστω $f,g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ με τύπους $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ και $g(x) = 0$.
   Τότε $|f(x)-g(x)| = \frac{x^2}{1+x^2}$, οπότε $d_u(f,g) = \sup_{x\in\mathbf{R}} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$.
3. Έστω $f,g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ με τύπους $f(x) = x$ και $g(x) = 1$.
   Τότε $|f(x)-g(x)| = |x-1|$, οπότε $d_u(f,g) = \sup_{x\in\mathbf{R}} |x-1| = +\infty$.

Ορισμός 2.3 *Έστω μη-κενό A, ακολουθία συναρτήσεων (f_n) με $f_n : A \to \mathbf{R}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και $f : A \to \mathbf{R}$. Λέμε ότι **η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο A** και συμβολίζουμε*

$$f_n \xrightarrow{o\mu} f \quad \text{στο } A,$$

αν

$$d_u(f_n,f) = \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \to 0.$$

Ή αλλιώς: $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο A, αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbf{N}$ ώστε: $n \ge n_0 \Rightarrow \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \le \epsilon$.

Πρέπει να τονισθεί ότι η ανισότητα $\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \le \epsilon$ ισοδυναμεί με το ότι: $|f_n(x) - f(x)| \le \epsilon$ για κάθε $x \in A$.

Προσέξτε *πάρα πολύ καλά* τη διαφορά του ορισμού αυτού από τον ορισμό της κατά σημείο σύγκλισης.
(i) $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο A σημαίνει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0, *το οποίο εξαρτάται από το ϵ*, ώστε: $|f_n(x) - f(x)| \le \epsilon$ για κάθε $n \ge n_0$ *και για κάθε* $x \in A$.
(ii) $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$ στο A σημαίνει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ και για κάθε $x \in A$ υπάρχει n_0, *το οποίο εξαρτάται από το ϵ* ***και*** *από το x*, ώστε: $|f_n(x) - f(x)| \le \epsilon$ για κάθε $n \ge n_0$.

Στην ομοιόμορφη σύγκλιση η επιλογή του n_0 εξαρτάται από το ϵ, αλλά είναι «ομοιόμορφη» ως προς το $x \in A$: υπάρχει *ένα* n_0 για *κάθε* $x \in A$. Ενώ στην κατά σημείο σύγκλιση διαφορετικά x καθορίζουν (ίσως) διαφορετικά n_0 (για το ίδιο ϵ).

Παράδειγμα:
Ας κοιτάξουμε το παράδειγμα 4 στο οποίο $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ ($x \in (0,1]$) και $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} \mathbf{0}$ στο $(0,1]$. Ας πάρουμε οποιοδήποτε $x \in (0,1]$ και οποιοδήποτε ϵ με $0 < \epsilon < 1$.

Τότε: $|f_n(x)-0|\le\epsilon \;\Leftrightarrow\; n\ge \frac{1}{x}\big(\frac{1}{\epsilon}-1\big)$. Άρα, το κατάλληλο n_0 είναι είτε το $n_0(x,\epsilon)=\Big[\frac{1}{x}\big(\frac{1}{\epsilon}-1\big)\Big]+1$, αν το $\frac{1}{x}\big(\frac{1}{\epsilon}-1\big)$ δεν είναι ακέραιος, είτε το $\Big[\frac{1}{x}\big(\frac{1}{\epsilon}-1\big)\Big]$, αν το $\frac{1}{x}\big(\frac{1}{\epsilon}-1\big)$ είναι ακέραιος. Παρατηρούμε ότι όσο το x είναι κοντύτερα στο 0 τόσο το $n_0(x,\epsilon)$ μεγαλώνει και μάλιστα $n_0(x,\epsilon)\to+\infty$ καθώς $x\to 0+$. Άρα, *δεν* υπάρχει *ένα* n_0 για το οποίο να ισχύει $|f_n(x)-0|\le\epsilon$ για κάθε x στο $(0,1]$ και για κάθε $n\ge n_0$. Επομένως, η σύγκλιση είναι κατά σημείον αλλά *όχι* ομοιόμορφη στο $(0,1]$.

Ας κατανοήσουμε τι σημαίνει «γεωμετρικά» η ανισότητα $d_u(f,g)\le\epsilon$. Ας υποθέσουμε ότι το A είναι υποσύνολο του $\mathbf{R}$, οπότε τα γραφήματα των f και g περιέχονται στο $\mathbf{R}^2$. Τότε: $d_u(f,g)\le\epsilon \;\Leftrightarrow\; \sup_{x\in A}|f(x)-g(x)|\le\epsilon \;\Leftrightarrow\; g(x)-\epsilon\le f(x)\le g(x)+\epsilon$ για κάθε $x\in A$. Επομένως, το γράφημα της f βρίσκεται ολόκληρο ανάμεσα στο γράφημα της $g-\epsilon$ και στο γράφημα της $g+\epsilon$, δηλαδή, μέσα στη ζώνη που δημιουργείται συμμετρικά γύρω από το γράφημα της g και έχει κατακόρυφο πλάτος 2ϵ. Άρα, $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο A ισοδυναμεί με το ότι για κάθε $\epsilon>0$ τα γραφήματα όλων των f_n, από έναν δείκτη και πέρα, βρίσκονται *ολόκληρα* μέσα στη ζώνη κατακόρυφου πλάτους 2ϵ συμμετρικά γύρω από το γράφημα της f.

Παράδειγμα:
Ξαναγυρνάμε στο παράδειγμα 4, όπου $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} \mathbf{0}$ στο $(0,1]$. Για μικρό $\epsilon>0$ (συγκεκριμένα: για $0<\epsilon<1$) τα γραφήματα των f_n έχουν όλα κάποιο κομμάτι τους *έξω* από τη ζώνη συμμετρικά γύρω από το γράφημα της $\mathbf{0}$ κατακόρυφου πλάτους 2ϵ. Άρα, $f_n \overset{\text{ομ}}{\not\longrightarrow} \mathbf{0}$ στο $(0,1]$.

Ας επανεξετάσουμε τα παραδείγματά μας.

Παραδείγματα:
1. $d_u(f_n,f)=\sup_{x\in A}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in A}\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\to 0$. Επομένως, $f_n\xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο A.
2. $d_u(f_n,\mathbf{0})=\sup_{0\le x<+\infty}\frac{x}{1+nx}=\frac{1}{n}\to 0$. Άρα, $f_n\xrightarrow{\text{ομ}}\mathbf{0}$ στο $[0,+\infty)$.
3. $d_u(f_n,\mathbf{0})=\sup_{0\le x\le 1}|f_n(x)|=\frac{1}{2}$. Άρα, $f_n\overset{\text{ομ}}{\not\longrightarrow}\mathbf{0}$ στο $[0,1]$.
4. $d_u(f_n,\mathbf{0})=\sup_{0<x\le 1}\frac{1}{1+nx}=1$. Άρα, $f_n\overset{\text{ομ}}{\not\longrightarrow}\mathbf{0}$ στο $(0,1]$.
5. $d_u(f_n,\mathbf{0})=\sup_{x\in\mathbf{R}}\left|\frac{x}{n}\right|=+\infty$. Άρα, $f_n\overset{\text{ομ}}{\not\longrightarrow}\mathbf{0}$ στο $\mathbf{R}$.
6. $d_u(f_n,\mathbf{0})=\sup_{1<x<+\infty}\frac{x}{x+n}=1$. Άρα, $f_n\overset{\text{ομ}}{\not\longrightarrow}\mathbf{0}$ στο $(1,+\infty)$.
7. $d_u(f_n,\mathbf{0})=\sup_{0\le x<+\infty}\frac{n}{x+n^2}=\frac{1}{n}\to 0$. Άρα, $f_n\xrightarrow{\text{ομ}}\mathbf{0}$ στο $[0,+\infty)$.
8. $d_u(f_n,f)=\sup_{0\le x\le 1}|x^n-f(x)|=\sup_{0\le x<1}x^n=1$. Άρα, $f_n\overset{\text{ομ}}{\not\longrightarrow} f$ στο $[0,1]$.
9. $d_u(f_n,\mathbf{0})=\sup_{0\le x\le 1}|f_n(x)|=n$. Άρα, $f_n\overset{\text{ομ}}{\not\longrightarrow}\mathbf{0}$ στο $[0,1]$.
10. $d_u(f_n,\mathbf{0})=\sup_{0\le x\le 2\pi}\left|\frac{\sin(nx)}{n}\right|=\frac{1}{n}\to 0$. Άρα, $f_n\xrightarrow{\text{ομ}}\mathbf{0}$ στο $[0,2\pi]$.
11. Η (f_n) δε συγκλίνει ομοιόμορφα σε καμία συνάρτηση λόγω της επόμενης Πρότασης 2.2.

Πρόταση 2.2 *Αν* $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ *στο* A*, τότε* $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$ *στο* A*. Δηλαδή, η ομοιόμορφη σύγκλιση είναι πιο ισχυρή από την κατά σημείο σύγκλιση.*

Απόδειξη: Έστω οποιοδήποτε $x \in A$ και $\epsilon > 0$. Διαλέγουμε n_0 ώστε: $n \geq n_0 \Rightarrow d_u(f_n, f) \leq \epsilon$. Όμως, $|f_n(x) - f(x)| \leq d_u(f_n, f)$ και, επομένως: $n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$. Άρα, $f_n(x) \to f(x)$. Ο.Ε.Δ.

Μετά από αυτή την πρόταση μπορούμε, πιο εύκολα, να βρούμε τη συνάρτηση προς την οποία συγκλίνει (αν συγκλίνει) ομοιόμορφα μία δοσμένη ακολουθία (f_n). Πρώτα βρίσκουμε f ώστε $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$. Αυτό είναι εύκολο, διότι για κάθε x έχουμε να κάνουμε με την ακολουθία *αριθμών* $(f_n(x))$. Βρίσκουμε το όριό της, το ονομάζουμε $f(x)$ και απομένει να εξετάσουμε αν $f_n \xrightarrow{o\mu} f$.

Άσκηση 4: Έστω $f_n(x) = xe^{-nx}$ $(x \in [0, +\infty))$. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση στο $[0, +\infty)$. Ποια είναι η f;

Άσκηση 5: Έστω $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ $(x \in [0, +\infty))$. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, σε κάποια συνάρτηση f στο $[0, +\infty)$. Ποια είναι η f; Αποδείξτε ότι για κάθε $a > 0$ η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $[a, +\infty)$.

Άσκηση 6: Να επαναλάβετε την προηγούμενη άσκηση με τις $f_n(x) = e^{-nx}$ καθώς και με τις $f_n(x) = nxe^{-nx}$.

Άσκηση 7: Έστω $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$ $(x \in \mathbf{R})$. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, σε κάποια συνάρτηση f στο $\mathbf{R}$. Ποια είναι η f; Κατόπιν, αποδείξτε ότι για κάθε δ με $0 < \delta \leq 1$ η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $(-\infty, -1-\delta] \cup [-1+\delta, 1-\delta] \cup [1+\delta, +\infty)$.

Άσκηση 8: Έστω $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο A και $B \subseteq A$. Αποδείξτε ότι $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο B.

Άσκηση 9: Έστω $A = B \cup C$ και $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο B και $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο C. Αποδείξτε ότι $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο A.

Άσκηση 10: Έστω $A \subseteq \mathbf{R}$, $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο A, η (x_n) περιέχεται στο A, $x_0 \in A$ και $x_n \to x_0$. Αν η f είναι συνεχής στο x_0, αποδείξτε ότι $f_n(x_n) \to f(x_0)$. (Υπόδειξη: $|f_n(x_n) - f(x_0)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x_0)| \leq d_u(f_n, f) + |f(x_n) - f(x_0)|$.)

Άσκηση 11: Υποθέτουμε $A \subseteq \mathbf{R}$, $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο A, x_0 σημείο συσσώρευσης του A και $\lim_{x \to x_0} f_n(x) = y_n \in \mathbf{R}$. Αποδείξτε ότι:
1. η (y_n) συγκλίνει στο $\mathbf{R}$ και
2. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{n \to +\infty} y_n$. Δηλαδή,

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x).$$

Άσκηση 12: Έστω $f_n(x) = x^n$ στο $[0, 1]$ και $g : [0, 1] \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[0, 1]$ με $g(1) = 0$. Αποδείξτε ότι $gf_n \xrightarrow{o\mu} \mathbf{0}$ στο $[0, 1]$.

Ορισμός 2.4 *Μία ακολουθία συναρτήσεων (f_n) με $f_n : A \to \mathbf{R}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ ονομάζεται* ***ομοιόμορφα φραγμένη στο*** *A, αν υπάρχει κοινό φράγμα για όλες τις f_n, δηλαδή, αν υπάρχει M ώστε $|f_n(x)| \leq M$ για κάθε $x \in A$ και για κάθε $n \in \mathbf{N}$.*

Πρόταση 2.3 *1. Αν $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ και $g_n \xrightarrow{\text{ομ}} g$ στο A και $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, $\lambda f_n + \mu g_n \xrightarrow{\text{ομ}} \lambda f + \mu g$ στο A.*
2. Αν, επιπλέον, οι (f_n) και (g_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένες, $f_n g_n \xrightarrow{\text{ομ}} fg$ στο A.
3. Αν, επιπλέον, οι (f_n) και $\left(\frac{1}{g_n}\right)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες στο A, $\frac{f_n}{g_n} \xrightarrow{\text{ομ}} \frac{f}{g}$ στο A.

Απόδειξη: 1. Έστω $\epsilon > 0$. Βρίσκουμε $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbf{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει: $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2|\lambda|+1}$ και $|g_n(x) - g(x)| \leq \frac{\epsilon}{2|\mu|+1}$ για κάθε $x \in A$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει: $|(\lambda f_n(x) + \mu g_n(x)) - (\lambda f(x) + \mu g(x))| \leq |\lambda||f_n(x) - f(x)| + |\mu||g_n(x) - g(x)| \leq |\lambda|\frac{\epsilon}{2|\lambda|+1} + |\mu|\frac{\epsilon}{2|\mu|+1} \leq \epsilon$ για κάθε $x \in A$.
2. Υπάρχει M ώστε $|f_n(x)| \leq M$ και $|g_n(x)| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και για κάθε $x \in A$. Επειδή $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο A, συνεπάγεται $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$ στο A, οπότε για κάθε $x \in A$ ισχύει $f_n(x) \to f(x)$. Άρα, $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in A$. Δηλαδή, το κοινό φράγμα των f_n είναι φράγμα και της f.

Έστω οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Διαλέγουμε $n_0 = n_0(\epsilon)$ ώστε για $n \geq n_0$ να ισχύει: $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2M}$ και $|g_n(x) - g(x)| \leq \frac{\epsilon}{2M}$ για κάθε $x \in A$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει: $|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \leq |f_n(x)g_n(x) - f(x)g_n(x)| + |f(x)g_n(x) - f(x)g(x)| = |f_n(x) - f(x)||g_n(x)| + |f(x)||g_n(x) - g(x)| \leq M\frac{\epsilon}{2M} + M\frac{\epsilon}{2M} = \epsilon$ για κάθε $x \in A$.
3. Υπάρχει M ώστε $|f_n(x)| \leq M$ και $\left|\frac{1}{g_n(x)}\right| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και για κάθε $x \in A$. Αυτό, ειδικώτερα, συνεπάγεται ότι $g_n(x) \neq 0$ και, επομένως, ορίζονται οι $\frac{f_n}{g_n}$. Επειδή $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο A, συνεπάγεται $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$ στο A, οπότε για κάθε $x \in A$ ισχύει $f_n(x) \to f(x)$. Άρα $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in A$. Ομοίως, συνεπάγεται $\left|\frac{1}{g(x)}\right| \leq M$ για κάθε $x \in A$, οπότε $g(x) \neq 0$ και, επομένως, ορίζεται η $\frac{f}{g}$.

Έστω οποιοδήποτε $\epsilon > 0$. Διαλέγουμε $n_0 = n_0(\epsilon)$ ώστε για $n \geq n_0$ να ισχύει: $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2M}$ και $|g_n(x) - g(x)| \leq \frac{\epsilon}{2M^3}$ για κάθε $x \in A$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει: $\left|\frac{f_n(x)}{g_n(x)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq \left|\frac{f_n(x)-f(x)}{g_n(x)}\right| + \left|\frac{f(x)(g_n(x)-g(x))}{g_n(x)g(x)}\right| \leq M\frac{\epsilon}{2M} + M^3\frac{\epsilon}{2M^3} = \epsilon$ για κάθε $x \in A$. Ο.Ε.Δ.

Άσκηση 13: Έστω $f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{n}$, $g_n(x) = \frac{1}{n}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Αποδείξτε ότι $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$, $g_n \xrightarrow{\text{ομ}} g$ και $f_n g_n \overset{\text{ομ}}{\not\longrightarrow} fg$ στο $(0, +\infty)$.

Άσκηση 14: Έστω $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο A. Αν $f_n : A \to [a, b]$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, αποδείξτε ότι $f : A \to [a, b]$. Αν, επιπλέον, η $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, αποδείξτε ότι $g \circ f_n \xrightarrow{\text{ομ}} g \circ f$ στο A. (Υπόδειξη: Η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b]$.)

Θεώρημα 2.1 ***Κριτήριο Cauchy.*** *Έστω $f_n : A \to \mathbf{R}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση στο A αν και μόνον αν για κάθε*

$\epsilon > 0$ *υπάρχει* $n_0 = n_0(\epsilon)$ *ώστε:* $n, m \geq n_0 \;\Rightarrow\; d_u(f_n, f_m) \leq \epsilon$ *ή, ισοδύναμα,* $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$ *για κάθε* $x \in A$.

Απόδειξη: Έστω $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο A και τυχόν $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 = n_0(\epsilon)$ ώστε: $n \geq n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $x \in A$. Άρα: $n, m \geq n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ για κάθε $x \in A$.

Για το αντίστροφο σταθεροποιούμε $x \in A$. Η υπόθεση συνεπάγεται ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε: $n, m \geq n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f_m(x)| \leq d_u(f_n, f_m) \leq \epsilon$. Άρα η ακολουθία $(f_n(x))$ είναι Cauchy και, επομένως, συγκλίνει σε κάποιον αριθμό ο οποίος εξαρτάται από το x. Σε κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζουμε το όριο της $(f_n(x))$, το οποίο ονομάζουμε $f(x)$. Άρα $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$ στο A.

Η υπόθεση είναι ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\epsilon)$ ώστε: $n, m \geq n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f_m(x)|$ για κάθε $x \in A$. Καθώς $m \to +\infty$ συνεπάγεται: $n \geq n_0 \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $x \in A$. Άρα $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο A. Ο.Ε.Δ.

Άσκηση 15: Αν $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο A και κάθε f_n είναι φραγμένη στο A, η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο A. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το κριτήριο Cauchy με $\epsilon = 1$.)

Τώρα θα δούμε ότι με την ομοιόμορφη σύγκλιση έχουμε πιο ικανοποιητικές απαντήσεις στα τρία ερωτήματα που διατυπώθηκαν στο τέλος της ενότητας 2.1 απ΄ ότι με την κατά σημείο σύγκλιση.

Θεώρημα 2.2 *Έστω μη-κενό* $A \subseteq \mathbf{R}$, $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ *στο* A *και* $x_0 \in A$. *Αν κάθε* f_n *είναι συνεχής στο* x_0, *η* f *είναι συνεχής στο* x_0. *Άρα, αν κάθε* f_n *είναι συνεχής στο* A, *η* f *είναι συνεχής στο* A.

Απόδειξη: Έστω $\epsilon > 0$. Αφού $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο A, υπάρχει n_0 ώστε $d_u(f_{n_0}, f) < \frac{\epsilon}{3}$. Αφού η f_{n_0} είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: $x \in A$, $|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$. Άρα: $x \in A$, $|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \leq d_u(f_{n_0}, f) + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + d_u(f_{n_0}, f) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$. Ο.Ε.Δ.

Παράδειγμα:
Στο παράδειγμα 8 μπορούμε να συμπεράνουμε, χωρίς υπολογισμό της $d_u(f_n, f)$, ότι $f_n \overset{\text{ομ}}{\not\longrightarrow} f$ στο $[0, 1]$, αφού κάθε f_n είναι συνεχής στο 1 ενώ η f *δεν* είναι συνεχής στο 1.

Άσκηση 16: Ξανακοιτάξτε στις ασκήσεις 5, 6 και 7 τις $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ και $f_n(x) = e^{-nx}$ στο $[0, +\infty)$ και τις $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$ στο $\mathbf{R}$. Αφού έχετε βρει τις αντίστοιχες f, αποδείξτε, χωρίς να υπολογίσετε τις $d_u(f_n, f)$, ότι η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

Άσκηση 17: Έστω $f_n(x) = \begin{cases} 0, & x < \frac{1}{n+1} \text{ ή } \frac{1}{n} < x, \\ \sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right), & \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}. \end{cases}$ Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια f συνεχή στο $\mathbf{R}$. Ποια είναι η f; Ισχύει $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο $\mathbf{R}$;

Θεώρημα 2.3 *Έστω ότι κάθε* $f_n : [a,b] \to \mathbf{R}$ *είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο* $[a,b]$ *και ότι* $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ *στο* $[a,b]$. *Τότε η* f *είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο* $[a,b]$ *και* $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$.

Απόδειξη: Για να αποδείξουμε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ θα χρησιμοποιήσουμε το Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας.

Παίρνουμε $\epsilon > 0$ και θέτουμε $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{1+2(b-a)}$. Επειδή $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$, υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $d_u(f_{n_0}, f) < \epsilon_1$. Επομένως, $|f_{n_0}(x) - f(x)| \leq \epsilon_1$ για κάθε $x \in [a,b]$. Επειδή η f_{n_0} είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, υπάρχει, βάσει του Κριτηρίου Ολοκληρωσιμότητας, διαμέριση $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ ώστε $\overline{\Sigma}(f_{n_0}, \Delta) - \underline{\Sigma}(f_{n_0}, \Delta) < \epsilon_1$. Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ ορίζουμε $M_k = \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$, $m_k = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$ καθώς και $M_{k,n_0} = \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f_{n_0}(x)$, $m_{k,n_0} = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f_{n_0}(x)$. Σύμφωνα με τους ορισμούς των $\overline{\Sigma}$ και $\underline{\Sigma}$, ισχύει $\overline{\Sigma}(f_{n_0}, \Delta) - \underline{\Sigma}(f_{n_0}, \Delta) = \sum_{k=1}^n (M_{k,n_0} - m_{k,n_0})(x_k - x_{k-1})$ και $\overline{\Sigma}(f, \Delta) - \underline{\Sigma}(f, \Delta) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1})$. Για κάθε $x \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει $f(x) = f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + f_{n_0}(x) \leq \epsilon_1 + M_{k,n_0}$ και, επομένως, $M_k \leq \epsilon_1 + M_{k,n_0}$. Ομοίως, $f(x) = f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) \geq -|f(x) - f_{n_0}(x)| + f_{n_0}(x) \geq -\epsilon_1 + m_{k,n_0}$ και, επομένως, $m_k \geq -\epsilon_1 + m_{k,n_0}$. Συνεπάγεται $M_k - m_k \leq M_{k,n_0} - m_{k,n_0} + 2\epsilon_1$, οπότε, πολλαπλασιάζοντας με το $x_k - x_{k-1}$ και αθροίζοντας, βρίσκουμε $\overline{\Sigma}(f, \Delta) - \underline{\Sigma}(f, \Delta) \leq \overline{\Sigma}(f_{n_0}, \Delta) - \underline{\Sigma}(f_{n_0}, \Delta) + \sum_{k=1}^n 2\epsilon(x_k - x_{k-1}) = \overline{\Sigma}(f_{n_0}, \Delta) - \underline{\Sigma}(f_{n_0}, \Delta) + 2\epsilon_1(b-a) < \big(1 + 2(b-a)\big)\epsilon_1 = \epsilon$.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f, \Delta) - \underline{\Sigma}(f, \Delta) < \epsilon$. Σύμφωνα με το Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

Αφού αποδείξαμε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και, επομένως, ότι το $\int_a^b f(x)\,dx$ έχει υπόσταση, έχουμε

$$\Big|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\Big| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx$$
$$\leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = (b-a) d_u(f_n, f) \to 0.$$

Άρα, $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$. Ο.Ε.Δ.

Παρατήρηση: Τις περισότερες φορές, όταν προκύπτει περίπτωση εφαρμογής του Θεωρήματος 2.3, η συνάρτηση-όριο f της (f_n) είναι φανερά Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Για παράδειγμα, μπορεί όλες οι f_n να είναι συνεχείς στο $[a,b]$, οπότε, με εφαρμογή του Θεωρήματος 2.2, και η f είναι συνεχής στο $[a,b]$. Ή μπορεί να γνωρίζουμε τον τύπο της f και να διακρίνουμε ότι είναι κατά τμήματα συνεχής ή κατά τμήματα μονότονη στο $[a,b]$. Σε αυτές τις περιπτώσεις, το πρώτο και *σαφώς πιο δύσκολο* μέρος της απόδειξης του Θεωρήματος 2.3 (το οποίο εξασφαλίζει την ύπαρξη του $\int_a^b f(x)\,dx$) είναι περιττό και χρειάζεται μόνον η *σχετικά απλή* απόδειξη του ότι $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$.

Παράδειγμα:

Στο παράδειγμα 9 έχουμε $\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}+2\frac{\log n}{n+1} \to \frac{1}{2}$ και $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Άρα, χωρίς να υπολογίσουμε το $d_u(f_n, f)$, συμπεραίνουμε ότι $f_n \overset{\text{ομ}}{\not\longrightarrow} f$ στο $[0,1]$.

Άσκηση 18: Έστω $f_n(x) = n^p x(1-x^2)^n \quad (x \in [0,1])$, όπου $p \in \mathbf{R}$ είναι παράμετρος. Αποδείξτε ότι για κάθε $p \in \mathbf{R}$ η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια f στο $[0,1]$. (Υπόδειξη: Τι τιμή έχει το $\lim_{n\to+\infty} n^p a^n$, αν $0 \le a < 1$, και τι τιμή έχει το ίδιο όριο, αν $a = 1$;) Για ποιες τιμές του p είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη; Για ποιες τιμές του p ισχύει $\int_0^1 f_n(x)\,dx \to \int_0^1 f(x)\,dx$;

Όπως φαίνεται από τα παραδείγματα 10 και 11, δε μπορούμε να περιμένουμε ανάλογο θεώρημα για παραγώγους. Δηλαδή, το ότι $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο A δε συνεπάγεται πάντοτε ότι $f_n' \xrightarrow{\text{ομ}} f'$ στο A. Υπάρχει, όμως, ένα αποτέλεσμα στην αντίθετη κατεύθυνση.

Θεώρημα 2.4 *Έστω $f_n : [a,b] \to \mathbf{R}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ και κάθε f_n είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$. Αν*
(i) $f_n' \xrightarrow{\text{ομ}} g$ στο $[a,b]$ και
(ii) η $(f_n(x_0))$ συγκλίνει για τουλάχιστον ένα $x_0 \in [a,b]$,
τότε η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια f στο $[a,b]$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$, και $f'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Απόδειξη: 1. Παίρνουμε τυχόν $\epsilon > 0$. Επειδή $f_n' \xrightarrow{\text{ομ}} g$ στο $[a,b]$ και η $(f_n(x_0))$ συγκλίνει, υπάρχει, σύμφωνα με το κριτήριο του Cauchy, $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε: $n,m \ge n_0 \;\Rightarrow\; d_u(f_n', f_m') \le \frac{\epsilon}{2(b-a)}$ και $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| \le \frac{\epsilon}{2}$. Για κάθε $n,m \ge n_0$ και για κάθε $x \in [a,b]$ υπάρχει ξ ανάμεσα στα x και x_0 ώστε $|f_n(x) - f_m(x)| \le \big|(f_n(x)-f_m(x)) - (f_n(x_0)-f_m(x_0))\big| + |f_n(x_0)-f_m(x_0)| = |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)||x - x_0| + |f_n(x_0)-f_m(x_0)| \le d_u(f_n', f_m')(b-a) + |f_n(x_0)-f_m(x_0)| \le \frac{\epsilon}{2(b-a)}(b-a) + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Άρα: $n,m \ge n_0 \;\Rightarrow\; d_u(f_n, f_m) \le \epsilon$. Σύμφωνα με το κριτήριο του Cauchy, η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια f στο $[a,b]$.
2. Παίρνουμε τυχόν $x \in [a,b]$ και θα αποδείξουμε ότι $f'(x) = g(x)$.

Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $f_n' \xrightarrow{\text{ομ}} g$ στο $[a,b]$, υπάρχει, σύμφωνα με το κριτήριο του Cauchy, $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε: $n,m \ge n_0 \;\Rightarrow\; d_u(f_n', f_m') \le \frac{\epsilon}{3}$ και $d_u(f_n', g) \le \frac{\epsilon}{3}$. Κατόπιν, επιλέγουμε $\delta > 0$ ώστε: $\big|\frac{f_{n_0}(y)-f_{n_0}(x)}{y-x} - f_{n_0}'(x)\big| \le \epsilon$ για κάθε $y \in [a,b]$ με $0 < |y-x| < \delta$.

Παίρνουμε, τώρα, $y \in [a,b]$ με $0 < |y-x| < \delta$ και τυχόν $n \ge n_0$ και έχουμε $\big|\frac{f_n(y)-f_n(x)}{y-x} - g(x)\big| \le \big|\frac{(f_n(y)-f_{n_0}(y))-(f_n(x)-f_{n_0}(x))}{y-x}\big| + \big|\frac{f_{n_0}(y)-f_{n_0}(x)}{y-x} - f_{n_0}'(x)\big| + |f_{n_0}'(x) - g(x)|$. Κατ' αρχήν, $|f_{n_0}'(x) - g(x)| \le d_u(f_{n_0}', g) \le \frac{\epsilon}{3}$. Κατόπιν, υπάρχει ξ ανάμεσα στα x και y ώστε $\big|\frac{(f_n(y)-f_{n_0}(y))-(f_n(x)-f_{n_0}(x))}{y-x}\big| = |f_n'(\xi) - f_{n_0}'(\xi)| \le d_u(f_n', f_{n_0}') \le \frac{\epsilon}{3}$. Άρα, $\big|\frac{f_n(y)-f_n(x)}{y-x} - g(x)\big| \le \frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3} = \epsilon$. Αυτό ισχύει για κάθε $n \ge n_0$ και κάθε $y \in [a,b]$ με $0 < |y-x| < \delta$. Παίρνοντας όριο καθώς $n \to +\infty$, έχουμε $\big|\frac{f(y)-f(x)}{y-x} - g(x)\big| \le \epsilon$ για κάθε $y \in [a,b]$ με $0 < |y-x| < \delta$. Αυτό σημαίνει ότι $\lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = g(x)$ και, επομένως, $f'(x) = g(x)$. Ο.Ε.Δ.

Παρατηρήσεις στο Θεώρημα 2.4: 1. *Υποθέτουμε* την ομοιόμορφη σύγκλιση

της (f_n') και *συμπεραίνουμε* την ομοιόμορφη σύγκλιση της (f_n).
2. Για την (f_n) *αρκεί* να υποθέσουμε την κατά σημείο σύγκλιση σε *ένα μόνο* σημείο x_0.

Άσκηση 19: Έστω $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$ $(x \in \mathbf{R})$. Αποδείξτε ότι υπάρχει f ώστε $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο $\mathbf{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και $f_n'(x) \to f'(x)$, αν $x \neq 0$, αλλά $f_n'(0) \not\to f'(0)$.

Άσκηση 20: Έστω $f_n(x) = \frac{1}{n}e^{-n^2x^2}$ $(x \in \mathbf{R})$.
1. Αποδείξτε ότι $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} \mathbf{0}$ στο $\mathbf{R}$ και $f_n' \xrightarrow{\text{κ.σ.}} \mathbf{0}$ στο $\mathbf{R}$.
2. Αποδείξτε ότι για κάθε $a > 0$ ισχύει $f_n' \overset{\text{ομ}}{\not\longrightarrow} \mathbf{0}$ στο $[-a,a]$ και $f_n' \xrightarrow{\text{ομ}} \mathbf{0}$ στο $(-\infty,-a] \cup [a,+\infty)$.

Άσκηση 21: Θεωρείστε τις $f_n(x) = |x|^{1+\frac{1}{n}}$ $(x \in [-1,1])$. Αποδείξτε ότι $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο $[-1,1]$ για κάποια f. Ποια είναι η f; Αποδείξτε ότι όλες οι f_n είναι παραγωγίσιμες στο 0 ενώ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

2.3 Το θεώρημα του Weierstrass.

Λήμμα 2.1 *1.* $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = 1$.
2. $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = nx$.
3. $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = (n^2-n)x^2 + nx$.

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε τον διωνυμικό τύπο $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k s^{n-k} = (t+s)^n$.
1. Θέτουμε $t = x$ και $s = 1-x$.
2. Παραγωγίζουμε τον διωνυμικό τύπο ως προς t, πολλαπλασιάζουμε την ισότητα που προκύπτει με t και θέτουμε $t = x$ και $s = 1-x$.
3. Παραγωγίζουμε δεύτερη φορά ως προς t, πολλαπλασιάζουμε με t και θέτουμε $t = x$ και $s = 1-x$. Ο.Ε.Δ.

Στην ενότητα αυτή θα αποδείξουμε μόνο ένα θεώρημα.

Θεώρημα 2.5 ***Weierstrass***. *Αν η $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο P ώστε*

$$|f(t) - P(t)| \leq \epsilon\,, \qquad t \in [a,b].$$

Το αποτέλεσμα του θεωρήματος γράφεται ισοδύναμα

$$d_u(f,P) \leq \epsilon.$$

Παίρνοντας $\epsilon = 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ και τα αντίστοιχα $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$, έχουμε $d_u(f,P_n) \leq \frac{1}{n} \to 0$. Άρα, μία ισοδύναμη διατύπωση του θεωρήματος του Weierstrass είναι η παρακάτω.

Θεώρημα 2.5 ***Weierstrass***. *Αν η $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$,* *υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων* (P_n) *ώστε*

$$P_n \xrightarrow{\text{ομ}} f \quad \text{στο } [a,b].$$

Υπάρχουν πολλές αποδείξεις αυτού του θεωρήματος. Η απόδειξη που θα παρουσιαστεί εδώ είναι του S. Bernstein.

Απόδειξη: 1. Μελετάμε πρώτα την περίπτωση του διαστήματος $[0,1]$.

Έστω $f:[0,1]\to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[0,1]$. Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f\Big(\frac{k}{n}\Big)x^k(1-x)^{n-k}.$$

Θα δείξουμε ότι για δεδομένο $\epsilon>0$, αν πάρουμε το $n=n(\epsilon)$ αρκετά μεγάλο, το B_n είναι το ζητούμενο P, δηλαδή

$$|B_n(x)-f(x)|\le \epsilon\,, \qquad x\in[0,1].$$

Λόγω του Λήμματος 2.1(1),

$$f(x)=f(x)\cdot 1=f(x)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f(x)x^k(1-x)^{n-k}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη,

$$B_n(x)-f(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Big(f\Big(\frac{k}{n}\Big)-f(x)\Big)x^k(1-x)^{n-k}\ .$$

Κρατάμε σταθερό το n και το $x\in[0,1]$ και αφήνουμε τον ακέραιο k να παίρνει τις τιμές $0,1,2,\dots,n$, οπότε ο λόγος $\frac{k}{n}$ παίρνει τις τιμές $0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,\frac{n-1}{n},1$. Για κάποιες τιμές του k ο λόγος $\frac{k}{n}$ περιέχεται στο διάστημα $\big[x-\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\,,x+\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\big]$, δηλαδή $\big|x-\frac{k}{n}\big|\le\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$, και για τις υπόλοιπες τιμές του k ο λόγος $\frac{k}{n}$ είναι εκτός αυτού του διαστήματος, δηλαδή $\big|x-\frac{k}{n}\big|>\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$. Χωρίζουμε, λοιπόν, το άθροισμα $\sum_{k=0}^{n}$ σε δύο αθροίσματα: $\sum'$ και $\sum''$. Στο $\sum'$ αθροίζουμε μόνο τους όρους οι οποίοι αντιστοιχούν στα k που ικανοποιούν την $\big|x-\frac{k}{n}\big|\le\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ και στο $\sum''$ αθροίζουμε τους υπόλοιπους όρους, δηλαδή, αυτούς οι οποίοι αντιστοιχούν στα k που ικανοποιούν την $\big|x-\frac{k}{n}\big|>\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$. Συμβολίζουμε

$$\epsilon_n=\max_{|x-y|\le\frac{1}{\sqrt[4]{n}}}|f(x)-f(y)|.$$

Τότε για τα k του πρώτου αθροίσματος $\sum'$ ισχύει $\big|f\big(\frac{k}{n}\big)-f(x)\big|\le\epsilon_n$. Άρα,

$$\Big|\sum{}'\binom{n}{k}\Big(f\Big(\frac{k}{n}\Big)-f(x)\Big)x^k(1-x)^{n-k}\Big|\le\sum{}'\binom{n}{k}\Big|f\Big(\frac{k}{n}\Big)-f(x)\Big|x^k(1-x)^{n-k}$$

$$\le\epsilon_n\sum{}'\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\le\epsilon_n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\epsilon_n\ .$$

Αφού η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, έχει κάποιο άνω φράγμα M. Επομένως, $\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right| \le \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| + |f(x)| \le 2M$. Έχουμε, λοιπόν,

$$\Big|\sum{}''\binom{n}{k}\Big(f\Big(\frac{k}{n}\Big)-f(x)\Big)x^k(1-x)^{n-k}\Big| \le \sum{}''\binom{n}{k}2Mx^k(1-x)^{n-k}$$

$$= 2M\sum{}''\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = 2M\sum{}''\frac{(\frac{k}{n}-x)^2}{(\frac{k}{n}-x)^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$\le 2M\sum{}''\frac{(\frac{k}{n}-x)^2}{(\frac{1}{\sqrt[4]{n}})^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$= 2M\sqrt{n}\sum{}''\Big(\frac{k}{n}-x\Big)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$\le 2M\sqrt{n}\sum_{k=0}^{n}\Big(\frac{k}{n}-x\Big)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$= 2M\sqrt{n}\sum_{k=0}^{n}\Big(\frac{k^2}{n^2}-2\frac{k}{n}x+x^2\Big)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$= 2M\sqrt{n}\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} - \frac{2x}{n}\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$+x^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\Big)$$

$$= 2M\sqrt{n}\Big(\frac{1}{n^2}\big((n^2-n)x^2+nx\big)-\frac{2x}{n}nx+x^2\Big)$$

$$= \frac{2Mx(1-x)}{\sqrt{n}} \le \frac{M}{2\sqrt{n}}\ .$$

Έχουμε, λοιπόν, μέχρι τώρα αποδείξει ότι

$$|B_n(x)-f(x)| = \Big|\sum{}' + \sum{}''\Big| \le \Big|\sum{}'\Big| + \Big|\sum{}''\Big| \le \epsilon_n + \frac{M}{2\sqrt{n}}\ .$$

Έστω, λοιπόν, $\epsilon>0$. Αφού η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, είναι και ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1]$. Άρα, υπάρχει $\delta>0$ ώστε: $x,y\in[a,b], |x-y|\le\delta \ \Rightarrow |f(x)-f(y)|\le\frac{\epsilon}{2}$. Διαλέγουμε n ώστε $\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\le\delta$ και $\frac{M}{2\sqrt{n}}\le\frac{\epsilon}{2}$, οπότε $\epsilon_n\le\frac{\epsilon}{2}$. Άρα,

$$|B_n(x)-f(x)| \le \epsilon_n + \frac{M}{2\sqrt{n}} \le \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon\,, \qquad x\in[0,1].$$

2. Θεωρούμε, τώρα, τη γενική περίπτωση διαστήματος $[a,b]$.

Έστω συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\phi:[0,1]\to[a,b]$ με τύπο

$$x=\phi(t)=(b-a)t+a\,, \qquad t\in[0,1].$$

Η ϕ είναι ένα-προς-ένα και επί και, επομένως, υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $\psi : [a,b] \to [0,1]$. Ο τύπος της ψ είναι

$$t = \psi(x) = \frac{x}{b-a} - \frac{a}{b-a}\,, \qquad x \in [a,b].$$

Κατόπιν, θεωρούμε τη σύνθεση $g = f \circ \phi : [0,1] \to \mathbf{R}$ με τύπο $g(t) = f\big(\phi(t)\big) = f\big((b-a)t + a\big)$ για κάθε $t \in [0,1]$. Επειδή η g είναι σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, είναι συνεχής στο $[0,1]$. Από το πρώτο μέρος της απόδειξης συνεπάγεται ότι υπάρχει πολυώνυμο $Q(t)$ ώστε

$$|g(t) - Q(t)| \le \epsilon\,, \qquad t \in [0,1].$$

Τώρα, θεωρούμε τη σύνθεση $P = Q \circ \psi : [a,b] \to \mathbf{R}$ με τύπο $P(x) = Q\big(\psi(x)\big) = Q\big(\frac{x}{b-a} - \frac{a}{b-a}\big)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Επειδή το Q είναι πολυώνυμο, το P είναι και αυτό πολυώνυμο και, μάλιστα, ίδιου βαθμού με το Q. Παρατηρούμε ότι από την $g = f \circ \phi$ συνεπάγεται η $f = g \circ \psi$. Τέλος,

$$|f(x) - P(x)| = \big|g\big(\psi(x)\big) - Q\big(\psi(x)\big)\big| \le \epsilon\,, \qquad x \in [a,b]. \qquad \text{Ο.Ε.Δ.}$$

Παράδειγμα:
Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \sqrt{x}$ για κάθε $x \in [0,1]$ και $\epsilon = 10^{-4}$. Θα ακολουθήσουμε τον αλγόριθμο που περιγράφεται στο πρώτο μέρος της απόδειξης του Θεωρήματος του Weierstrass για να βρούμε πολυώνυμο P ώστε να ισχύει $|\sqrt{x} - P(x)| \le 10^{-4}$ για κάθε $x \in [0,1]$.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι, αν πάρουμε $\delta = \frac{\epsilon^2}{4} = \frac{1}{4}10^{-8}$, τότε: $|x-y| \le \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \le \frac{\epsilon}{2} = \frac{1}{2}10^{-4}$. Προφανώς, $0 \le \sqrt{x} \le 1$ για κάθε $x \in [0,1]$, οπότε $M = 1$. Άρα, χρειαζόμαστε $\frac{1}{\sqrt[4]{n}} \le \frac{1}{4}10^{-8}$ και $\frac{1}{2\sqrt{n}} \le \frac{1}{2}10^{-4}$ ή, ισοδύναμα, $n \ge 4^4 10^{32}$. Με $n = 4^4 10^{32}$ έχουμε το ζητούμενο πολυώνυμο:

$$B_{4^4 10^{32}}(x) = \sum_{k=0}^{4^4 10^{32}} \binom{4^4 10^{32}}{k} \sqrt{\frac{k}{4^4 10^{32}}}\; x^k (1-x)^{4^4 10^{32} - k}\,.$$

Το πολυώνυμο αυτό είναι βαθμού $4^4 10^{32}$.

Άσκηση 22: 1. Βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ ώστε $\big||x| - P(x)\big| \le \frac{1}{1000}$ για κάθε $x \in [-100, 100]$.
2. Επίσης, βρείτε πολυώνυμο $Q(x)$ ώστε $Q(0) = 0$ και $|\sin x - Q(x)| \le \frac{1}{100}$ για κάθε $x \in [-100, 100]$.

Άσκηση 23: Θεωρούμε $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ συνεχή στο $[0,1]$ με την ιδιότητα: $\int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0$ για κάθε $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Αποδείξτε ότι $f = \mathbf{0}$, δηλαδή, $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. (Υπόδειξη: Υπάρχει πολυώνυμο $P(x)$ ώστε $|f(x) - P(x)| \le \epsilon$ για κάθε $x \in [0,1]$. Βάσει της υπόθεσης, $\int_0^1 f(x)P(x)\,dx = 0$. Συνεπάγεται $0 \le \int_0^1 f^2(x)\,dx = \int_0^1 f(x)P(x)\,dx + \int_0^1 f(x)\big(f(x) - P(x)\big)\,dx = \int_0^1 f(x)\big(f(x) - P(x)\big)\,dx \le \int_0^1 |f(x)||f(x) - P(x)|\,dx \le \epsilon \int_0^1 |f(x)|\,dx$. Επειδή το

ϵ είναι τυχόν, $\int_0^1 f^2(x)\,dx = 0$.)

Άσκηση 24: Έστω $f : [1,+\infty) \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[1,+\infty)$ και έστω ότι το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός. Αποδείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει συνάρτηση της μορφής $Q(x) =$ πολυώνυμο του $\frac{1}{x}$ ώστε $|f(x) - Q(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $x \geq 1$. (Υπόδειξη: Θέσατε $l = \lim_{x\to+\infty} f(x)$. Θεωρήστε την $\phi : (0,1] \to [1,+\infty)$ με τύπο $x = \phi(t) = \frac{1}{t}$ και την αντίστροφη $\psi : [1,+\infty) \to (0,1]$ με τύπο $t = \psi(x) = \frac{1}{x}$. Έστω $g = f \circ \phi : (0,1] \to \mathbf{R}$. Η g είναι συνεχής στο $(0,1]$ και, αφού ορίσετε $g(0) = l$, αποδείξτε ότι η g είναι συνεχής στο $[0,1]$. Εφαρμόστε το Θεώρημα του Weierstrass στην g.)

Άσκηση 25: Έστω $f : [0,+\infty) \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[0,+\infty)$ και έστω ότι το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός. Αποδείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει συνάρτηση της μορφής $Q(x) =$ πολυώνυμο του e^{-x} ώστε $|f(x) - Q(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $x \geq 0$. (Υπόδειξη: Προσαρμόστε την υπόδειξη της προηγούμενης άσκησης παίρνοντας $\phi : (0,1] \to [0,+\infty)$ με τύπο $x = \phi(t) = \log\frac{1}{t}$.)

Κεφάλαιο 3

Σειρές Συναρτήσεων.

3.1 Γενικά.

Ορισμός 3.1 *Έστω ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων (f_n) ορισμένων σε μη κενό σύνολο A. Δηλαδή, $f_n : A \to \mathbf{R}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Θεωρούμε το άθροισμα s_n των αρχικών n από αυτές:*

$$s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n : A \to \mathbf{R}.$$

Δηλαδή, $s_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x)$ για κάθε $x \in A$.

Αν υπάρχει συνάρτηση $s : A \to \mathbf{R}$ ώστε $s_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} s$ στο A, λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ ***συγκλίνει κατά σημείο στην*** *s* ***στο*** *A και γράφουμε*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k \overset{\kappa.\sigma.}{=} s \quad \text{στο } A.$$

Αν $s_n \xrightarrow{o\mu} s$ στο A, λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ ***συγκλίνει ομοιόμορφα στην*** *s* ***στο*** *A και γράφουμε*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k \overset{o\mu}{=} s \quad \text{στο } A.$$

*Το s_n ονομάζεται n-**οστό μερικό άθροισμα** των f_n $(n \in \mathbf{N})$. Η συνάρτηση s ονομάζεται **κατά σημείο άθροισμα** ή **ομοιόμορφο άθροισμα**, αντιστοίχως, της σειράς $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ στο A.*

Όπως και για τις σειρές αριθμών, υπάρχουν εναλλακτικοί συμβολισμοί ή και παραλλαγές των προηγούμενων συμβολισμών: $s \overset{\kappa.\sigma.}{=} f_1 + f_2 + \cdots$ ή $s \overset{\kappa.\sigma.}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ ή $s \overset{o\mu}{=} \sum_{k=n_0}^{+\infty} f_k$ κλπ.

Παρατήρηση: Η ισότητα $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k \overset{\kappa.\sigma.}{=} s$ στο A ισοδυναμεί με το ότι για κάθε

$x \in A$ ισχύει $s_n(x) \to s(x)$ και αυτό ισοδυναμεί με το ότι για κάθε $x \in A$ η σειρά αριθμών $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$ συγκλίνει στον αριθμό $s(x)$. Δηλαδή,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k \overset{\kappa.\sigma.}{=} s \quad \text{στο } A \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) = s(x)\,, \qquad x \in A.$$

Άσκηση 1: Αποδείξτε ότι η $\sum_{k=0}^{+\infty}(1-x)x^k$ συγκλίνει κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, σε κάποια συνάρτηση στο $(-1,1]$. Ποια είναι αυτή η συνάρτηση; (Υπόδειξη: Βρείτε τα μερικά αθροίσματα.)

Επομένως, η σύγκλιση σειρών συναρτήσεων ανάγεται σε σύγκλιση ακολουθιών συναρτήσεων.

Πρόταση 3.1 *Αν* $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k \overset{o\mu}{=} s$ *στο* A, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \overset{\kappa.\sigma.}{=} s$ *στο* A.

Απόδειξη: Θεωρούμε τα $s_n = f_1 + \cdots + f_n$, οπότε η απόδειξη είναι άμεση εφαρμογή της Πρότασης 2.2 στην (s_n). Ο.Ε.Δ.

Παράδειγμα:
Η γνωστή μας γεωμετρική σειρά: $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$.

Γνωρίζουμε ότι στο διάστημα $(-1,1)$ η σειρά συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση με τύπο $s(x) = \frac{1}{1-x}$. Δηλαδή, $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k \overset{\kappa.\sigma.}{=} \frac{1}{1-x}$ στο $(-1,1)$.

Ας δούμε αν η σύγκλιση της σειράς είναι ομοιόμορφη στο $(-1,1)$. Αν $x \in (-1,1)$, έχουμε $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, οπότε $s_n(x) - s(x) = -\frac{x^{n+1}}{1-x}$. Αν $s_n \xrightarrow{o\mu} s$ στο $(-1,1)$, θα πρέπει για κάθε $\epsilon > 0$ να υπάρχει $n_0 = n_0(\epsilon)$ ώστε $\frac{|x|^{n+1}}{|1-x|} = |s_n(x) - s(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε $x \in (-1,1)$. Αυτό, όμως, είναι αδύνατο, διότι για οποιοδήποτε n έχουμε $\lim_{x\to 1-} \frac{|x|^{n+1}}{|1-x|} = +\infty$. Επομένως, η σύγκλιση της σειράς δεν είναι ομοιόμορφη.

Πρόταση 3.2 *Αν* $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k \overset{o\mu}{=} s$, $\sum_{k=1}^{+\infty} g_k \overset{o\mu}{=} s$ *στο* A *και* $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(\lambda f_k + \mu g_k) \overset{o\mu}{=} \lambda s + \mu t \text{ στο } A.$$

Το ίδιο ισχύει για την κατά σημείο σύγκλιση.

Απόδειξη: Παίρνοντας $s_n = f_1 + \cdots + f_n$, εφαρμόζουμε τις Προτάσεις 2.1.1 και 2.3.1 στην (s_n). Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 3.3 ***Κριτήριο Cauchy.*** *Η* $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στο* A *(σε κάποια συνάρτηση) αν και μόνον αν για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbf{N}$ *ώστε:* $n_0 \leq m < n \ \Rightarrow\ |f_{m+1}(x) + \cdots + f_n(x)| \leq \epsilon$ *για κάθε* $x \in A$.

Απόδειξη: Θεωρούμε τα $s_n = f_1 + \cdots + f_n$, οπότε η απόδειξη είναι άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος 2.1 στην (s_n). Ο.Ε.Δ.

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι ένα *εξαιρετικά χρήσιμο* κριτήριο για ομοιόμορφη σύγκλιση σειρών συναρτήσεων.

Θεώρημα 3.1 ***Κριτήριο Weierstrass.*** *Έστω $f_n : A \to \mathbf{R}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και $|f_n(x)| \leq M_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και κάθε $x \in A$. Δηλαδή, το M_n είναι άνω φράγμα της $|f_n|$. Αν η σειρά αριθμών $\sum_{k=1}^{+\infty} M_k$ συγκλίνει, η $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ συγκλίνει (σε κάποια συνάρτηση) ομοιόμορφα στο A.*

Απόδειξη: Για κάθε $x \in A$ ισχύει $|f_n(x)| \leq M_n$, οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.3, η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$ συγκλίνει (και, μάλιστα, απολύτως) σε κάποιον αριθμό, τον οποίο ονομάζουμε $s(x)$. Έτσι ορίζεται συνάρτηση $s : A \to \mathbf{R}$ και έχουμε $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k \overset{\kappa.\sigma.}{=} s$ στο A. Τώρα, αν $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$,

$$|s(x) - s_n(x)| = \Big|\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\Big| = \Big|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\Big|$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} M_k$$

για κάθε $x \in A$. Άρα,

$$d_u(s, s_n) = \sup_{x \in A} |s(x) - s_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} M_k \to 0$$

καθώς $n \to +\infty$, αφού η $\sum_{k=1}^{+\infty} M_k$ συγκλίνει. Άρα, $s_n \xrightarrow{\text{ομ}} s$ στο A και, επομένως, $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k \overset{\text{ομ}}{=} s$ στο A. Ο.Ε.Δ.

Παραδείγματα:

1. Η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}$.

   Επειδή $\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ για κάθε $x \in [-1, 1]$ και επειδή η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση στο $[-1, 1]$.

2. Η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$.

   Επειδή $\left|\frac{\sin(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$ και επειδή η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση στο $\mathbf{R}$.

Άσκηση 2: Έστω ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως. Αποδείξτε ότι οι σειρές $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin(kx)$ και $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kx)$ συγκλίνουν ομοιόμορφα (σε κάποιες συναρτήσεις) στο $\mathbf{R}$.

Άσκηση 3: Έστω $\rho > \frac{1}{2}$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{k^\rho(1+kx^2)}$ συγκλίνει ομοιόμορφα (σε κάποια συνάρτηση) στο $\mathbf{R}$. (Υπόδειξη: Υπολογίστε το $M_n = \max_{x \in \mathbf{R}} \left|\frac{x}{n^\rho(1+nx^2)}\right|$.)

Άσκηση 4: Έστω $a > 0$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^2+k}{k^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα (σε κάποια συνάρτηση) στο $[-a, a]$. (Υπόδειξη: Χωρίστε τη σειρά σε δύο σειρές και για τη μία εφαρμόστε το κριτήριο Weierstrass.) Επίσης, αποδείξτε ότι η σειρά δε συγκλίνει απολύτως για καμία τιμή του x.

Άσκηση 5: Έστω $a>0$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\sin\left(1+\frac{x}{k}\right)$ συγκλίνει ομοιόμορφα (σε κάποια συνάρτηση) στο $[-a,a]$. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε ότι $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$, $|\sin x|\leq|x|$ και $0\leq 1-\cos x\leq\frac{x^2}{2}$.)

Άσκηση 6: Έστω $f_n:A\to\mathbf{R}$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$ ώστε $|f_n(x)-f_{n+1}(x)|\leq M_n$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$ και κάθε $x\in A$. Αν η $\sum_{k=1}^{+\infty}M_k$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα (σε κάποια συνάρτηση) στο A.

Θεώρημα 3.2 *Έστω $f_n:A\to\mathbf{R}$ και $g_n:A\to\mathbf{R}$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$ με τις ιδιότητες:*
(i) για κάθε $x\in A$ η $(g_n(x))$ φθίνει προς το 0 και $g_n\xrightarrow{\text{ομ}}\mathbf{0}$ και
(ii) η ακολουθία $(s_n=f_1+\cdots+f_n)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη. Δηλαδή, υπάρχει M ώστε $|f_1(x)+\cdots+f_n(x)|\leq M$ για κάθε $x\in A$ και $n\in\mathbf{N}$.
Τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty}f_kg_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο A.

Απόδειξη: Θα μιμηθούμε την απόδειξη του Θεωρήματος 1.6.

Έστω $\epsilon>0$. Λόγω της (i), υπάρχει $n_0\in\mathbf{N}$ ώστε $\frac{\epsilon}{2M}>g_{n_0}(x)\geq g_{n_0+1}(x)\geq g_{n_0+2}(x)\geq\ldots\geq 0$ για κάθε $x\in A$. Άν $n_0\leq m<n$, τότε, σύμφωνα με το Λήμμα 1.1, έχουμε $|\sum_{k=m}^{n}f_k(x)g_k(x)|=|\sum_{k=m}^{n-1}s_k(x)(g_k(x)-g_{k+1}(x))+s_n(x)g_n(x)-s_{m-1}(x)g_m(x)|\leq\sum_{k=m}^{n-1}|s_k(x)||g_k(x)-g_{k+1}(x)|+|s_n(x)||g_n(x)|+|s_{m-1}(x)||g_m(x)|\leq M\sum_{k=m}^{n-1}(g_k(x)-g_{k+1}(x))+Mg_n(x)+Mg_m(x)=2Mg_m(x)<2M\frac{\epsilon}{2M}=\epsilon$.

Άρα, η $\sum_{k=1}^{+\infty}f_kg_k$ ικανοποιεί το κριτήριο του Cauchy και, επομένως, συγκλίνει ομοιόμορφα στο A. Ο.Ε.Δ.

Παράδειγμα:
Έστω $a>0$ και η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^x}$ στο $[a,+\infty)$.

Αν θεωρήσουμε τα $(-1)^n$ ως σταθερές συναρτήσεις, τα μερικά τους αθροίσματα είναι ομοιόμορφα φραγμένα στο $[a,+\infty)$. Επίσης, η $\left(\frac{1}{n^x}\right)$ φθίνει προς το 0 για κάθε $x\in[a,+\infty)$ και $\frac{1}{n^x}\xrightarrow{\text{ομ}}\mathbf{0}$. Πράγματι, $\sup_{x\in[a,+\infty)}\left|\frac{1}{n^x}\right|=\frac{1}{n^a}\to 0$. Άρα, η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$.

Θεώρημα 3.3 *Έστω $\sum_{k=1}^{+\infty}f_k\overset{\text{ομ}}{=}s$ στο A και $x_0\in A$. Αν όλες οι f_n είναι συνεχείς στο x_0, η s είναι συνεχής στο x_0. Επομένως, αν όλες οι f_n είναι συνεχείς στο A, η s είναι συνεχής στο A.*

Απόδειξη: Αν $s_n=\sum_{k=1}^{n}f_k$, τότε η απόδειξη είναι άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος 2.2 στην (s_n). Ο.Ε.Δ.

Άσκηση 7: Έστω $\rho>1$. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k^\rho}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση, έστω s, στο $[-1,1]$. Είναι η s συνεχής στο $[-1,1]$;

Άσκηση 8: Έστω $\rho>1$. Αποδείξτε ότι οι σειρές $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin(kx)}{k^\rho}$ και $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(kx)}{k^\rho}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα σε κάποιες συναρτήσεις στο $\mathbf{R}$. Είναι οι συναρτήσεις αυτές συνεχείς στο $\mathbf{R}$;

Άσκηση 9: Έστω η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{1+k^2x}$.

1. Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει για κάθε $x > 0$ και ότι αποκλίνει για $x = 0$. (Υπόδειξη: Σύγκριση με την $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.)
2. Αν $a > 0$, αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα (σε κάποια συνάρτηση) στο $[a, +\infty)$. (Υπόδειξη: Κριτήριο Weierstrass.)
3. Η σειρά ορίζει συνάρτηση $s : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ με τύπο $s(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1+k^2x}$. Είναι η s συνεχής στο πεδίο ορισμού της; (Υπόδειξη: Πάρτε τυχόν $x \in (0, +\infty)$. Κατόπιν, πάρτε a ώστε $0 < a < x$. Συμπεράνατε από το 2 ότι η s είναι συνεχής στο $[a, +\infty)$. Επειδή το x είναι εσωτερικό σημείο του $[a, +\infty)$, η s είναι συνεχής στο x και από τις δύο πλευρές του. Επειδή το x είναι τυχόν, η s είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.) Είναι η s φραγμένη; (Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι $s\big(\frac{1}{n^2}\big) \geq \frac{n}{2}$.)
4. Συγκλίνει η σειρά ομοιόμορφα στην s στο $(0, +\infty)$;

Άσκηση 10: Έστω η συνάρτηση $I : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ με τύπο $I(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \leq 0, \\ 1, & \text{αν } x > 0. \end{cases}$
Έστω ακολουθία (x_n) διαφορετικών ανά δύο σημείων του $\mathbf{R}$ και έστω απολύτως συγκλίνουσα σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k I(x - x_k)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbf{R}$ και ότι η συνάρτηση s η οποία ορίζεται από αυτήν τη σειρά είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbf{R}$ εκτός από τα σημεία της (x_n). (Υπόδειξη: Για το πρώτο μέρος χρησιμοποιήστε το κριτήριο Weierstrass και για το δεύτερο μέρος το Θεώρημα 3.2.) Αποδείξτε ότι η s είναι ασυνεχής σε κάθε x_n και ότι σε κάθε τέτοιο σημείο παρουσιάζει «πήδημα» με τιμή c_n. (Υπόδειξη: Γράψτε $s(x) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k I(x - x_k) + c_n I(x - x_n) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} c_k I(x - x_k)$ και παρατηρήστε ότι η $\sum_{k=1}^{n-1} c_k I(x - x_k)$ και η $\sum_{k=n+1}^{+\infty} c_k I(x - x_k)$ είναι συνεχείς στο x_n.)

Άσκηση 11: Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kx-[kx]}{k^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbf{R}$. Αποδείξτε ότι κάθε ρητός είναι σημείο ασυνέχειας της συνάρτησης s η οποία ορίζεται από τη σειρά ενώ κάθε άρρητος είναι σημείο συνέχειας της s.

Θεώρημα 3.4 *Έστω $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k \overset{\text{ομ}}{=} s$ στο $[a, b]$ και ότι όλες οι f_n είναι Riemann ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$. Τότε η s είναι, επίσης, Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $\int_a^b s(x)\, dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^b f_k(x)\, dx$. Δηλαδή,*

$$\int_a^b \Big(\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) \Big)\, dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^b f_k(x)\, dx.$$

Απόδειξη: Αν $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$, η απόδειξη είναι άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος 2.3 στην (s_n). Ο.Ε.Δ.

Άσκηση 12: Αποδείξτε ότι η συνάρτηση s που ορίζεται από την $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kx-[kx]}{k^2}$ της άσκησης 11 είναι Riemann ολοκληρώσιμη σε κάθε φραγμένο διάστημα $[a, b]$.

Θεώρημα 3.5 *Έστω ότι για κάθε $n \in \mathbf{N}$ η $f_n : [a, b] \to \mathbf{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$. Αν*
(i) $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k' \overset{\text{ομ}}{=} g$ στο $[a, b]$ και
(ii) η $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x_0)$ συγκλίνει για τουλάχιστον ένα $x_0 \in [a, b]$,
τότε η $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση s στο $[a, b]$, η s είναι

παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ *και* $s'(x)=g(x)$ *για κάθε* $x\in[a,b]$. *Δηλαδή,*

$$\Big(\sum_{k=1}^{+\infty} f_k\Big)'(x)=\sum_{k=1}^{+\infty} f_k'(x)\,,\qquad x\in[a,b].$$

Απόδειξη: Αν $s_n=\sum_{k=1}^{n} f_k$, η απόδειξη είναι άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος 2.4 στην (s_n). Ο.Ε.Δ.

Άσκηση 13: Έστω $\rho>2$. Αποδείξτε ότι οι $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin(kx)}{k^\rho}$ και $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(kx)}{k^\rho}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα σε κάποιες συναρτήσεις στο $\mathbf{R}$ και ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbf{R}$. Ποιοι είναι οι τύποι των παραγώγων;

Άσκηση 14: Θεωρήστε τη σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^x}$. Γνωρίζουμε ότι η σειρά αυτή συγκλίνει για κάθε $x>1$ και αποκλίνει στο $+\infty$ για κάθε $x\leq 1$. Ορίζουμε τη **ζ-συνάρτηση του Riemann,** $\zeta:(1,+\infty)\to\mathbf{R}$, με τον τύπο:

$$\zeta(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^x}\,,\qquad 1<x<+\infty.$$

1. Αποδείξτε ότι για κάθε $a>1$ η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στη ζ στο $[a,+\infty)$. (Υπόδειξη: Κριτήριο του Weierstrass.) Συμπεράνατε ότι η ζ είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$. (Υπόδειξη: Πάρτε τυχόν $x\in(1,+\infty)$. Κατόπιν, πάρτε a ώστε $1<a<x$ και αποδείξτε ότι η ζ είναι συνεχής στο $[a,+\infty)$. Επειδή το x είναι εσωτερικό σημείο του $[a,+\infty)$, η ζ είναι συνεχής στο x και από τις δύο πλευρές του. Επειδή το x είναι τυχόν, η ζ είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$.)
2. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\log k}{k^x}$ συγκλίνει για κάθε $x>1$ και ότι για κάθε $a>1$ η ίδια σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$.
3. Αποδείξτε ότι η ζ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $(1,+\infty)$ και

$$\zeta'(x)=-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\log k}{k^x}\,,\qquad 1<x<+\infty.$$

(Υπόδειξη: Προσαρμόστε την υπόδειξη του 1.)

3.2 Δυναμοσειρές.

Το επόμενο θεώρημα είναι συμπλήρωμα του Θεωρήματος 1.8.

Θεώρημα 3.6 *Θεωρούμε δυναμοσειρά* $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k$ *και έστω* R *η ακτίνα σύγκλισής της και* (x_0-R,x_0+R) *το διάστημα σύγκλισής της.*

Αν $0<R$ *και το διάστημα* $[a,b]$ *περιέχεται στο* (x_0-R,x_0+R), *δηλαδή,* $x_0-R<a\leq b<x_0+R$, *η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα* $[a,b]$.

Απόδειξη: Θέτουμε $r=\max(|a-x_0|,|b-x_0|)$ και παρατηρούμε ότι $r<R$ και ότι για κάθε $x\in[a,b]$ ισχύει $|x-x_0|\leq r$. Κατόπιν, επιλέγουμε r_1 ώστε $r<r_1<R$. Τότε $\limsup\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{R}<\frac{1}{r_1}$, οπότε υπάρχει $n_0\in\mathbf{N}$ ώστε

$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{r_1}$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα, για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in [a,b]$ έχουμε $|a_n(x-x_0)^n| \leq \frac{|x-x_0|^n}{r_1^n} \leq \left(\frac{r}{r_1}\right)^n$. Επομένως, στο διάστημα $[a,b]$ εφαρμόζεται το κριτήριο του Weierstrass, διότι η σειρά $\sum_{k=n_0}^{+\infty} \left(\frac{r}{r_1}\right)^k$ συγκλίνει. Άρα, η $\sum_{k=n_0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k$ και, επομένως, η $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,b]$. Ο.Ε.Δ.

Παρατήρηση: Το Θεώρημα 3.5 λέει ότι μία δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε *κάθε* διάστημα $[a,b]$ το οποίο περιέχεται «γνησίως» στο διάστημα σύγκλισής της. Δηλαδή, το a μπορεί να είναι όσο κοντά θέλουμε στο $x_0 - R$ και το b όσο κοντά θέλουμε στο $x_0 + R$. Πρέπει, όμως, να τονισθεί με έμφαση ότι το a δεν επιτρέπεται «εν γένει» να είναι $x_0 - R$ ούτε το b να είναι $x_0 + R$. Δηλαδή, η δυναμοσειρά «εν γένει» δε συγκλίνει ομοιόμορφα στο $(x_0 - R, x_0 + R)$. Το παράδειγμα της γεωμετρικής σειράς $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ είναι ενδεικτικό: η σειρά δε συγκλίνει ομοιόμορφα στο $(-1,1)$.

Στις επόμενες προτάσεις θα εξετάσουμε μερικές σημαντικές ιδιότητες της συνάρτησης η οποία ορίζεται από μια δυναμοσειρά στο διάστημα σύγκλισής της.

Πρόταση 3.4 ***Συνέχεια δυναμοσειρών.*** *Έστω δυναμοσειρά* $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k$ *με ακτίνα σύγκλισης* $R > 0$. *Η συνάρτηση* s *που ορίζεται από τη δυναμοσειρά είναι συνεχής στο* $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Απόδειξη: Παίρνουμε τυχόν $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. Κατόπιν, επιλέγουμε οποιαδήποτε a, b ώστε $x_0 - R < a < x < b < x_0 + R$. Η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στην s στο $[a,b]$ και, επειδή κάθε συνάρτηση $a_n(x-x_0)^n$ είναι συνεχής στο $[a,b]$, η s είναι, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2, συνεχής στο $[a,b]$. Τέλος, επειδή το x είναι εσωτερικό σημείο του $[a,b]$, η s είναι συνεχής (και από τις δύο πλευρές) στο x. (Προσέξτε: αν το x ήταν άκρο του $[a,b]$, η s θα ήταν συνεχής στο x μόνο από τη μία πλευρά του.)

Άρα, η s είναι συνεχής σε κάθε $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 3.5 ***Ολοκλήρωση δυναμοσειρών.*** *Έστω* $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k$ *με ακτίνα σύγκλισης* $R > 0$. *Για κάθε* a, b *στο* $(x_0 - R, x_0 + R)$ *ισχύει*

$$\int_a^b \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k\Big)\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1}\big((b-x_0)^{k+1} - (a-x_0)^{k+1}\big).$$

Ειδικότερα, αν $a = x_0$ *και* $b = x$,

$$\int_{x_0}^x \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(t-x_0)^k\Big)\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}.$$

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $a < b$, οπότε $x_0 - R < a < b < x_0 + R$. Αν s είναι η συνάρτηση που ορίζεται από την δυναμοσειρά στο $(x_0 - R, x_0 + R)$, η δυναμοσειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[a,b]$, οπότε το συμπέρασμα είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 3.3. Ο.Ε.Δ.

Άσκηση 15: Αποδείξτε ότι $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ για κάθε $x \in (-1,1)$. (Υπόδειξη: Γράψτε το $\frac{1}{1+x^2}$ ως γεωμετρική σειρά.)

Πρόταση 3.6 ***Παραγώγιση δυναμοσειρών.*** *Έστω $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k$ με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$. Η συνάρτηση s που ορίζεται από τη δυναμοσειρά είναι παραγωγίσιμη στο $(x_0 - R, x_0 + R)$ και*

$$s'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}\,, \qquad x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}\,, \qquad x \in (x_0 - R, x_0 + R)\,.$$

Η δυναμοσειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k(x-x_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)a_{k+1}(x-x_0)^k$ έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης με την $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k$.

Απόδειξη: Θεωρούμε τις $\frac{d}{dx}a_n(x-x_0)^n = n a_n(x-x_0)^{n-1}$ $(n \geq 1)$ και τη σειρά τους, $\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k(x-x_0)^{k-1}$. Η σειρά αυτή και η $\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k(x-x_0)^k$ συγκλίνουν για τα ίδια ακριβώς x και, επομένως, έχουν το ίδιο διάστημα σύγκλισης και την ίδια ακτίνα σύγκλισης. Η ακτίνα σύγκλισης της δεύτερης δυναμοσειράς είναι

$$\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|n a_n|}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{n} \cdot \limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = R.$$

Άρα, η δυναμοσειρά των παραγώγων, $\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k(x-x_0)^{k-1}$, έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης R και το ίδιο διάστημα σύγκλισης $(x_0 - R, x_0 + R)$ με την αρχική δυναμοσειρά.

Έστω, τώρα, τυχόν $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. Διαλέγουμε οποιαδήποτε a, b ώστε $x_0 - R < a < x < b < x_0 + R$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.5, η δυναμοσειρά των παραγώγων συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,b]$ στη συνάρτηση g με τύπο $g(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k(t-x_0)^{k-1}$ για κάθε $t \in [a,b]$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.4, η s είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και $s'(t) = g(t)$ για κάθε $t \in [a,b]$. Επειδή το x είναι εσωτερικό σημείο του $[a,b]$, η s είναι παραγωγίσιμη στο x (και από τις δύο πλευρές του) και $s'(x) = g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k(x-x_0)^{k-1}$. Ο.Ε.Δ.

Άσκηση 16: Έστω $R > 0$ η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k$ και s η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο $(x_0 - R, x_0 + R)$. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbf{N}$

$$s^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)a_k(x-x_0)^{k-n} = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+n)\cdots(k+1)a_{k+n}x^k$$

για κάθε $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ και

$$s^{(n)}(x_0) = n!a_n\,.$$

Παραδείγματα:
1. **Η γεωμετρική σειρά:** $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$.

Γνωρίζουμε ήδη ότι η συνάρτηση που ορίζεται από τη γεωμετρική σειρά στο $(-1,1)$ έχει τύπο $\frac{1}{1-x}$. Η συνάρτηση αυτή είναι, προφανώς, συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και αυτό επιβεβαιώνει τις Προτάσεις 3.4 και 3.6.

Παραγωγίζοντας, σύμφωνα με την Πρόταση 3.6, έχουμε

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)x^k \,, \qquad -1 < x < 1.$$

Θυμηθείτε ότι έχουμε ήδη αποδείξει τον ίδιο τύπο, χρησιμοποιώντας το γινόμενο Cauchy σειρών. Επαναλαμβάνουμε την παραγώγιση όσες φορές θέλουμε, διατηρώντας το ίδιο κάθε φορά διάστημα σύγκλισης:

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+2)(k+1)x^k \,,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{n!}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k-n} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+n)(k+n-1)\cdots(k+1)x^k \,,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

για κάθε $x \in (-1,1)$.

Ολοκληρώνοντας τη γεωμετρική σειρά σύμφωνα με την Πρόταση 3.5, έχουμε $-\log(1-x) = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$ για κάθε $x \in (-1,1)$. Μετατρέποντας το x σε $-x$, βρίσκουμε $-\log(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k}$ για κάθε $x \in (-1,1)$. Τέλος, μετατρέποντας το $1+x$ σε x, αποδεικνύουμε ότι

$$\log x = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{(x-1)^k}{k} \,, \qquad 0 < x < 2.$$

Η ισότητα αυτή έχει ήδη αποδειχθεί και μάλιστα και για το σημείο $x=2$. Με τη μέθοδο της ολοκλήρωσης της γεωμετρικής σειράς δε μπορούμε να έχουμε την ισότητα και για το $x=2$, διότι χρειαζόμαστε την ομοιόμορφη σύγκλιση της γεωμετρικής σειράς στο διάστημα $[0,2]$ η οποία δεν ισχύει, αφού ούτε η σύγκλιση στο $x=2$ ισχύει.

2. **Η εκθετική σειρά:** $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Γνωρίζουμε ήδη ότι η συνάρτηση που ορίζεται από την εκθετική δυναμοσειρά είναι η εκθετική συνάρτηση με τύπο e^x στο διάστημα σύγκλισης $(-\infty,+\infty)$. Δηλαδή, $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Η εκθετική συνάρτηση είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και επαληθεύονται οι Προτάσεις 3.4 και 3.6. Παραγωγίζοντας, βρίσκουμε $\frac{d}{dx}e^x = \sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ και, επομένως, $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Επαληθεύουμε έτσι μία γνωστή ιδιότητα της εκθετικής συνάρτησης. Βέβαια, ο προσεκτικός αναγνώστης θα παρατηρήσει ότι η ιδιότητα $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη της ισότητας $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}$ στην Πρόταση 1.11 και, επομένως, *δε* μπορούμε να ισχυριστούμε ότι αποδείξαμε την $\frac{d}{dx}e^x = e^x$, παραγωγίζοντας την δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}$. Μπορούμε, όμως, να αποδείξουμε με έναν ακόμη τρόπο την ισότητα

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\,, \qquad x\in\mathbf{R}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση s που ορίζεται από την εκθετική δυναμοσειρά με τύπο $s(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$, η οποία είναι, σύμφωνα με τις Προτάσεις 3.4 και 3.6, συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$. Παραγωγίζοντας σύμφωνα με την Πρόταση 3.6, έχουμε, όπως προηγουμένως, $s'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}k\frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!} = s(x)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$. Συνεπάγεται $\frac{d}{dx}\big(s(x)e^{-x}\big) = s'(x)e^{-x} - s(x)e^{-x} = 0$ και, επομένως, η συνάρτηση με τύπο $s(x)e^{-x}$ είναι σταθερή στο $\mathbf{R}$. Άρα, $s(x)e^{-x} = s(0)e^{-0} = 1$ ή, ισοδύναμα, $s(x) = e^x$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

3. **Η λογαριθμική σειρά:** $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{(x-1)^k}{k}$.

Έχουμε αποδείξει ότι το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς αυτής είναι το $(0,2)$ και ότι $\log x = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{(x-1)^k}{k}$ για κάθε $x\in(0,2)$. Την ισότητα αυτή την έχουμε αποδείξει ήδη δύο φορές. Η λογαριθμική συνάρτηση είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ και έτσι επαληθεύονται οι Προτάσεις 3.4 και 3.6. Επίσης, επαληθεύεται η γνωστή ιδιότητα: $\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x}$ για κάθε $x\in(0,2)$. Πράγματι, παραγωγίζοντας τη δυναμοσειρά, έχουμε $\frac{d}{dx}\log x = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}k\frac{(x-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=0}^{+\infty}(1-x)^k = \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x}$ για κάθε $x\in(0,2)$. Μπορούμε, όμως, να αποδείξουμε με έναν ακόμη τρόπο την ισότητα

$$\log x = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{(x-1)^k}{k}\,, \qquad 0<x<2.$$

Αν s είναι η συνάρτηση που ορίζεται από τη σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{(x-1)^k}{k}$ στο $(0,2)$, από τις Προτάσεις 3.4 και 3.6 συνεπάγεται ότι η s είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$. Παραγωγίζοντας, έχουμε $s'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}k\frac{(x-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=0}^{+\infty}(1-x)^k = \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x}$ για κάθε $x\in(0,2)$. Επομένως, $\frac{d}{dx}(s(x)-\log x) = \frac{1}{x}-\frac{1}{x} = 0$ για κάθε $x\in(0,2)$, οπότε η συνάρτηση με τύπο $s(x)-\log x$ είναι σταθερή στο $(0,2)$. Άρα $s(x)-\log x = s(1)-\log 1 = 0$ ή, ισοδύναμα, $s(x) = \log x$ για κάθε $x\in(0,2)$.

Άσκηση 17: Έστω $a\in\mathbf{R}$. Θεωρούμε τη σειρά

$$1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}\,x^k\,.$$

1. Αν $a\in\{0,1,2,3,\ldots\}$, αποδείξτε ότι η σειρά γίνεται πολυώνυμο και, μάλιστα, είναι ίση με $(1+x)^a$.

Στο εξής υποθέτουμε ότι $a \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
2. Αποδείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης της σειράς είναι ίση με 1. (Υπόδειξη: Αν δυσκολευτείτε με τον τύπο ορισμού της ακτίνας σύγκλισης, χρησιμοποιήστε το κριτήριο λόγου για να αποδείξετε ότι η σειρά συγκλίνει, αν $|x| < 1$, και αποκλίνει, αν $|x| > 1$.)
3. Έστω s η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο $(-1, 1)$. Αποδείξτε ότι $(1 + x)s'(x) = a \cdot s(x)$ για κάθε $x \in (-1, 1)$.
4. Αποδείξτε ότι $s(x) = (1+x)^a$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. (Υπόδειξη: $\frac{d}{dx} \frac{s(x)}{(1+x)^a} = 0$.)
Έτσι παίρνουμε τον **γενικό διωνυμικό τύπο του Newton**:

$$(1 + x)^a = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!} \, x^k \,, \qquad -1 < x < 1.$$

Άσκηση 18: Αποδείξτε ότι $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = x + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2^k k!(2k+1)}\, x^{2k+1}$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον γενικό διωνυμικό τύπο του Newton με $a = -\frac{1}{2}$ και το $-x^2$ στη θέση του x.)

3.3 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Γνωρίζουμε ότι οι δυναμοσειρές $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ και $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ έχουν ως διάστημα σύγκλισης το $(-\infty, +\infty)$ και έχουμε ήδη συμβολίσει τις συναρτήσεις που ορίζονται από τις σειρές αυτές cos και sin, αντιστοίχως:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \,, \qquad \sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \,.$$

Στην ενότητα αυτή όχι μόνο θα δούμε εναλλακτικές αποδείξεις των ιδιοτήτων των sin και cos, τις οποίες έχουμε ήδη αποδείξει στις ενότητες 1.6 και 1.7, αλλά θα αποδείξουμε και άλλες σημαντικές ιδιότητές τους.

Από τις Προτάσεις 3.4 και 3.6 συνεπάγεται ότι οι συναρτήσεις cos και sin είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες στο $\mathbf{R}$. Παραγωγίζοντας τις δυναμοσειρές, βρίσκουμε

$$\frac{d}{dx} \cos x = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k 2k \frac{x^{2k-1}}{(2k)!} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = -\sin x \,, \qquad x \in \mathbf{R},$$

$$\frac{d}{dx} \sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (2k+1) \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x \,, \qquad x \in \mathbf{R},$$

αποδεικνύοντας με δεύτερο τρόπο το πέμπτο αποτέλεσμα της Πρότασης 1.13.

Τώρα, $\frac{d}{dx}(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2 \sin x \sin' x + 2 \cos x \cos' x = 2 \sin x \cos x - 2 \cos x \sin x = 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Άρα η συνάρτηση με τύπο $\sin^2 x + \cos^2 x$ είναι σταθερή στο $\mathbf{R}$ και, επομένως, $\sin^2 x + \cos^2 x = \sin^2 0 + \cos^2(0) = 1$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Δηλαδή,

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \,, \qquad x \in \mathbf{R}$$

και, επομένως,
$$|\sin x| \leq 1\,, \qquad |\cos x| \leq 1\,, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Μπορούμε, επίσης, να αποδείξουμε τις ισότητες
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y\ , \qquad \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$. Τις σχέσεις αυτές τις έχουμε ήδη αποδείξει με ιδιαιτέρως περίπλοκο τρόπο στην Πρόταση 1.13, χρησιμοποιώντας γινόμενα Cauchy σειρών. Ένας δεύτερος τρόπος είναι ο εξής. Παίρνουμε οποιοδήποτε $y \in \mathbf{R}$ και τότε $\frac{d}{dx}\big(\cos(y-x)\cos x - \sin(y-x)\sin x\big) = \sin(y-x)\cos x - \cos(y-x)\sin x + \cos(y-x)\sin x - \sin(y-x)\cos x = 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Άρα η συνάρτηση με τύπο $\cos(y-x)\cos x - \sin(y-x)\sin x$ είναι σταθερή στο $\mathbf{R}$ και, επομένως, $\cos(y-x)\cos x - \sin(y-x)\sin x = \cos(y-0)\cos 0 - \sin(y-0)\sin 0 = \cos y$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Κατόπιν, μετατρέπουμε το y σε $y+x$ και καταλήγουμε στην $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$. Η δεύτερη ισότητα αποδεικνύεται είτε με παρόμοιο τρόπο είτε παραγωγίζοντας την πρώτη ισότητα ως προς το x.

Θα αποδείξουμε, τώρα, μερικές επιπλέον ιδιότητες των συναρτήσεων cos και sin.

Πρόταση 3.7 *Υπάρχει ελάχιστη θετική λύση της εξίσωσης* $\cos x = 0$.

Απόδειξη: Η ισότητα $\cos 0 = 1$ είναι προφανής. Θα δούμε, τώρα, ότι $\cos 3 < 0$. Πράγματι, $\cos 3 = 1 - \frac{3^2}{2!} + \frac{3^4}{4!} - \big(\frac{3^6}{6!} - \frac{3^8}{8!}\big) - \cdots = -\frac{1}{8} - \big(\frac{3^6}{6!} - \frac{3^8}{8!}\big) - \cdots < -\frac{1}{8} < 0$ διότι όλες οι διαφορές $\frac{3^6}{6!} - \frac{3^8}{8!}\,,\ \frac{3^{10}}{10!} - \frac{3^{12}}{12!}\,, \ldots$ είναι θετικές. Επειδή η cos είναι συνεχής και $\cos 0 > 0$, $\cos 3 < 0$, συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιο $x \in (0,3)$ ώστε $\cos x = 0$. Επομένως, το σύνολο $\{x > 0 : \cos x = 0\}$, ως μη κενό και κάτω φραγμένο από το 0, έχει infimum, έστω x_0. Επειδή το 0 είναι κάτω φράγμα του συνόλου, συνεπάγεται ότι $0 \leq x_0$. Επίσης, επειδή $x_0 = \inf\{x > 0 : \cos x = 0\}$, υπάρχει ακολουθία (x_n) στο σύνολο αυτό (δηλαδή, $\cos x_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$) ώστε $x_n \to x_0$. Λόγω συνέχειας της cos, έχουμε $\cos x_0 = \lim_{n\to+\infty} \cos x_n = 0$. Επειδή $\cos 0 = 1$, συνεπάγεται $0 < x_0$ και, επομένως, το x_0 είναι στοιχείο του συνόλου $\{x > 0 : \cos x = 0\}$. Επειδή, λοιπόν, το x_0 είναι στοιχείο του συνόλου $\{x > 0 : \cos x = 0\}$ και, ταυτόχρονα, είναι ίσο με το infimum του συνόλου αυτού, το x_0 είναι το ελάχιστο στοιχείο του ή, ισοδύναμα, είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός ο οποίος είναι λύση της εξίσωσης $\cos x = 0$. Ο.Ε.Δ.

Ορισμός 3.2 *Συμβολίζουμε* π *το διπλάσιο του μικρότερου θετικού αριθμού ο οποίος είναι λύση της εξίσωσης* $\cos x = 0$.

Επομένως,
$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad \text{και} \qquad \cos x > 0\,, \qquad x \in \Big[0, \frac{\pi}{2}\Big)\,.$$

Η σχέση $\sin' x = \cos x > 0$ για κάθε $x \in \big[0, \frac{\pi}{2}\big)$ συνεπάγεται ότι η sin είναι γνησίως αύξουσα στο $\big[0, \frac{\pi}{2}\big]$. Από την $\sin^2 \frac{\pi}{2} + \cos^2 \frac{\pi}{2} = 1$ παίρνουμε $\sin \frac{\pi}{2} = \pm 1$ και, επειδή $\sin 0 = 0$ και η sin είναι γνησίως αύξουσα στο $\big[0, \frac{\pi}{2}\big]$, συνεπάγεται

$\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Επομένως, η συνάρτηση $\sin : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0,1]$ είναι ένα-προς-ένα (ως γνησίως αύξουσα) και επί (ως συνεχής). Κατόπιν, η σχέση $\cos' x = -\sin x < 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ συνεπάγεται ότι η cos είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Επομένως, η συνάρτηση $\cos : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0,1]$ είναι και αυτή ένα-προς-ένα και επί.

Πρόταση 3.8 *Για κάθε $a, b \in [0,1]$ με $a^2 + b^2 = 1$ υπάρχει μοναδικό $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ώστε $\sin x = a$ και $\cos x = b$.*

Απόδειξη: Επειδή η $\sin : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0,1]$ είναι ένα-προς-ένα και επί, υπάρχει μοναδικό $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ώστε $\sin x = a$. Άπό την $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ συνεπάγεται $\cos x = \pm b$ και, επειδή $\cos x \geq 0$, έχουμε $\cos x = b$. Ο.Ε.Δ.

Από τις ισότητες $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ και $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ βρίσκουμε τις τιμές των cos και sin στα σημεία π, $\frac{3\pi}{2}$ και 2π και, κατόπιν, παίρνουμε εύκολα τις σχέσεις $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$, $\cos(x+\pi) = -\cos x$, $\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin x$ και $\cos(x+2\pi) = \cos x$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Από τις σχέσεις αυτές καθώς και από τη συμπεριφορά της cos στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, διακρίνουμε τη συμπεριφορά της cos στα διαστήματα $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ και $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, δηλαδή συνολικά στο $[0, 2\pi]$. Επίσης, η τελευταία σχέση σημαίνει ότι η cos είναι περιοδική με περίοδο 2π. Παρόμοιες σχέσεις και συμπεράσματα ισχύουν και για την sin.

Πρόταση 3.9 *1. Οι συναρτήσεις* sin *και* cos *είναι περιοδικές με ελάχιστη θετική περίοδο τον αριθμό 2π.*
2. Για κάθε $a, b \in [-1,1]$ με $a^2 + b^2 = 1$ υπάρχει μοναδικό $x \in \left[0, 2\pi\right)$ ώστε $\sin x = a$ και $\cos x = b$.

Θα αποφύγουμε να αποδείξουμε την πρόταση αυτή, διότι οι λεπτομέρειες είναι εύκολες και άνευ ουσίας. Και τα δύο συμπεράσματα προκύπτουν από την προηγούμενη συζήτηση. Το δεύτερο συμπέρασμα είναι επέκταση του συμπεράσματος της Πρότασης 3.8 και η απόδειξή του χρησιμοποιεί την Πρόταση 3.8 και τη διάκριση των περιπτώσεων: $a \geq 0, b \geq 0$ ή $a \geq 0, b < 0$ ή $a < 0, b \geq 0$ ή $a < 0, b < 0$. Ας ασχοληθεί ο αναγνώστης με τις λεπτομέρειες.

Όταν ορίσαμε τις συναρτήσεις cos και sin μέσω των αντίστοιχων δυναμοσειρών είχαμε τονίσει ότι ο συνηθισμένος ορισμός που μαθαίνουμε στο λύκειο δε θεωρείται αυστηρά μαθηματικός, διότι βασίζεται στη γεωμετρική εποπτεία και όχι στα αξιώματα των πραγματικών αριθμών. Είναι, όμως, αναμενόμενο ότι πολλοί προτιμούν τον «γεωμετρικό» ορισμό λόγω της απλότητάς του. Επίσης, υπάρχουν και άλλοι, και μάλιστα αυστηροί, τρόποι ορισμού των συναρτήσεων cos και sin. Ασχέτως, όμως, του τρόπου ορισμού των συναρτήσεων αυτών, αποδεικνύεται ότι έχουν τις εξής βασικές ιδιότητες: $\cos' x = -\sin x$ και $\sin' x = \cos x$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$ και $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$.

Θα αποδείξουμε, τώρα, ότι, ασχέτως του τρόπου τον οποίο επιλέγουμε για να ορίσουμε τις συναρτήσεις αυτές, *καταλήγουμε στις ίδιες συναρτήσεις*.

Πρόταση 3.10 *Θεωρούμε δύο ζεύγη συναρτήσεων f_1, g_1 και f_2, g_2 στο $\mathbf{R}$ με τις ιδιότητες*
(i) $f_1'(x) = -g_1(x)$ και $g_1'(x) = f_1(x)$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$,

(i′) $f_2'(x) = -g_2(x)$ *και* $g_2'(x) = f_2(x)$ *για κάθε* $x \in \mathbf{R}$ *και*
(ii) $f_1(0) = f_2(0)$ *και* $g_1(0) = g_2(0)$.
Τότε τα δύο ζεύγη είναι τα ίδια. Δηλαδή, $f_1(x) = f_2(x)$ *και* $g_1(x) = g_2(x)$ *για κάθε* $x \in \mathbf{R}$.

Απόδειξη: Υπολογίζουμε $\frac{d}{dx}\big((f_1(x) - f_2(x))^2 + (g_1(x) - g_2(x))^2\big) = 2(f_1(x) - f_2(x))(-g_1(x) + g_2(x)) + 2(g_1(x) - g_2(x))(f_1(x) - f_2(x)) = 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Άρα, η συνάρτηση με τύπο $(f_1(x)-f_2(x))^2+(g_1(x)-g_2(x))^2$ είναι σταθερή στο $\mathbf{R}$. Άρα, $(f_1(x)-f_2(x))^2+(g_1(x)-g_2(x))^2 = (f_1(0)-f_2(0))^2+(g_1(0)-g_2(0))^2 = 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$ και, επομένως, $f_1(x) = f_2(x)$ και $g_1(x) = g_2(x)$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Ο.Ε.Δ.

Άσκηση 19: Η συνάρτηση $\sin : \big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big] \to [-1, 1]$ είναι γνησίως αύξουσα (και, επομένως, ένα-προς-ένα) και επί. Συμβολίζουμε $\arcsin : [-1, 1] \to \big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big]$ την αντίστροφη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$$\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2^k k!(2k+1)}\, x^{2k+1}, \qquad x \in (-1, 1).$$

(Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι $\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ και δείτε την άσκηση 18.)

Άσκηση 20: Η **εφαπτομένη** του x συμβολίζεται $\tan x$ και ορίζεται με τον τύπο $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ για κάθε x για το οποίο $\cos x \neq 0$ ή, ισοδύναμα, για κάθε $x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbf{Z}\}$.
1. Αποδείξτε ότι η $\tan : \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big) \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής, παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$.
2. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+} \tan x = -\infty$ και $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \tan x = +\infty$. Βάσει αυτού αποδείξτε ότι η $\tan : \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big) \to \mathbf{R}$ είναι επί.
3. Συμβολίζουμε $\arctan : \mathbf{R} \to \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$ την αντίστροφη συνάρτηση. Αποδείξτε

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \qquad x \in (-1, 1).$$

(Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$ και δείτε την άσκηση 15.)

3.4 Παράρτημα: η εκθετική συνάρτηση.

Η εκθετική συνάρτηση e^x και, γενικότερα, η a^x για οποιοδήποτε $a > 0$ ορίζεται στα αρχικά μαθήματα Ανάλυσης.

Θα υπενθυμίσουμε την πορεία που ακολουθούμε. Κατ΄ αρχήν ορίζουμε τη δύναμη $a^n = a \cdots a$, αν $n \in \mathbf{N}$. Κατόπιν, ορίζουμε $a^0 = 1$ και $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$, αν $n \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}_0$. Όλες οι γνωστές ιδιότητες της δύναμης a^n στην περίπτωση ακέραιου εκθέτη αποδεικνύονται εύκολα. Κατόπιν, αποδεικνύεται, *αρκετά δύσκολα*, ότι, αν $a > 0$ και $n \in \mathbf{N}$, η εξίσωση $x^n = a$ έχει μοναδική θετική λύση και ορίζουμε το $a^{\frac{1}{n}}$ να είναι ακριβώς αυτή η λύση της $x^n = a$. Τώρα, αν $x = \frac{m}{n}$ με $m \in \mathbf{Z}$

και $n \in \mathbf{N}$, ορίζουμε $a^x = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$. Έτσι ορίζεται η δύναμη a^x για κάθε $x \in \mathbf{Q}$ και αποδεικνύονται όλες οι γνωστές ιδιότητες της δύναμης στην περίπτωση ρητού εκθέτη. Τέλος, για να ορίσουμε τη δύναμη a^x στην περίπτωση $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, ακολουθούμε μία, επίσης, *αρκετά δύσκολη* διαδικασία. Για οποιοδήποτε άρρητο x παίρνουμε τυχούσα ακολουθία ρητών (x_n) ώστε $x_n \to x$ και αποδεικνύουμε ότι η ακολουθία (a^{x_n}) συγκλίνει. Αποδεικνύουμε ότι το όριο εξαρτάται μόνο από το x και όχι από την (x_n) και ορίζουμε το a^x να είναι το όριο της (a^{x_n}). Έτσι ορίζεται η a^x για κάθε $x \in \mathbf{R}$ και αποδεικνύονται όλες οι γνωστές ιδιότητες της δύναμης στην περίπτωση πραγματικού εκθέτη.

Η εκθετική συνάρτηση e^x είναι η ειδική περίπτωση της a^x, όπου χρησιμοποιούμε ως a τον αριθμό $e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Τέλος, αποδεικνύονται και οι γνωστές ιδιότητες συνέχειας και παραγωγισιμότητας της εκθετικής συνάρτησης και, ειδικώτερα, η σχέση: $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Η απόδειξη της τελευταίας ισότητας είναι *αρκετά περίπλοκη*.

Όλη η προηγούμενη διαδικασία ορισμού και μελέτης της εκθετικής συνάρτησης είναι αρκετά επίπονη (με την προϋπόθεση ότι απαιτούμε μαθηματική αυστηρότητα). Θα δούμε, τώρα, μία δεύτερη μέθοδο ορισμού και μελέτης της εκθετικής συνάρτησης, η οποία βασίζεται μόνο στον ορισμό και τις ιδιότητες της δύναμης a^n για ακέραιο εκθέτη n. Η μέθοδος αυτή έχει το πλεονέκτημα ότι αποφεύγει όλα τα δύσκολα μέρη της πρώτης μεθόδου: την απόδειξη ύπαρξης λύσης της εξίσωσης $x^n = a$, την απόδειξη σύγκλισης της (a^{x_n}) όταν $x_n \to x$ και την απόδειξη της $\frac{d}{dx}e^x = e^x$. Το μειονέκτημα της δεύτερης μεθόδου είναι ότι δεν είναι «φυσιολογική», διότι χρησιμοποιεί τη θεωρία των δυναμοσειρών, η οποία εμφανίζεται αρκετά αργά στην ανάπτυξη της βασικής θεωρίας. Παρ΄ όλα αυτά θα αναπτύξουμε τη δεύτερη μέθοδο, διότι είναι ενδιαφέρουσα και διότι είναι παρόμοια με τη μέθοδο ορισμού και μελέτης των τριγωνομετρικών συναρτήσεων που γνωρίσαμε στις προηγούμενες ενότητες. Ένας τρίτος λόγος είναι ότι η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται συχνά στη Μιγαδική Ανάλυση όταν ορίζεται η εκθετική συνάρτηση e^z για μιγαδική μεταβλητή z.

Θεωρούμε την εκθετική δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}x^k$, η οποία συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbf{R}$, και συμβολίζουμε $E : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ τη συνάρτηση που ορίζεται από αυτήν με τύπο

$$E(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}x^k\,, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Από τις προτάσεις 3.4 και 3.6 συνεπάγεται ότι η E είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και

$$E'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{k!}x^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k-1)!}x^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}x^k = E(x)\,, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Κατόπιν, αποδεικνύουμε την ισότητα

$$E(x+y) = E(x)E(y)\,, \qquad x, y \in \mathbf{R}.$$

Η απόδειξη μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Ο ένας τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε, όπως έχουμε ήδη κάνει, το γινόμενο Cauchy των σειρών $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}x^k$ και

$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}y^k$. Ο δεύτερος τρόπος βασίζεται στον υπολογισμό $\frac{d}{dx}(E(y-x)E(x)) = -E'(y-x)E(x)+E(y-x)E'(x) = -E(y-x)E(x)+E(y-x)E(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Έτσι συνεπάγεται ότι, για κάθε $y \in \mathbf{R}$, η συνάρτηση του x με τύπο $E(y-x)E(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbf{R}$ και, επομένως, $E(y-x)E(x) = E(y-0)E(0) = E(y)$. Τέλος, αντικαθιστούμε το y με το $y+x$.

Προφανώς, $E(0) = 1$. Η ισότητα $e = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!} = E(1)$ έχει ήδη αποδειχθεί στην Πρόταση 1.7. Αν $x \geq 0$, συνεπάγεται $E(x) = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots \geq 1 > 0$. Επειδή $E(-x)E(x) = E(-x+x) = E(0) = 1$, συνεπάγεται $E(x) > 0$ για κάθε $x < 0$. Άρα, $E(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Από την $E'(x) = E(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$ προκύπτει ότι η E είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$. Ακόμη, αν $x > 0$, $E(x) \geq 1+\frac{x}{1!} = 1+x$ και, επομένως, $\lim_{x\to+\infty}E(x) = +\infty$. Από την $E(-x)E(x) = 1$ προκύπτει αμέσως ότι $\lim_{x\to-\infty}E(x) = 0$. Ακόμη, αν $x > 0$, $E(x) \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, οπότε $0 < \frac{x^n}{E(x)} \leq \frac{(n+1)!}{x}$ για κάθε $x > 0$ και, επομένως, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{E(x)} = 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$.

Ανακεφαλαιώνοντας, η E έχει τις παρακάτω ιδιότητες:
(i) η E είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και $E'(x) = E(x)$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$,
(ii) $E(0) = 1$, $E(1) = e$ και $E(x+y) = E(x)E(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$,
(iii) η E είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$ και $E(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$,
(iv) $\lim_{x\to+\infty}E(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to-\infty}E(x) = 0$,
(v) η $E : (-\infty,+\infty) \to (0,+\infty)$ είναι ένα-προς-ένα και επί και
(vi) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{E(x)} = 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$.

Άρα η συνάρτηση E έχει όλες τις βασικές ιδιότητες που απαιτούμε ώστε να την ονομάσουμε «εκθετική συνάρτηση».

Αξίζει τον κόπο να αποδείξουμε ότι, ασχέτως του τρόπου με τον οποίο επιλέγουμε να ορίσουμε την εκθετική συνάρτηση, *καταλήγουμε στην ίδια συνάρτηση*. Θα δούμε δύο αποδείξεις, ανάλογα με τις υποθέσεις που κάνουμε για τις ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης.

Πρόταση 3.11 *Έστω συναρτήσεις f_1 και f_2 παραγωγίσιμες στο $\mathbf{R}$ ώστε:*
(i) $f_1'(x) = f_1(x)$ και $f_2'(x) = f_2(x)$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$ και
(ii) $f_1(0) = f_2(0) \neq 0$.
Τότε $f_1(x) = f_2(x)$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Απόδειξη: Υπολογίζουμε $\frac{d}{dx}\big(f_2(x)f_2(-x)\big) = f_2'(x)f_2(-x) - f_2(x)f_2'(-x) = f_2(x)f_2(-x) - f_2(x)f_2(-x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$, οπότε η συνάρτηση με τύπο $f_2(x)f_2(-x)$ είναι σταθερή στο $\mathbf{R}$. Άρα, $f_2(x)f_2(-x) = f_2(0)f_2(0) \neq 0$ και, επομένως, $f_2(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Επίσης, $\frac{d}{dx}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f_1'(x)f_2(x)-f_1(x)f_2'(x)}{f_2^2(x)} = \frac{f_1(x)f_2(x)-f_1(x)f_2(x)}{f_2^2(x)} = 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$ και, επομένως, η συνάρτηση με τύπο $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ είναι σταθερή στο $\mathbf{R}$. Άρα, $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f_1(0)}{f_2(0)} = 1$ και, επομένως, $f_1(x) = f_2(x)$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 3.12 *Έστω συναρτήσεις f_1 και f_2 συνεχείς στο $\mathbf{R}$ ώστε:*
(i) $f_1(x+y) = f_1(x)f_1(y)$ και $f_2(x+y) = f_2(x)f_2(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$ και
(ii) $f_1(1) = f_2(1) \neq 0$.
Τότε $f_1(x) = f_2(x)$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Απόδειξη: Κατ΄ αρχήν, $f_1(1) = f_1(1+0) = f_1(1)f_1(0)$ και, επειδή $f_1(1) \neq 0$, έχουμε $f_1(0) = 1$. Ομοίως, $f_2(0) = 1$. Κατόπιν, $f_1(x)f_1(-x) = f_1\big(x+(-x)\big) = f_1(0) = 1$ και, επομένως, $f_1(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Ομοίως, $f_2(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Ορίζουμε τη συνάρτηση με τύπο $h(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$ και παρατηρούμε ότι η h είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$, ότι $h(0) = h(1) = 1$ και $h(x+y) = h(x)h(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$. Επίσης, $h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$ και, επειδή η h είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$ και $h(0) = 1$, συνεπάγεται $h(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Τώρα, $h(2) = h(1)h(1) = 1$, $h(3) = h(2)h(1) = 1$ και, επαγωγικά, $h(n) = 1$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Κατόπιν, $1 = h(0) = h\big(n+(-n)\big) = h(n)h(-n) = h(n)$ για κάθε $n \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}_0$. Άρα, $h(n) = 1$ για κάθε $n \in \mathbf{Z}$.

Αν $m \in \mathbf{Z}$ και $n \in \mathbf{N}$, $1 = h(m) = h\big(n\frac{m}{n}\big) = h\big(\frac{m}{n}\big) \cdots h\big(\frac{m}{n}\big) = \big(h\big(\frac{m}{n}\big)\big)^n$, οπότε $h\big(\frac{m}{n}\big) = 1$. Άρα, $h(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbf{Q}$.

Παίρνουμε, τώρα, τυχόν $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ και ακολουθία (x_n) στο $\mathbf{Q}$ ώστε $x_n \to x$. Λόγω συνέχειας της h, έχουμε $h(x) = \lim_{n\to+\infty} h(x_n) = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$.

Άρα, $h(x) = 1$ ή, ισοδύναμα, $f_1(x) = f_2(x)$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Ο.Ε.Δ.

Κεφάλαιο 4

Μετρικοί χώροι.

4.1 Παραδείγματα μετρικών χώρων.

Παράδειγμα:
Ο n-διάστατος ευκλείδιος χώρος $\mathbf{R}^n$.

Το σύνολο $\mathbf{R}^n$, δηλαδή, το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}$ του $\mathbf{R}$ n φορές με τον εαυτό του, είναι το σύνολο με στοιχεία όλες τις διατεταγμένες n-άδες πραγματικών αριθμών:

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R} = \{(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) : x^{(1)}, \dots, x^{(n)} \in \mathbf{R}\}.$$

Το $\mathbf{R}^1$ ταυτίζεται με το $\mathbf{R}$ και αναπαρίσταται γεωμετρικά με το σύνολο των σημείων μίας (οποιασδήποτε) ευθείας. Το $\mathbf{R}^2$ αναπαρίσταται γεωμετρικά με το σύνολο των σημείων ενός (οποιουδήποτε) επιπέδου. Τέλος, το $\mathbf{R}^3$ αναπαρίσταται γεωμετρικά με το σύνολο των σημείων του χώρου.

Αν x και y είναι οποιαδήποτε στοιχεία του $\mathbf{R}$, η απόστασή τους ως σημεία της ευθείας είναι ίση με την ποσότητα $|x-y|$. Αν $x = (x^{(1)}, x^{(2)})$ και $y = (y^{(1)}, y^{(2)})$ είναι οποιαδήποτε στοιχεία του $\mathbf{R}^2$, η απόστασή τους ως σημεία του επιπέδου είναι ίση με $\sqrt{(x^{(1)} - y^{(1)})^2 + (x^{(2)} - y^{(2)})^2}$. Τέλος, αν $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)})$ και $y = (y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)})$ είναι οποιαδήποτε στοιχεία του $\mathbf{R}^3$, η απόστασή τους ως σημεία του χώρου είναι ίση με $\sqrt{(x^{(1)} - y^{(1)})^2 + (x^{(2)} - y^{(2)})^2 + (x^{(3)} - y^{(3)})^2}$. Η απόσταση των x και y είναι ίση με το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος που έχει άκρα τα σημεία αυτά, είτε αυτά είναι σημεία της ευθείας είτε είναι σημεία του επιπέδου είτε είναι σημεία του χώρου.

Υπάρχουν μερικές απλές ιδιότητες της απόστασης, τις οποίες θα εξετάσουμε αμέσως τώρα. Κατ' αρχήν, η απόσταση δύο σημείων είναι πάντοτε μη αρνητικός αριθμός. Δεύτερον, η απόσταση δύο σημείων είναι ίση με 0 αν και μόνον αν τα δύο σημεία ταυτίζονται. Τρίτον, η απόσταση δύο σημείων δε μεταβάλλεται αν αλλάξουμε τη σειρά τους. Αυτή η ιδιότητα ονομάζεται **συμμετρία** της απόστασης. Τέλος, η απόσταση δύο σημείων δεν είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των αποστάσεων τους από οποιοδήποτε τρίτο σημείο. Αυτή η ιδιότητα ονομάζεται **τριγωνική ιδιότητα** της απόστασης, διότι εκφράζει με άλλον τρόπο το γεγονός ότι το μήκος μίας πλευράς τριγώνου δεν είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των μηκών των δύο άλλων πλευρών. Οι αποδείξεις αυτών των ιδιοτήτων στην ευθεία, στο επίπεδο και στον χώρο είναι ζήτημα απλών πράξεων. Δε θα κάνουμε λεπτομέρειες, διότι θα δούμε την απόδειξη στη γενική περίπτωση του συνόλου $\mathbf{R}^n$.

Άσκηση 1: Διατυπώστε με σύμβολα και αποδείξτε αλγεβρικά την τριγωνική ιδιότητα της απόστασης στους $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^2$ και $\mathbf{R}^3$.

Κατ᾽ αρχήν, βέβαια, πρέπει να γενικεύσουμε την έννοια της απόστασης από τις περιπτώσεις $n=1$, $n=2$ και $n=3$, στις οποίες υπάρχει γεωμετρική αναπαράσταση των αντίστοιχων συνόλων $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^2$ και $\mathbf{R}^3$, στην περίπτωση $n \geq 4$, στην οποία δεν υπάρχει αντίστοιχη γεωμετρική αναπαράσταση του συνόλου $\mathbf{R}^n$. Δίνουμε, λοιπόν, τον εξής ορισμό.

Ορισμός 4.1 *Ορίζουμε την* ***ευκλείδια απόσταση*** *δύο οποιωνδήποτε στοιχείων* $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ *και* $y = (y^{(1)}, \dots, y^{(n)})$ *του* $\mathbf{R}^n$, *και τη συμβολίζουμε* $d_{n,2}(x, y)$, *με τον τύπο*

$$d_{n,2}(x, y) = \sqrt{(x^{(1)} - y^{(1)})^2 + \cdots + (x^{(n)} - y^{(n)})^2}\ .$$

Είναι προφανές ότι, στην περίπτωση του $\mathbf{R}$, έχουμε για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$ ότι $d_{1,2}(x, y) = \sqrt{(x-y)^2} = |x - y|$. Ακόμη πιο προφανές είναι ότι, στις περιπτώσεις των $\mathbf{R}^2$ και $\mathbf{R}^3$, η $d_{n,2}(x, y)$ ταυτίζεται με τους αντίστοιχους τύπους $d_{2,2}(x, y) = \sqrt{(x^{(1)} - y^{(1)})^2 + (x^{(2)} - y^{(2)})^2}$, αν $x = (x^{(1)}, x^{(2)})$ και $y = (y^{(1)}, y^{(2)})$, και $d_{3,2}(x, y) = \sqrt{(x^{(1)} - y^{(1)})^2 + (x^{(2)} - y^{(2)})^2 + (x^{(3)} - y^{(3)})^2}$, αν $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)})$ και $y = (y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)})$.

Πριν γενικεύσουμε τις τέσσερις ιδότητες της απόστασης από την περίπτωση $n \leq 3$ στη γενική περίπτωση, αποδεικνύουμε τα παρακάτω αποτελέσματα.

Πρόταση 4.1 ***Ανισότητα Cauchy - Schwarz.*** *Για κάθε* $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$ *και* $b_1, \dots, b_n \in \mathbf{R}$ *ισχύει*

$$|a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n| \leq \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}\ .$$

Απόδειξη: Αν $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 0$, τότε $a_1 = \ldots = a_n = 0$, οπότε η ανισότητα καταλήγει στην $0 \leq 0$, η οποία είναι σωστή. Ομοίως, αν $b_1^2 + \cdots + b_n^2 = 0$, τότε $b_1 = \ldots = b_n = 0$ και, πάλι, η ανισότητα καταλήγει στην $0 \leq 0$.

Υποθέτουμε, τώρα, ότι $a_1^2 + \cdots + a_n^2 > 0$ και $b_1^2 + \cdots + b_n^2 > 0$ και θέτουμε $A = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$ και $B = \sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}$. Τώρα, $\left|\frac{a_1}{A}\frac{b_1}{B} + \cdots + \frac{a_n}{A}\frac{b_n}{B}\right| \leq \frac{|a_1|}{A}\frac{|b_1|}{B} + \cdots + \frac{|a_n|}{A}\frac{|b_n|}{B} \leq \frac{1}{2}\frac{a_1^2}{A^2} + \frac{1}{2}\frac{b_1^2}{B^2} + \cdots + \frac{1}{2}\frac{a_n^2}{A^2} + \frac{1}{2}\frac{b_n^2}{B^2} = \frac{1}{2}\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{A^2} + \frac{1}{2}\frac{b_1^2 + \cdots + b_n^2}{B^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Άρα, $\frac{|a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n|}{AB} \leq 1$ και, επομένως, $|a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n| \leq AB = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}$. Ο.Ε.Δ.

Λήμμα 4.1 *Για κάθε* $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$ *και* $b_1, \dots, b_n \in \mathbf{R}$ *ισχύει*

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + \cdots + (a_n + b_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}\ .$$

Απόδειξη: Υψώνουμε τις δύο πλευρές της ανισότητας στο τετράγωνο και, μετά από απαλοιφές ίδιων όρων, βρίσκουμε την ισοδύναμη $2a_1b_1 + \cdots + 2a_nb_n \leq 2\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}$, η οποία είναι άμεση απόρροια της ανισότητας της Πρότασης 4.1. Ο.Ε.Δ.

Τώρα είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε τις βασικές ιδιότητες της ευκλείδιας απόστασης στον $\mathbf{R}^n$.

Πρόταση 4.2 *1.* $d_{n,2}(x,y) \geq 0$ *για κάθε* $x, y \in \mathbf{R}^n$.
2. Για κάθε $x, y \in \mathbf{R}^n$ *ισχύει:* $d_{n,2}(x,y) = 0$ *αν και μόνον αν* $x = y$.
3. $d_{n,2}(x,y) = d_{n,2}(y,x)$ *για κάθε* $x, y \in \mathbf{R}^n$.
4. $d_{n,2}(x,y) \leq d_{n,2}(x,z) + d_{n,2}(z,y)$ *για κάθε* $x, y, z \in \mathbf{R}^n$.

Απόδειξη: Οι ιδιότητες 1, 2 και 3 είναι προφανείς. Η 4 προκύπτει από την ανισότητα του Λήμματος 4.1, αν θέσουμε $a_k = x^{(k)} - z^{(k)}$ και $b_k = z^{(k)} - y^{(k)}$ για $k = 1, \ldots, n$. Ο.Ε.Δ.

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση του συνόλου $\mathbf{R}^n$ η συνάρτηση $d_{n,2}$ ορίζεται σε όλα τα ζεύγη (x,y) στοιχείων x και y του $\mathbf{R}^n$ και σε κάθε τέτοιο ζεύγος αντιστοιχίζει τον πραγματικό αριθμό $d_{n,2}(x,y)$, την ευκλείδια απόσταση των x και y. Δηλαδή, η $d_{n,2}$ είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ και πραγματικές τιμές.

Ορισμός 4.2 *Το σύνολο* $\mathbf{R}^n$ *εφοδιασμένο με την* $d_{n,2} : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *ονομάζεται* n***-διάστατος ευκλείδιος χώρος****. Η συνάρτηση* $d_{n,2}$ *ονομάζεται* ***ευκλείδια απόσταση*** *ή* ***ευκλείδια μετρική*** *στον* $\mathbf{R}^n$.

Θα δούμε, τώρα, πώς γενικεύεται η έννοια της απόστασης.

Ορισμός 4.3 *Εστω* X *ένα μη κενό σύνολο. Ονομάζουμε* ***μετρική στο*** X *ή* ***απόσταση στο*** X *κάθε συνάρτηση* d *ορισμένη στο καρτεσιανό γινόμενο* $X \times X$ *και με πραγματικές τιμές*

$$d : X \times X \to \mathbf{R}$$

με τις παρακάτω ιδιότητες:
(i) $d(x,y) \geq 0$ *για κάθε* $x, y \in X$.
(ii) Για κάθε $x, y \in X$ *ισχύει:* $d(x,y) = 0$ *αν και μόνον αν* $x = y$.
(iii) $d(x,y) = d(y,x)$ *για κάθε* $x, y \in X$.
(iv) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ *για κάθε* $x, y, z \in X$.

Λέμε ότι το ζευγάρι (X,d) *αποτελεί ένα* ***μετρικό χώρο*** *ή ότι* ***ο χώρος*** X ***είναι εφοδιασμένος με τη μετρική*** d *ή* ***ο χώρος*** X ***με τη μετρική*** d. *Επίσης, την τιμή* $d(x,y)$ *στο ζευγάρι* (x,y) *την ονομάζουμε* ***απόσταση των*** x ***και*** y.

Παρατηρήσεις: 1. Με απλοϊκά λόγια, μετρικός χώρος είναι ένα μη κενό σύνολο X και ένας συγκεκριμένος τρόπος μέτρησης αποστάσεων ανάμεσα στα στοιχεία του. Βέβαια, έχουμε συνηθίσει να μελετάμε τα σύνολα $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^2$ και $\mathbf{R}^3$, για τα οποία έχουμε και την εμπειρική γεωμετρική εποπτεία, και να μετράμε αποστάσεις στα σύνολα αυτά με τον συγκεκριμένο *ευκλείδιο* τρόπο που υπαγορεύεται

από τη γεωμετρική εποπτεία μας. Όμως, υπάρχουν και άλλοι τρόποι να μετράμε αποστάσεις και στα σύνολα $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^2$ και $\mathbf{R}^3$ αλλά και σε πολλά άλλα ενδιαφέροντα σύνολα.
2. Μετρικός χώρος είναι δύο πράγματα μαζί: ένα μη κενό σύνολο X και μία μετρική $d : X \times X \to \mathbf{R}$. Τυπικά, δηλαδή, όταν έχουμε ένα σύνολο X δε μπορούμε να μιλάμε για *μετρικό χώρο* X παρά μόνον όταν είναι ήδη καθορισμένη και εννοείται από τα συμφραζόμενα μία συγκεκριμένη μετρική d στο σύνολο X.

ΠΑΡΑΔΟΧΗ: Λέγοντας ο μετρικός χώρος $\mathbf{R}^n$, εννοούμε το ζεύγος $(\mathbf{R}^n, d_{n,2})$, δηλαδή, το $\mathbf{R}^n$ εφοδιασμένο με την ευκλείδια μετρική.

Αν θελήσουμε να εφοδιάσουμε τον $\mathbf{R}^n$ με μία μετρική διαφορετική από την ευκλείδια, θα πρέπει να την αναφέρουμε ρητά.

Άσκηση 2: 1. Για κάθε x, y στο $\mathbf{R}$ ορίζουμε: $d_1(x,y) = (x-y)^2$, $d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|}$, $d_3(x,y) = |x^2 - y^2|$, $d_4(x,y) = |x - 2y|$ και $d_5(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$. Ποιές από τις $d_1, \ldots, d_5$ είναι μετρικές στο $\mathbf{R}$;
2. Ορίζουμε $d(x,y) = \sqrt{(x^{(1)} - y^{(1)})^2 + 4(x^{(2)} - y^{(2)})^2}$ για κάθε $x = (x^{(1)}, x^{(2)})$ και $y = (y^{(1)}, y^{(2)})$ στο $\mathbf{R}^2$. Είναι η d μετρική στο $\mathbf{R}^2$;
3. Ορίζουμε $d_1(x,y) = |x^{(1)} - y^{(1)}| + |x^{(2)} - y^{(2)}| + |x^{(3)} - y^{(3)}|$ και $d_2(x,y) = |x^{(1)} - y^{(1)}|$ για κάθε $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)})$ και $y = (y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)})$ στο $\mathbf{R}^3$. Ποιες από τις d_1 και d_2 είναι μετρικές στο $\mathbf{R}^3$;

Παραδείγματα:
1. **Η διακριτή μετρική**.
Έστω *οποιοδήποτε* μη κενό σύνολο X και η συνάρτηση $\delta_X : X \times X \to \mathbf{R}$ με τύπο: $\delta_X(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = y, \\ 1, & \text{αν } x \neq y. \end{cases}$ Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η δ_X έχει τις τέσσερις ιδιότητες μιας μετρικής. Οι ιδιότητες (i), (ii) και (iii) είναι προφανείς. Αν $\delta_X(x,y) = 0$, η ανισότητα $\delta_X(x,y) \leq \delta_X(x,z) + \delta_X(z,y)$ ισχύει, διότι $\delta_X(x,z) \geq 0$ και $\delta_X(z,y) \geq 0$. Αν $\delta_X(x,y) = 1$, τότε $x \neq y$, οπότε ένα τουλάχιστον από τα x και y είναι διαφορετικό από το z και, επομένως, ένα τουλάχιστον από τα $\delta_X(x,z)$ και $\delta_X(z,y)$ είναι ίσο με 1 (και το άλλο είναι ≥ 0). Άρα, $\delta_X(x,y) = 1 \leq \delta_X(x,z) + \delta_X(z,y)$.

Ορισμός 4.4 *Έστω μη κενό σύνολο X. Η $\delta_X : X \times X \to \mathbf{R}$ με τύπο*

$$\delta_X(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = y, \\ 1, & \text{αν } x \neq y \end{cases}$$

ονομάζεται ***διακριτή μετρική*** *στο X.*

Είναι αξιοπρόσεκτο ότι η διακριτή μετρική ορίζεται σε *οποιοδήποτε* μη κενό σύνολο X. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι, πράγματι, δε μπορούμε να μιλάμε για *μετρικό χώρο* X χωρίς να έχουμε υπ' όψιν μας κάποια συγκεκριμένη μετρική στο X. Διότι, για παράδειγμα, ο $\mathbf{R}^n$ μπορεί να εφοδιαστεί με τουλάχιστον δύο διαφορετικές μετρικές: την ευκλείδια μετρική $d_{n,2}$ και τη διακριτή μετρική $\delta_{\mathbf{R}^n}$. Σε λίγο θα δούμε ότι ο $\mathbf{R}^n$ μπορεί να εφοδιασθεί με πολλές άλλες μετρικές.

2. **Μετρικοί υπόχωροι.**

Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε μετρικό χώρο (X, d) και οποιοδήποτε μη κενό υποσύνολο $W \subseteq X$. Κατόπιν, παίρνουμε τον περιορισμό της συνάρτησης $d : X \times X \to \mathbf{R}$ στο $W \times W$. Δηλαδή, για κάθε $x, y \in W$ η τιμή $d(x, y)$ του περιορισμού $d : W \times W \to \mathbf{R}$ είναι ίδια με την τιμή $d(x, y)$ της $d : X \times X \to \mathbf{R}$. Με απλά λόγια: η απόσταση των $x, y \in W$ ως στοιχεία του μικρότερου συνόλου W έχει την ίδια ακριβώς τιμή με την απόστασή τους ως στοιχεία του μεγαλύτερου συνόλου X.

Θα δούμε, τώρα, ότι η $d : W \times W \to \mathbf{R}$ είναι μετρική στο W. Αυτό είναι εξαιρετικά εύκολο. Πράγματι, οι τέσσερις ιδιότητες της d ισχύουν για τα στοιχεία του X και, επομένως, οι ιδιότητες αυτές θα ισχύουν και για τα στοιχεία του W, αφού τα στοιχεία του W είναι στοιχεία του X.

Ορισμός 4.5 *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και μη κενό $W \subseteq X$. Ο περιορισμός $d : W \times W \to \mathbf{R}$ της $d : X \times X \to \mathbf{R}$ ονομάζεται **μετρική υπόχωρου στο** W ή **απόσταση υπόχωρου στο** W και ο μετρικός χώρος (W, d) ονομάζεται **μετρικός υπόχωρος του** (X, d).*

Ας δούμε μία απλή ειδική περίπτωση. Θεωρούμε τον $\mathbf{R}$ με την ευκλείδια μετρική d_2 και το υποσύνολο $W = (0, 1] \cup [4, 7]$. Η απόσταση των στοιχείων 1 και 4 του W με τη μετρική υπόχωρου είναι ίση με $|4 - 1| = 3$, διότι αυτή ακριβώς είναι η απόστασή τους ως στοιχεία του $\mathbf{R}$ με την ευκλείδια μετρική.

ΠΑΡΑΔΟΧΗ: Αν έχουμε ένα μη κενό υποσύνολο W του $\mathbf{R}^n$, συμφωνούμε ότι, λέγοντας ο μετρικός χώρος W, θα εννοούμε τον $(W, d_{n,2})$ ως μετρικό υπόχωρο του $(\mathbf{R}^n, d_{n,2})$, δηλαδή, το σύνολο W εφοδιασμένο με τον περιορισμό της ευκλείδιας μετρικής του $\mathbf{R}^n$ στο W. Με απλούστερα λόγια: οι αποστάσεις ανάμεσα στα στοιχεία του W είναι ακριβώς οι ίδιες με τις ευκλείδιες αποστάσεις τους.

3. **Η p-μετρική του Minkowski στον $\mathbf{R}^n$** $(1 \leq p \leq +\infty)$.

Θεωρούμε παράμετρο $p \in [1, +\infty]$ και τη συνάρτηση $d_{n,p} : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ με τύπο

$$d_{n,p}(x, y) = \begin{cases} \sqrt[p]{|x^{(1)} - y^{(1)}|^p + \cdots + |x^{(n)} - y^{(n)}|^p}, & \text{αν } 1 \leq p < +\infty, \\ \max_{1 \leq k \leq n} |x^{(k)} - y^{(k)}|, & \text{αν } p = +\infty, \end{cases}$$

για κάθε $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ και $y = (y^{(1)}, \ldots, y^{(n)})$ στο $\mathbf{R}^n$. Προσέξτε ότι η $d_{n,p}$ είναι γενίκευση της ευκλείδιας μετρικής $d_{n,2}$.

Θα δούμε, τώρα, ότι η $d_{n,p}$ είναι μετρική στον $\mathbf{R}^n$.

Λήμμα 4.2 *Έστω $1 < p < +\infty$ και $q = \frac{p}{p-1}$. Ισχύει $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ για κάθε $a, b \geq 0$.*

Απόδειξη: Η $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^p}{p} - x + \frac{1}{q}\right) = x^{p-1} - 1$ είναι ≥ 0, αν $1 \leq x < +\infty$, και ≤ 0, αν $0 \leq x \leq 1$. Άρα η συνάρτηση με τύπο $\frac{x^p}{p} - x + \frac{1}{q}$ είναι φθίνουσα στο $[0, 1]$ και αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και, επομένως, έχει ελάχιστη τιμή στο 1. Άρα,

$\frac{x^p}{p} - x + \frac{1}{q} \geq \frac{1^p}{p} - 1 + \frac{1}{q} = 0$ ή, ισοδύναμα, $x \leq \frac{x^p}{p} + \frac{1}{q}$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Αν, τώρα, $a \geq 0$ και $b > 0$, θέτουμε το $ab^{-\frac{q}{p}}$ στη θέση του x στην προηγούμενη ανισότητα και παίρνουμε την $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. Αν $a \geq 0$ και $b = 0$, η τελευταία ανισότητα γίνεται $0 \leq \frac{a^p}{p}$ και είναι, προφανώς, σωστή. Ο.Ε.Δ.

Λήμμα 4.3 ***Ανισότητα Hölder***. *Έστω $1 < p < +\infty$ και $q = \frac{p}{p-1}$. Για κάθε $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ και $b_1, \ldots, b_n \in \mathbf{R}$ ισχύει*

$$|a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n| \leq \sqrt[p]{|a_1|^p + \cdots + |a_n|^p}\,\sqrt[q]{|b_1|^q + \cdots + |b_n|^q}\,.$$

Απόδειξη: Αν $|a_1|^p + \cdots + |a_n|^p = 0$, τότε $a_1 = \ldots = a_n = 0$, οπότε η ανισότητα καταλήγει στην $0 \leq 0$, η οποία είναι σωστή. Ομοίως, αν $|b_1|^q + \cdots + |b_n|^q = 0$, τότε $b_1 = \ldots = b_n = 0$ και, πάλι, η ανισότητα καταλήγει στην $0 \leq 0$.

Υποθέτουμε, τώρα, ότι $|a_1|^p + \cdots + |a_n|^p > 0$ και $|b_1|^q + \cdots + |b_n|^q > 0$ και θέτουμε $A = \sqrt[p]{|a_1|^p + \cdots + |a_n|^p}$ και $B = \sqrt[q]{|b_1|^q + \cdots + |b_n|^q}$. Συνεπάγεται $\left|\frac{a_1}{A}\frac{b_1}{B} + \cdots + \frac{a_n}{A}\frac{b_n}{B}\right| \leq \frac{|a_1|}{A}\frac{|b_1|}{B} + \cdots + \frac{|a_n|}{A}\frac{|b_n|}{B} \leq \frac{1}{p}\frac{|a_1|^p}{A^p} + \frac{1}{q}\frac{|b_1|^q}{B^q} + \cdots + \frac{1}{p}\frac{|a_n|^p}{A^p} + \frac{1}{q}\frac{|b_n|^q}{B^q} = \frac{1}{p}\frac{|a_1|^p + \cdots + |a_n|^p}{A^p} + \frac{1}{q}\frac{|b_1|^q + \cdots + |b_n|^q}{B^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ και, επομένως, $|a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n| \leq AB = \sqrt[p]{|a_1|^p + \cdots + |a_n|^p}\,\sqrt[q]{|b_1|^q + \cdots + |b_n|^q}$. Ο.Ε.Δ.

Λήμμα 4.4 ***Ανισότητα Minkowski***. *Έστω $1 \leq p < +\infty$. Τότε για κάθε $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ και $b_1, \ldots, b_n \in \mathbf{R}$ ισχύει*

$$\sqrt[p]{|a_1 + b_1|^p + \cdots + |a_n + b_n|^p} \leq \sqrt[p]{|a_1|^p + \cdots + |a_n|^p} + \sqrt[p]{|b_1|^p + \cdots + |b_n|^p}\,.$$

Απόδειξη: Στην περίπτωση $p = 1$ η ανισότητα γίνεται $|a_1 + b_1| + \cdots + |a_n + b_n| \leq |a_1| + \cdots + |a_n| + |b_1| + \cdots + |b_n|$ και είναι, προφανώς, σωστή.

Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι $1 < p < +\infty$ και θέτουμε $q = \frac{p}{p-1}$. Έχουμε $|a_1 + b_1|^p + \cdots + |a_n + b_n|^p = |a_1 + b_1||a_1 + b_1|^{p-1} + \cdots + |a_n + b_n||a_n + b_n|^{p-1} \leq |a_1||a_1 + b_1|^{p-1} + \cdots + |a_n||a_n + b_n|^{p-1} + |b_1||a_1 + b_1|^{p-1} + \cdots + |b_n||a_n + b_n|^{p-1}$. Με εφαρμογή του Λήμματος 4.3, $|a_1||a_1 + b_1|^{p-1} + \cdots + |a_n||a_n + b_n|^{p-1} \leq \sqrt[p]{|a_1|^p + \cdots + |a_n|^p}\,\sqrt[q]{|a_1 + b_1|^p + \cdots + |a_n + b_n|^p}$ και $|b_1||a_1 + b_1|^{p-1} + \cdots + |b_n||a_n + b_n|^{p-1} \leq \sqrt[p]{|b_1|^p + \cdots + |b_n|^p}\,\sqrt[q]{|a_1 + b_1|^p + \cdots + |a_1 + b_n|^p}$. Συνεπάγεται ότι $|a_1 + b_1|^p + \cdots + |a_n + b_n|^p \leq \left(\sqrt[p]{|a_1|^p + \cdots + |a_n|^p} + \sqrt[p]{|b_1|^p + \cdots + |b_n|^p}\right) \cdot \sqrt[q]{|a_1 + b_1|^p + \cdots + |a_n + b_n|^p}$. Αν $|a_1 + b_1|^p + \cdots + |a_1 + b_n|^p > 0$, διαιρώντας τα δύο μέλη της τελευταίας ανισότητας με το $\sqrt[q]{|a_1 + b_1|^p + \cdots + |a_1 + b_n|^p}$, καταλήγουμε στην ανισότητα της εκφώνησης. Αν $|a_1 + b_1|^p + \cdots + |a_1 + b_n|^p = 0$, η ανισότητα της εκφώνησης είναι προφανής. Ο.Ε.Δ.

Λήμμα 4.5 *Για κάθε $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ και $b_1, \ldots, b_n \in \mathbf{R}$ ισχύει*

$$\max_{1 \leq k \leq n} |a_k + b_k| \leq \max_{1 \leq k \leq n} |a_k| + \max_{1 \leq k \leq n} |b_k|\,.$$

Απόδειξη: Θέτουμε $A = \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|$ και $B = \max_{1 \leq k \leq n} |b_k|$. Παίρνουμε τυχόν k με $1 \leq k \leq n$ και έχουμε $|a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k| \leq A + B$. Επομένως, $\max_{1 \leq k \leq n} |a_k + b_k| \leq A + B$. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 4.3 *Η $d_{n,p} : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ είναι μετρική στον $\mathbf{R}^n$ για κάθε $p \in [1, +\infty]$.*

Απόδειξη: Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η $d_{n,p}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες (i), (ii) και (iii) μίας μετρικής. Η ιδιότητα (iv) προκύπτει αν θέσουμε $a_k = x^{(k)} - z^{(k)}$ και $b_k = z^{(k)} - y^{(k)}$ για $k = 1, \ldots, n$ στις ανισότητες των Λημμάτων 4.4 και 4.5. Ο.Ε.Δ.

Είναι προφανές ότι όλες οι μετρικές $d_{n,p}$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ ταυτίζονται στην περίπτωση του χώρου $\mathbf{R}$. Πράγματι, για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$ έχουμε $d_{1,p}(x,y) = \sqrt[p]{|x-y|^p} = |x-y| = d_{1,2}(x,y)$, αν $1 \leq p < +\infty$, καθώς και $d_{1,\infty}(x,y) = \max_{1 \leq k \leq 1} |x-y| = |x-y| = d_{1,2}(x,y)$, αν $p = +\infty$.

Ορισμός 4.6 *Η μετρική $d_{n,p} : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ στο σύνολο $\mathbf{R}^n$ με τύπο*

$$d_{n,p}(x,y) = \begin{cases} \sqrt[p]{|x^{(1)} - y^{(1)}|^p + \cdots + |x^{(n)} - y^{(n)}|^p}, & \text{αν } 1 \leq p < +\infty, \\ \max_{1 \leq k \leq n} |x^{(k)} - y^{(k)}|, & \text{αν } p = +\infty, \end{cases}$$

*για κάθε $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ και $y = (y^{(1)}, \ldots, y^{(n)})$ στο $\mathbf{R}^n$ ονομάζεται **p-μετρική του Minkowski** ή, απλά, **μετρική του Minkowski** στον $\mathbf{R}^n$. Ο μετρικός χώρος $(\mathbf{R}^n, d_{n,p})$ ονομάζεται **n-διάστατος χώρος Minkowski**.*

Άρα, στην περίπτωση $p = 2$ ο n-διάστατος χώρος Minkowski είναι ο ίδιος με τον n-διάστατο ευκλείδιο χώρο.

Άσκηση 3: Πώς μεταβάλλεται η p-απόσταση Minkowski ανάμεσα στα σημεία $(1,0)$ και $(0,0)$ του $\mathbf{R}^2$ καθώς το p αυξάνει στο $[1, +\infty]$; Απαντήστε την ίδια ερώτηση για τα σημεία $(1,1)$ και $(0,0)$.

4. **Το σύνολο των κορυφών του μοναδιαίου κύβου.**

Θεωρούμε το υποσύνολο $E_n = \{(\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n)}) : \xi^{(1)} = \pm 1, \ldots, \xi^{(n)} = \pm 1\}$ του $\mathbf{R}^n$ και ορίζουμε τη συνάρτηση $d : E_n \times E_n \to \mathbf{R}$ με τύπο

$$d(x,y) = \text{ το πλήθος των } k \text{ για τα οποία } \xi^{(k)} \neq \eta^{(k)}$$

για κάθε $x = (\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n)})$ και $y = (\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)})$ στο E_n.

Είναι προφανές ότι η d ικανοποιεί τις τρεις πρώτες ιδιότητες μίας μετρικής. Αν πάρουμε $x = (\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n)})$, $y = (\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)})$ και $z = (\zeta^{(1)}, \ldots, \zeta^{(n)})$ στο E_n, τότε για κάθε k, για το οποίο $\xi^{(k)} \neq \eta^{(k)}$, ισχύει τουλάχιστον μία από τις $\xi^{(k)} \neq \zeta^{(k)}$, $\zeta^{(k)} \neq \eta^{(k)}$. Από αυτό συνεπάγεται ότι $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Άρα, η d είναι μετρική στο E_n. Παρατηρήστε ότι το σύνολο E_n είναι πεπερασμένο με 2^n στοιχεία και ότι το σύνολο τιμών της d είναι το $\{0, 1, \ldots, n\}$.

5. **Η ομοιόμορφη απόσταση συναρτήσεων.**

Θεωρούμε οποιοδήποτε μη κενό σύνολο A. Γνωρίζουμε ότι μία $f : A \to \mathbf{R}$ είναι φραγμένη, αν υπάρχει κάποιο $M \in \mathbf{R}$ (το οποίο εξαρτάται από την f) ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in A$.

Ορισμός 4.7 *Ορίζουμε*

$$B(A) = \{f : \text{η } f : A \to \mathbf{R} \text{ είναι φραγμένη}\}.$$

*Το $B(A)$ ονομάζεται **ο χώρος των φραγμένων πραγματικών συναρτήσεων στο** A.*

Έχουμε ήδη ορίσει την ομοιόμορφη απόσταση $d_u(f,g) = \sup_{x\in A}|f(x)-g(x)|$ συναρτήσεων $f : A \to \mathbf{R}$ και $g : A \to \mathbf{R}$. Αν οι f, g είναι και φραγμένες, ισχύει $0 \leq d_u(f,g) < +\infty$. Πράγματι, αν υπάρχουν $M, N \in \mathbf{R}$ ώστε $|f(x)| \leq M$ και $|g(x)| \leq N$ για κάθε $x \in A$, συνεπάγεται $|f(x)-g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)| \leq M+N$ για κάθε $x \in A$ και, επομένως, $d_u(f,g) = \sup_{x\in A}|f(x)-g(x)| \leq M+N < +\infty$.

Πρόταση 4.4 *Η $d_u : B(A) \times B(A) \to \mathbf{R}$ είναι μετρική στο $B(A)$.*

Απόδειξη: Η d_u ικανοποιεί, προφανώς, τις ιδιότητες (i) και (iii) μίας μετρικής. Τώρα, αν $\sup_{x\in A}|f(x)-g(x)| = d_u(f,g) = 0$, συνεπάγεται $|f(x)-g(x)| = 0$ για κάθε $x \in A$ και, επομένως, $f = g$. Άρα, η d_u ικανοποιεί και την ιδιότητα (ii) μίας μετρικής. Επίσης, για κάθε $x \in A$ έχουμε $|f(x)-g(x)| \leq |f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)| \leq d_u(f,h)+d_u(h,g)$ και, επομένως, $d_u(f,g) = \sup_{x\in A}|f(x)-g(x)| \leq d_u(f,h)+d_u(h,g)$. Ο.Ε.Δ.

Ορισμός 4.8 *Η $d_u : B(A) \times B(A) \to \mathbf{R}$ ονομάζεται **ομοιόμορφη μετρική** ή **ομοιόμορφη απόσταση** ή **μετρική της ομοιόμορφης σύγκλισης στον** $B(A)$.*

4.2 Περιοχές, ανοικτά σύνολα, κλειστά σύνολα.

Ορισμός 4.9 *Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος. Αν $a \in X$ και $\epsilon > 0$, ονομάζουμε **ϵ-περιοχή του** a ή **περιοχή κέντρου** a **και ακτίνας** ϵ, και συμβολίζουμε $N_a(\epsilon)$ ή $N(a;\epsilon)$, το σύνολο*

$$N_a(\epsilon) = N(a;\epsilon) = \{x \in X : d(x,a) < \epsilon\}.$$

*Όταν λέμε **περιοχή** N_a **του** a εννοούμε κάποια ϵ-περιοχή του a για κάποιο αδιευκρίνιστο $\epsilon > 0$.*

Άσκηση 4: Έστω μετρικός χώρος (X,d), $a \in X$. Αποδείξτε ότι $\bigcup_{\epsilon>0} N_a(\epsilon) = X$ και $\bigcap_{\epsilon>0} N_a(\epsilon) = \{a\}$.

Άσκηση 5: Έστω μετρικός χώρος (X,d) και $a_1, a_2 \in X$ με $a_1 \neq a_2$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $N_{a_1}(\epsilon) \cap N_{a_2}(\epsilon) = \emptyset$.

Παραδείγματα:
1. Στον $\mathbf{R}$ οι περιοχές είναι γνωστά σε μας σύνολα. Πράγματι, για κάθε $a \in \mathbf{R}$ και $\epsilon > 0$, το $N_a(\epsilon)$ είναι το σύνολο όλων των σημείων της ευθείας των οποίων η (ευκλείδια, εννοείται) απόσταση από το a είναι μικρότερη από ϵ, δηλαδή, το ανοικτό διάστημα $(a-\epsilon, a+\epsilon)$, με κέντρο το a και πλάτος 2ϵ.

Ομοίως, στον $\mathbf{R}^2$ η περιοχή κέντρου a και ακτίνας $\epsilon > 0$ είναι το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόσταση από το a είναι μικρότερη από ϵ, δηλαδή, ο ανοικτός δίσκος με κέντρο a και ακτίνα ϵ.

Τέλος, στον $\mathbf{R}^3$ η περιοχή κέντρου a και ακτίνας $\epsilon > 0$ είναι το σύνολο όλων των σημείων του χώρου των οποίων η απόσταση από το a είναι μικρότερη από ϵ, δηλαδή, η ανοικτή μπάλα με κέντρο a και ακτίνα ϵ.

Είναι φανερό ότι από τα παραδείγματα του δίσκου και της μπάλας στους $\mathbf{R}^2$ και $\mathbf{R}^3$, αντιστοίχως, προέρχονται οι όροι *κέντρο* και *ακτίνα* στη γενική περίπτωση των περιοχών σε μετρικούς χώρους. Μάλιστα, και στην περίπτωση του ευκλείδιου χώρου $\mathbf{R}^n$ με $n \geq 4$, στην οποία δεν υπάρχει γεωμετρική εποπτεία, χρησιμοποιούμε τον όρο *(n-διάστατη) ανοικτή μπάλα κέντρου a και ακτίνας* ϵ για την περιοχή $N_a(\epsilon)$.
2. Θεωρούμε μη κενό σύνολο X και τη διακριτή μετρική δ_X στο X. Οι μόνες τιμές της δ_X είναι 0 και 1. Είναι φανερό, λοιπόν, ότι για κάθε $a \in X$ έχουμε $N_a(\epsilon) = \{a\}$, αν $0 < \epsilon \leq 1$, και $N_a(\epsilon) = X$, αν $1 < \epsilon$.
3. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και οποιοδήποτε μη κενό $W \subseteq X$ το οποίο εφοδιάζουμε με τον περιορισμό της d από το X στο W. Δηλαδή, θεωρούμε τον μετρικό υπόχωρο (W, d) του (X, d). Θα δούμε, τώρα, ποια είναι η σχέση ανάμεσα στις περιοχές του (X, d) και στις περιοχές του (W, d) και, για να μην υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, συμβολίζουμε $N_a^X(\epsilon)$ τις πρώτες και $N_a^W(\epsilon)$ τις δεύτερες. Από τους ορισμούς έχουμε $N_a^X(\epsilon) = \{x \in X : d(x, a) < \epsilon\}$ για κάθε $a \in X$ και $N_a^W(\epsilon) = \{x \in W : d(x, a) < \epsilon\}$ για κάθε $a \in W$. Είναι προφανές ότι, αν το κέντρο a ανήκει στο μικρότερο σύνολο W, τότε

$$N_a^W(\epsilon) = N_a^X(\epsilon) \cap W .$$

Δηλαδή, *οι περιοχές στον (W, d) είναι οι τομές των περιοχών (με ίδιες ακτίνες και κέντρα) στον (X, d) με το W.*

Ας εξετάσουμε το απλό παράδειγμα του $W = (0, 1] \cup [4, 7]$ ως υπόχωρου του $\mathbf{R}$ (με την ευκλείδια, εννοείται, μετρική). Για $a \in (0, 1] \cup [4, 7]$ η περιοχή στον W με κέντρο a και ακτίνα ϵ είναι η τομή του ανοικτού διαστήματος $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ με το $(0, 1] \cup [4, 7]$. Για παράδειγμα, η περιοχή του $\frac{3}{4}$ με ακτίνα $\epsilon > 0$, είναι το $(\frac{3}{4} - \epsilon, \frac{3}{4} + \epsilon)$, αν $0 < \epsilon \leq \frac{1}{4}$, το $(\frac{3}{4} - \epsilon, 1]$, αν $\frac{1}{4} < \epsilon \leq \frac{3}{4}$, το $(0, 1]$, αν $\frac{3}{4} < \epsilon \leq \frac{13}{4}$, το $(0, 1] \cup [4, \frac{3}{4} + \epsilon)$, αν $\frac{13}{4} < \epsilon \leq \frac{25}{4}$ και, τέλος, το $(0, 1] \cup [4, 7]$, αν $\frac{25}{4} < \epsilon$.

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι το γεωμετρικό σχήμα των περιοχών μπορεί να είναι τελείως διαφορετικό από το συνηθισμένο σχήμα των διαστημάτων, των δίσκων και των μπαλών. Αυτό θα φανεί και στο επόμενο παράδειγμα.
4. Θεωρούμε τον διδιάστατο χώρο του Minkowski $(\mathbf{R}^2, d_{2,\infty})$. Θυμόμαστε ότι $d_{2,\infty}(x, y) = \max\big(|x^{(1)} - y^{(1)}|, |x^{(2)} - y^{(2)}|\big)$ για κάθε $x = (x^{(1)}, x^{(2)})$ και $y = (y^{(1)}, y^{(2)})$ στον $\mathbf{R}^2$. Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι η περιοχή του $a = (a^{(1)}, a^{(2)})$ με ακτίνα $\epsilon > 0$ είναι το ανοικτό τετράγωνο με κέντρο a, μήκος πλευράς ίσο με 2ϵ και με πλευρές παράλληλες στους κύριους άξονες.

Θεωρούμε, τώρα, τον χώρο του Minkowski $(\mathbf{R}^2, d_{2,1})$, όπου $d_{2,1}(x, y) = |x^{(1)} - y^{(1)}| + |x^{(2)} - y^{(2)}|$ για κάθε $x = (x^{(1)}, x^{(2)})$ και $y = (y^{(1)}, y^{(2)})$ στον $\mathbf{R}^2$. Τώρα, η περιοχή του $a = (a^{(1)}, a^{(2)})$ με ακτίνα $\epsilon > 0$ είναι το ανοικτό τετράγωνο με κέντρο a, μήκος πλευράς ίσο με $\sqrt{2}\,\epsilon$ και με πλευρές παράλληλες στις κύριες διαγωνίους.

Άσκηση 6: Ποιο είναι το σχήμα των περιοχών στους τριδιάστατους χώρους Minkowski $(\mathbf{R}^3, d_{3,\infty})$ και $(\mathbf{R}^3, d_{3,1})$;

Λήμμα 4.6 *Έστω $1 \leq p < q < +\infty$. Για κάθε $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ ισχύει*

$$\sqrt[q]{|a_1|^q + \cdots + |a_n|^q} \leq \sqrt[p]{|a_1|^p + \cdots + |a_n|^p} \leq n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \sqrt[q]{|a_1|^q + \cdots + |a_n|^q} .$$

Επίσης, αν $1 \le p < q = +\infty$,

$$\max_{1\le k\le n} |a_k| \le \sqrt[p]{|a_1|^p + \cdots + |a_n|^p} \le n^{\frac{1}{p}} \max_{1\le k\le n} |a_k|\,.$$

Απόδειξη: Αν $a_1 = \ldots = a_n = 0$, η διπλή ανισότητα καταλήγει στην $0 \le 0 \le 0$, η οποία ισχύει. Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι τουλάχιστον ένα από τα $a_1, \ldots, a_n$ είναι $\neq 0$, οπότε $|a_1|^p + \cdots + |a_n|^p > 0$. Θέτουμε $A = \sqrt[p]{|a_1|^p + \cdots + |a_n|^p}$ και έχουμε $\frac{|a_k|}{A} \le 1$ και, επομένως, $\frac{|a_k|^q}{A^q} \le \frac{|a_k|^p}{A^p}$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$. Αθροίζοντας, $\frac{|a_1|^q + \cdots + |a_n|^q}{A^q} \le \frac{|a_1|^p + \cdots + |a_n|^p}{A^p} = 1$, οπότε $|a_1|^q + \cdots + |a_n|^q \le A^q$ ή, ισοδύναμα, $\sqrt[q]{|a_1|^q + \cdots + |a_n|^q} \le A = \sqrt[p]{|a_1|^p + \cdots + |a_n|^p}$.

Για τη δεξιά ανισότητα εφαρμόζουμε το Λήμμα 4.3: $|a_1|^p + \cdots + |a_n|^p \le \sqrt[\frac{q}{p}]{(|a_1|^p)^{\frac{q}{p}} + \cdots + (|a_n|^p)^{\frac{q}{p}}}\ \sqrt[\frac{q}{q-p}]{1^{\frac{q}{q-p}} + \cdots + 1^{\frac{q}{q-p}}} = n^{\frac{q-p}{q}} \sqrt[\frac{q}{p}]{|a_1|^q + \cdots + |a_n|^q}$ και, επομένως, $\sqrt[p]{|a_1|^p + \cdots + |a_n|^p} \le n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \sqrt[q]{|a_1|^q + \cdots + |a_n|^q}$.

Στην περίπτωση $q = +\infty$, υπάρχει κάποιο k_0 ώστε $|a_{k_0}| = \max_{1\le k\le n} |a_k|$. Τότε $|a_{k_0}|^p \le |a_1|^p + \cdots + |a_n|^p \le n|a_{k_0}|^p$ και η διπλή ανισότητα, η οποία πρέπει να αποδειχθεί, είναι, τώρα, προφανής.

5. Θεωρούμε τους χώρους Minkowski $(\mathbf{R}^n, d_{n,p})$ και $(\mathbf{R}^n, d_{n,q})$, δηλαδή, το σύνολο $\mathbf{R}^n$ εφοδιασμένο με τις μετρικές $d_{n,p}$ και $d_{n,q}$ και υποθέτουμε $1 \le p < q \le +\infty$.

Θα μελετήσουμε τη σχέση ανάμεσα στις περιοχές των δύο χώρων και παίρνουμε τυχόν $a \in \mathbf{R}^n$ και $\epsilon > 0$. Για να μην υπάρξει σύγχυση, συμβολίζουμε $N_a^p(\epsilon)$ και $N_a^q(\epsilon)$ τις αντίστοιχες περιοχές στους δύο χώρους. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.6, αποδεικνύεται πολύ εύκολα ότι

$$N_a^p(\epsilon) \subseteq N_a^q(\epsilon) \subseteq N_a^p\big(n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}\epsilon\big)\,.$$

Άσκηση 7: Για κάθε $\epsilon > 0$ περιγράψτε πλήρως την περιοχή του $(1, 1, 1)$ με ακτίνα ϵ στον χώρο $E_3 = \{(\pm 1, \pm 1, \pm 1)\}$ με τη μετρική που έχει τύπο $d(x, y) =$ το πλήθος των διαφορετικών συντεταγμένων των $x = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)})$ και $y = (\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \eta^{(3)})$ στο E_3.

Άσκηση 8: Θεωρήστε τον μετρικό χώρο $B\big([0, 1]\big)$ με την ομοιόμορφη μετρική d_u και το στοιχείο $f \in B\big([0, 1]\big)$ με τύπο $f(x) = x^2$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Περιγράψτε γεωμετρικά όλα τα στοιχεία της περιοχής του f με ακτίνα $\epsilon > 0$.

Άσκηση 9: Θεωρήστε, πάλι, τον μετρικό χώρο $B\big([0, 1]\big)$ με την ομοιόμορφη μετρική d_u και το στοιχείο $f \in B\big([0, 1]\big)$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } 0 \le x \le \frac{1}{3}\,, \\ 1, & \text{αν } \frac{1}{3} < x \le 1. \end{cases}$
Αποδείξτε ότι *όλα* τα στοιχεία της περιοχής του f με ακτίνα $\epsilon \le \frac{1}{2}$ είναι συναρτήσεις στο $[0, 1]$ οι οποίες *δεν* είναι συνεχείς στο $\frac{1}{3}$. Αποδείξτε, όμως, ότι, αν $\frac{1}{2} < \epsilon$, η περιοχή του f με ακτίνα ϵ περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο το οποίο είναι συνάρτηση συνεχής στο $[0, 1]$.

Ορισμός 4.10 *Έστω μετρικός χώρος* (X, d) *και* $A \subseteq X$. *Αν για κάθε* $x \in A$ *υπάρχει κάποια περιοχή* N_x *του* x *η οποία περιέχεται στο* A, *δηλαδή, αν για κάθε*

$x \in A$ υπάρχει $\epsilon = \epsilon(x) > 0$ ώστε $N_x(\epsilon) \subseteq A$, τότε το A ονομάζεται ***ανοικτό υποσύνολο του*** *(X, d) ή* ***ανοικτό υποσύνολο του*** *X, αν δεν υπάρχει αμφιβολία για την d.*

Παραδείγματα:
1. Έστω A οποιοδήποτε ανοικτό διάστημα στον $\mathbf{R}$. Δηλαδή, $A = (a, b)$ ή $(a, +\infty)$ ή $(-\infty, b)$ ή $(-\infty, +\infty)$. Αν x είναι *οποιοδήποτε* σημείο του A, παίρνουμε ϵ το πολύ ίσο με την απόσταση του x από το κοντινότερο προς το x άκρο του A. (Αν $A = (-\infty, +\infty)$, παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$.) Τότε, προφανώς, $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq A$. Άρα κάθε ανοικτό διάστημα είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R}$.

Έστω, τώρα, ότι το A είναι οποιοδήποτε κλειστό διάστημα $[a, b]$. Δεν υπάρχει *καμία* περιοχή του a η οποία περιέχεται στο A. Το ίδιο ισχύει και για το b. Άρα *υπάρχει τουλάχιστον ένα* σημείο του A του οποίου *καμία περιοχή* δεν περιέχεται στο A και, επομένως, το A δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R}$. Ομοίως, κανένα από τα διαστήματα $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $[a, b)$ και $(a, b]$ δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R}$.

Στο τέλος της ενότητας αυτής θα περιγράψουμε πλήρως όλα τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbf{R}$.
2. Έστω A οποιοδήποτε ανοικτό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στον $\mathbf{R}^2$. Φυσικά, όταν λέμε ανοικτό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο εννοούμε ότι δεν περιέχει κανένα σημείο της περιφέρειάς του. Αν x είναι *οποιοδήποτε* σημείο του A είναι προφανές ότι *υπάρχει* ανοικτός δίσκος κέντρου x και με αρκετά μικρή ακτίνα ο οποίος να περιέχεται στο A. Άρα, το A είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R}^2$.

Έστω, τώρα, ότι το A είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στον $\mathbf{R}^2$ που περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο της περιφέρειάς του. Αν x είναι σημείο του A και, ταυτόχρονα, σημείο της περιφέρειας του ορθογώνιου παραλληλογράμμου, *δεν υπάρχει κανένας* ανοικτός δίσκος, όσο μικρός κι αν είναι, κέντρου x ο οποίος να περιέχεται στο A. Άρα *υπάρχει* τουλάχιστον ένα σημείο του A του οποίου *καμία* περιοχή δεν περιέχεται στο A και, επομένως, το A δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R}^2$.

Ομοίως, αν A είναι ανοικτός δίσκος, δηλαδή, δίσκος που δεν περιέχει κανένα σημείο της περιφέρειάς του, το A είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R}^2$. Ενώ, αν το A είναι δίσκος στον $\mathbf{R}^2$ που περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο της περιφέρειάς του, το A δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R}^2$.

Διαισθητικά, μπορούμε να διακρίνουμε αν ένα συγκεκριμένο σύνολο A είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R}^2$, αν καταφέρουμε να φτιάξουμε μια γεωμετρική εικόνα του στο χαρτί (ή στο μυαλό μας). Έστω, για παράδειγμα, ότι έχουμε μία απλή σχετικά καμπύλη γ στο επίπεδο η οποία χωρίζει το επίπεδο σε τρία υποσύνολα: το σύνολο A_1 των σημείων που βρίσκονται στη μία μεριά της γ, το σύνολο A_2 των σημείων που βρίσκονται στην άλλη μεριά της γ και το σύνολο των σημείων της γ. Τότε καθένα από τα δύο πρώτα σύνολα είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R}^2$. Αν, όμως, στο A_1 ή στο A_2 επισυνάψουμε ένα τουλάχιστον από τα σημεία της γ, τότε το προκύπτον σύνολο δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R}^2$.
3. Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, είναι εύκολο να δούμε ότι οποιαδήποτε ανοικτή μπάλα ή ανοικτό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R}^3$. Επίσης, οποιαδήποτε μπάλα ή ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο που περιέχει

τουλάχιστον ένα σημείο της συνοριακής επιφάνειας δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R}^3$.

Και πάλι, διαισθητικά, μπορούμε σε πολλές περιπτώσεις να διακρίνουμε αν ένα σύνολο A είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R}^3$. Έστω, για παράδειγμα, ότι έχουμε μία απλή σχετικά επιφάνεια Γ στον χώρο η οποία χωρίζει τον χώρο σε τρία υποσύνολα: το σύνολο A_1 των σημείων που βρίσκονται στη μία μεριά της Γ, το σύνολο A_2 των σημείων που βρίσκονται στην άλλη μεριά της Γ και το σύνολο των σημείων της Γ. Τότε καθένα από τα δύο πρώτα σύνολα είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R}^3$ ενώ, αν στο A_1 ή στο A_2 επισυνάψουμε ένα τουλάχιστον από τα σημεία της Γ, τότε το προκύπτον σύνολο δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R}^3$.

Άσκηση 10: Αποδείξτε ότι κάθε μη κενό ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R}$ περιέχει και ρητούς και άρρητους αριθμούς.

Άσκηση 11: Ποια από τα παρακάτω είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbf{R}$; Το A και το $\mathbf{R}\setminus A$, όπου A είναι οποιοδήποτε πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbf{R}$, το $\mathbf{N}$, το $\mathbf{Q}$, το $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$, το $\mathbf{R}\setminus\{\frac{1}{n}:n\in\mathbf{N}\}$ και το $\mathbf{R}\setminus\big(\{0\}\cup\{\frac{1}{n}:n\in\mathbf{N}\}\big)$.

Άσκηση 12: Ποια από τα παρακάτω είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbf{R}^2$; Το A και το $\mathbf{R}^2\setminus A$, όπου A είναι οποιοδήποτε πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbf{R}^2$, το $\{(x^{(1)},x^{(2)}):x^{(1)}x^{(2)}>1\}$, το $\{(x^{(1)},x^{(2)}):x^{(1)}x^{(2)}\leq 1\}$, το $\{(x^{(1)},x^{(2)}):x^{(1)}>0\}$, το $\mathbf{R}^2\setminus\{(n,0):n\in\mathbf{N}\}$, το $\mathbf{R}^2\setminus\{(\frac{1}{n},0):n\in\mathbf{N}\}$, το $\mathbf{R}^2\setminus\big(\{(0,0)\}\cup\{(\frac{1}{n},\frac{1}{m}):n,m\in\mathbf{N}\}\big)$, το $\{(x^{(1)},0):a\leq x^{(1)}\leq b\}$, το $\{(x^{(1)},0):a<x^{(1)}<b\}$, το $\mathbf{R}^2\setminus\{(x^{(1)},0):a\leq x^{(1)}\leq b\}$, το $\mathbf{R}^2\setminus\{(x^{(1)},0):a<x^{(1)}<b\}$, το $\mathbf{Q}^2$, το $\mathbf{R}^2\setminus\mathbf{Q}^2$, το $\mathbf{R}^2\setminus\big([0,1]\big)\times\{\frac{1}{n}:n\in\mathbf{N}\}\big)$ και το $\mathbf{R}^2\setminus\big([0,1]\big)\times(\{0\}\cup\{\frac{1}{n}:n\in\mathbf{N}\})\big)$.

Άσκηση 13: Ποια από τα παρακάτω είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbf{R}^3$; Το A και το $\mathbf{R}^3\setminus A$, όπου A είναι οποιοδήποτε πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbf{R}^3$, το $\{(x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)}):x^{(1)}+x^{(2)}+x^{(3)}>1\}$, το $\{(x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)}):(x^{(1)})^2+(x^{(2)})^2<x^{(3)}\}$, το $\{(x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)}):x^{(1)}>0\}$, το $\mathbf{R}^3\setminus\{(n,0,1):n\in\mathbf{N}\}$, το $\mathbf{R}^3\setminus\big(\{(0,0,0)\}\cup\{(\frac{1}{n},0,0):n\in\mathbf{N}\}\big)$, το $\{(x^{(1)},0,0):a<x^{(1)}<b\}$, το $\mathbf{R}^3\setminus\{(x^{(1)},0,0):a\leq x^{(1)}\leq b\}$, το $\mathbf{Q}^3$, το $\mathbf{R}^3\setminus\mathbf{Q}^3$ και το $\mathbf{R}^3\setminus\{(x^{(1)},x^{(2)},0):a\leq x^{(1)}\leq b, c\leq x^{(2)}\leq d\}$.

Άσκηση 14: Έστω $a_1,\dots,a_n\in\mathbf{R}$ τουλάχιστον ένα εκ των οποίων είναι $\neq 0$ και $a\in\mathbf{R}$. Το υποσύνολο $\Gamma=\{x=(x^{(1)},\dots,x^{(n)}):a_1x^{(1)}+\cdots+a_nx^{(n)}=a\}$ του $\mathbf{R}^n$ ονομάζεται **υπερεπίπεδο του $\mathbf{R}^n$**. Στην περίπτωση $n=1$ το υποσύνολο αυτό του $\mathbf{R}$ είναι μονοσύνολο, στην περίπτωση $n=2$ είναι μία ευθεία στον $\mathbf{R}^2$ και στην περίπτωση $n=3$ είναι ένα επίπεδο στον $\mathbf{R}^3$. Η εξίσωση $a_1x^{(1)}+\cdots+a_nx^{(n)}=a$ ονομάζεται **εξίσωση του υπερεπιπέδου** Γ. Τα σύνολα $A_1=\{x=(x^{(1)},\dots,x^{(n)}):a_1x^{(1)}+\cdots+a_nx^{(n)}>a\}$ και $A_2=\{x=(x^{(1)},\dots,x^{(n)}):a_1x^{(1)}+\cdots+a_nx^{(n)}<a\}$ ονομάζονται **ανοικτοί ημιχώροι** με συνοριακό υπερεπίπεδο το Γ.

Αποδείξτε ότι οι δύο ανοικτοί ημιχώροι A_1 και A_2 είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbf{R}^n$. (Υπόδειξη: Θεωρήστε τον A_1 και τυχόν $x=(x^{(1)},\dots,x^{(n)})\in A_1$. Θέσατε $\epsilon=\frac{a_1x^{(1)}+\cdots+a_nx^{(n)}-a}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}}>0$ και αποδείξτε ότι $N_x(\epsilon)\subseteq A_1$.)

4. Έστω μη κενό X με τη διακριτή μετρική δ_X και οποιοδήποτε $A \subseteq X$. Αν $x \in A$, τότε $N_x(1) = \{x\} \subseteq A$. Άρα, για κάθε $x \in A$ υπάρχει περιοχή του x η οποία περιέχεται στο A και, επομένως, το A είναι ανοικτό υποσύνολο του (X, δ_X). Έχουμε, λοιπόν, ότι *κάθε* υποσύνολο του X είναι ανοικτό υποσύνολο του (X, δ_X).

5. Θεωρούμε τους χώρους Minkowski $(\mathbf{R}^n, d_{n,p})$ και $(\mathbf{R}^n, d_{n,q})$ με στόχο να συγκρίνουμε τα ανοικτά υποσύνολα του ενός με τα ανοικτά υποσύνολα του άλλου. Όπως έχουμε ήδη κάνει, συμβολίζουμε $N_a^p(\epsilon)$ και $N_a^q(\epsilon)$ τις αντίστοιχες περιοχές στους δύο χώρους.

Υποθέτουμε $1 \leq p < q \leq +\infty$ και έστω A τυχόν ανοικτό υποσύνολο του $(\mathbf{R}^n, d_{n,p})$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $a \in A$, οπότε υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $N_a^p(\epsilon) \subseteq A$ και συνεπάγεται $N_a^q\big(n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\epsilon\big) \subseteq A$. Άρα, για κάθε $a \in A$ υπάρχει περιοχή του στον $(\mathbf{R}^n, d_{n,q})$ η οποία περιέχεται στο A. Επομένως, το A είναι ανοικτό υποσύνολο του $(\mathbf{R}^n, d_{n,q})$.

Αντιστρόφως, έστω A τυχόν ανοικτό υποσύνολο του $(\mathbf{R}^n, d_{n,q})$. Παίρνουμε $a \in A$, οπότε υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $N_a^q(\epsilon) \subseteq A$. Συνεπάγεται $N_a^p(\epsilon) \subseteq A$. Άρα, για κάθε $a \in A$ υπάρχει περιοχή του στον $(\mathbf{R}^n, d_{n,p})$ η οποία περιέχεται στο A. Επομένως, το A είναι ανοικτό υποσύνολο του $(\mathbf{R}^n, d_{n,p})$.

Άρα, τα ανοικτά υποσύνολα του $(\mathbf{R}^n, d_{n,p})$ είναι τα ίδια με τα ανοικτά υποσύνολα του $(\mathbf{R}^n, d_{n,q})$.

Ορισμός 4.11 *Έστω μη κενό σύνολο X εφοδιασμένο με δύο μετρικές d_1 και d_2. Οι δύο αυτές μετρικές ονομάζονται* ***ισοδύναμες****, αν τα ανοικτά υποσύνολα του (X, d_1) είναι τα ίδια με τα ανοικτά υποσύνολα του (X, d_2).*

Παράδειγμα:
Όλες οι μετρικές Minkowski στο $\mathbf{R}^n$ είναι ανά δύο ισοδύναμες.

Άσκηση 15: Έστω X οποιοδήποτε πεπερασμένο μη κενό σύνολο. Αποδείξτε ότι οποιεσδήποτε δύο μετρικές στο X είναι ισοδύναμες. (Υπόδειξη: Μία από τις μετρικές στο X είναι η δ_X. Ποια είναι τα ανοικτά υποσύνολα του (X, δ_X); Αποδείξτε το ίδιο για κάθε άλλη μετρική στο X.)

Άσκηση 16: Έστω μη κενό X και μετρικές d_1 και d_2 στο X. Θα συμβολίσουμε $N_x^{d_1}$ και $N_x^{d_2}$ τις περιοχές του x ως προς τις μετρικές d_1 και d_2, αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.
1. Οι d_1 και d_2 είναι ισοδύναμες.
2. Για κάθε $x \in X$ και κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $N_x^{d_1}(\delta) \subseteq N_x^{d_2}(\epsilon)$ και, αντιστρόφως, για κάθε $x \in X$ και κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $N_x^{d_2}(\delta) \subseteq N_x^{d_1}(\epsilon)$.

Άσκηση 17: Έστω μετρικός χώρος (X, d). Ορίζουμε $d' : X \times X \to \mathbf{R}$ με τον τύπο $d'(x, y) = \frac{d(x,y)}{d(x,y)+1}$ για κάθε $x, y \in X$.
1. Αποδείξτε ότι η d' είναι μετρική στο X.
2. Αποδείξτε ότι η d' είναι φραγμένη μετρική.
3. Αποδείξτε ότι οι d και d' είναι ισοδύναμες. (Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι, αν $\delta =$

$\begin{cases} 1, & \frac{1}{2} \leq \epsilon, \\ \frac{\epsilon}{1-\epsilon}, & 0 < \epsilon \leq \frac{1}{2}, \end{cases}$ τότε $N_x^d(\delta) \subseteq N_x^{d'}(\epsilon)$. Επίσης, αν $\delta = \frac{\epsilon}{\epsilon+1}$, τότε $N_x^{d'}(\delta) \subseteq N_x^d(\epsilon)$. Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης 16.)

Άσκηση 18: Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ συνεχείς στο $[a,b]$ ώστε $g(x) < f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Θεωρούμε, επίσης, τον μετρικό υπόχωρο $C([a,b]) = \{h : h$ συνεχής στο $[a,b]\}$ του $B([a,b])$ με την ομοιόμορφη μετρική d_u. Αποδείξτε ότι το $A = \{h \in C([a,b]) : g(x) < h(x) < f(x)\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\big(C([a,b]), d_u\big)$. (Υπόδειξη: Πάρτε οποιαδήποτε $h \in A$ και, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Μεγίστου-Ελαχίστου, αποδείξτε ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $g(x) + \epsilon \leq h(x) \leq f(x) - \epsilon$ για κάθε $x \in [a,b]$.)

Ορισμός 4.12 *Έστω $A \subseteq X$. Το A ονομάζεται* ***κλειστό υποσύνολο του*** (X,d), *αν το συμπλήρωμά του, $X \setminus A$, είναι ανοικτό υποσύνολο του (X,d).*

Πρόταση 4.5 *1. Το A είναι κλειστό υποσύνολο του (X,d) αν και μόνον αν το $X \setminus A$ είναι ανοικτό υποσύνολο του (X,d).*
2. Το A είναι ανοικτό υποσύνολο του (X,d) αν και μόνον αν το $X \setminus A$ είναι κλειστό υποσύνολο του (X,d).

Απόδειξη: 1. Αυτό δεν είναι τίποτα άλλο από τον Ορισμό 4.12.
2. Αν το A είναι ανοικτό υποσύνολο του (X,d), το $X \setminus (X \setminus A) = A$ είναι ανοικτό υποσύνολο του (X,d) και, επομένως, το $X \setminus A$ είναι κλειστό υποσύνολο του (X,d). Αντιστρόφως, αν το $X \setminus A$ είναι κλειστό υποσύνολο του (X,d), το $A = X \setminus (X \setminus A)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του (X,d). Ο.Ε.Δ.

Παραδείγματα:
1. Έστω οποιοδήποτε κλειστό διάστημα $[a,b]$ ή $[a,+\infty)$ ή $(-\infty,b]$ ή $(-\infty,+\infty)$ του $\mathbf{R}$. Το συμπληρωματικό σύνολο είναι το $(-\infty,a) \cup (b,+\infty)$ ή $(-\infty,a)$ ή $(b,+\infty)$ ή το $\emptyset$, αντιστοίχως. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι όλα αυτά τα σύνολα είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbf{R}$. Ειδικά για το $\emptyset$ ισχύει ότι είναι ανοικτό υποσύνολο οποιουδήποτε μετρικού χώρου και αυτό θα αποδειχθεί σε λίγο στην Πρόταση 4.6.1. Συμπεραίνουμε ότι όλα τα κλειστά διαστήματα είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbf{R}$.

Αν πάρουμε το διάστημα (a,b), το συμπληρωματικό του σύνολο είναι το $(-\infty,a] \cup [b,+\infty)$, το οποίο δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R}$. Άρα το (a,b) δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}$. Ομοίως, κάθε άλλο διάστημα $[a,b)$ ή $(a,b]$ ή $(-\infty,b)$ ή $(a,+\infty)$ δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}$.
2. Όπως και στο παράδειγμα για τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbf{R}^2$, μπορούμε, διαισθητικά, να καταλάβουμε αν ένα συγκεκριμένο σύνολο A είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}^2$, αν συλλάβουμε τη γεωμετρική εικόνα του. Για παράδειγμα, έστω μία απλή σχετικά καμπύλη γ στο επίπεδο που χωρίζει το επίπεδο σε τρία υποσύνολα: το σύνολο A_1 των σημείων που βρίσκονται στη μία μεριά της γ, το σύνολο A_2 των σημείων που βρίσκονται στην άλλη μεριά της γ και το σύνολο των σημείων της γ. Τότε τα σύνολα $A_1 \cup \gamma$ και $A_2 \cup \gamma$ είναι και τα δύο κλειστά υποσύνολα του $\mathbf{R}^2$. Αν, όμως, από το $A_1 \cup \gamma$ ή από το $A_2 \cup \gamma$ αφαιρέσουμε ένα

τουλάχιστον από τα σημεία της γ, τότε το προκύπτον σύνολο δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}^2$.

Για παράδειγμα, όλα τα κλειστά ορθογώνια παραλληλόγραμμα και όλοι οι κλειστοί δίσκοι στον $\mathbf{R}^2$ είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbf{R}^2$. Εννοείται ότι ένα κλειστό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο περιέχει όλα τα σημεία της περιφέρειάς του και ένας κλειστός δίσκος περιέχει, επίσης, όλα τα σημεία της περιφέρειάς του.

Ακόμη, ένα ευθύγραμμο τμήμα (μαζί με τα άκρα του), μία ευθεία, η περιφέρεια ενός δίσκου και η περιφέρεια ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbf{R}^2$. Και, γενικότερα, οποιαδήποτε σχετικά απλή καμπύλη γ (μαζί με τα άκρα της) είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}^2$. Όλα αυτά τα παραδείγματα τα μελετάμε μέσω των συμπληρωματικών συνόλων.

3. Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, είναι οποιαδήποτε κλειστή μπάλα ή κλειστό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}^3$ ενώ οποιαδήποτε μπάλα ή ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο που δεν περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο της συνοριακής επιφάνειας δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}^3$.

Γενικότερα, έστω ότι έχουμε μία απλή σχετικά επιφάνεια Γ στον χώρο η οποία χωρίζει τον χώρο σε τρία υποσύνολα: το σύνολο A_1 των σημείων που βρίσκονται στη μία μεριά της Γ, το σύνολο A_2 των σημείων που βρίσκονται στην άλλη μεριά της Γ και το σύνολο των σημείων της Γ. Τότε καθένα από τα σύνολα $A_1 \cup \Gamma$ και $A_2 \cup \Gamma$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}^3$ ενώ, αν από αυτά αφαιρέσουμε ένα τουλάχιστον από τα σημεία της Γ, τότε τα προκύπτοντα σύνολα δεν είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbf{R}^3$.

Ακόμη, οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα ή ευθεία ή κλειστός δίσκος (που περιέχεται, φυσικά, σε ένα επίπεδο) ή επίπεδο του χώρου είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}^3$. Γενικότερα, κάθε σχετικά απλή καμπύλη γ (μαζί με τα άκρα της) και κάθε σχετικά απλή επιφάνεια Γ (μαζί με την συνοριακή της καμπύλη) είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbf{R}^3$.

Παρατηρήσεις: 1. Το $(-\infty, +\infty)$ είναι και ανοικτό υποσύνολο και κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}$. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο ονομάζεται και ανοικτό διάστημα και κλειστό διάστημα. Δεν υπάρχει, όμως, κανένα άλλο διάστημα το οποίο είναι και ανοικτό υποσύνολο και κλειστό υποσύνολο, ταυτοχρόνως, του $\mathbf{R}$.

2. Δεν πρέπει να μείνει η εντύπωση ότι κάθε υποσύνολο ενός μετρικού χώρου οφείλει να είναι είτε ανοικτό είτε κλειστό υποσύνολό του. Το $[a, b)$ δεν είναι ούτε ανοικτό ούτε κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}$! Δηλαδή, *δεν ισχύει ότι η έννοια του 'ανοικτού υποσυνόλου' είναι η άρνηση της έννοιας του 'κλειστού υποσυνόλου'.*

Άσκηση 19: Ποια από τα σύνολα της άσκ. 11 είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbf{R}$;

Άσκηση 20: Ποια από τα σύνολα της άσκ. 12 είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbf{R}^2$;

Άσκηση 21: Ποια από τα σύνολα της άσκ. 13 είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbf{R}^3$;

Άσκηση 22: Έστω $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ τουλάχιστον ένα εκ των οποίων είναι $\neq 0$ και $a \in \mathbf{R}$. Θεωρούμε το υπερεπίπεδο $\Gamma = \{x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) : a_1 x^{(1)} + \cdots +$

$a_n x^{(n)} = a\}$ του $\mathbf{R}^n$ που μάθαμε στην άσκηση 14. Τα σύνολα $A_1 \cup \Gamma = \{x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) : a_1 x^{(1)} + \cdots + a_n x^{(n)} \geq a\}$ και $A_2 \cup \Gamma = \{x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) : a_1 x^{(1)} + \cdots + a_n x^{(n)} \leq a\}$ ονομάζονται **κλειστοί ημιχώροι** με συνοριακό υπερεπίπεδο το Γ.

Αποδείξτε ότι οι κλειστοί ημιχώροι $A_1 \cup \Gamma$ και $A_2 \cup \Gamma$ καθώς και το Γ είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbf{R}^n$.

Άσκηση 23: Έστω X οποιοδήποτε πεπερασμένο μη κενό σύνολο και d οποιαδήποτε μετρική στο X. Αποδείξτε ότι κάθε υποσύνολο του X είναι κλειστό υποσύνολο του (X, d). (Υπόδειξη: Δείτε την άσκηση 15.)

4. Κάθε υποσύνολο του (X, δ_X) είναι κλειστό υποσύνολό του. Πράγματι, έστω τυχόν $A \subseteq X$. Επειδή κάθε υποσύνολο του (X, δ_X) είναι ανοικτό υποσύνολό του, το $X \setminus A$ είναι ανοικτό υποσύνολο και, επομένως, το A είναι κλειστό υποσύνολο του (X, δ_X).
5. Έστω $1 \leq p < q \leq +\infty$. Έχουμε δει σε ένα από τα προηγούμενα παραδείγματα ότι τα ανοικτά υποσύνολα του $(\mathbf{R}^n, d_{n,p})$ είναι τα ίδια με τα ανοικτά υποσύνολα του $(\mathbf{R}^n, d_{n,q})$. Είναι, τώρα, προφανές ότι τα κλειστά υποσύνολα του $(\mathbf{R}^n, d_{n,p})$ είναι τα ίδια με τα κλειστά υποσύνολα του $(\mathbf{R}^n, d_{n,q})$.

Άσκηση 24: Έστω μη κενό X και d_1 και d_2 δύο μετρικές στο X. Αποδείξτε ότι οι d_1 και d_2 είναι ισοδύναμες αν και μόνον αν τα κλειστά υποσύνολα του (X, d_1) είναι τα ίδια με τα κλειστά υποσύνολα του (X, d_2).

Πρόταση 4.6 *Έστω μετρικός χώρος* (X, d).
1. Το X *και το* $\emptyset$ *είναι ανοικτά υποσύνολα του* (X, d).
2. Το X *και το* $\emptyset$ *είναι κλειστά υποσύνολα του* (X, d).
3. Κάθε ϵ*-περιοχή είναι ανοικτό υποσύνολο του* (X, d).
4. Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του X *είναι κλειστό υποσύνολο του* (X, d).

Απόδειξη 1. Για οποιοδήποτε $x \in X$ και για οποιαδήποτε $N_x(\epsilon)$ έχουμε $N_x(\epsilon) \subseteq X$. Άρα το X είναι ανοικτό υποσύνολο του (X, d). Αν το $\emptyset$ δεν ήταν ανοικτό υποσύνολο του (X, d), θα υπήρχε κάποιο $x \in \emptyset$ του οποίου καμία περιοχή δεν θα περιεχόταν στο $\emptyset$. Αυτό, όμως, είναι άτοπο, διότι δεν υπάρχει κανένα x στο $\emptyset$.
2. Το $X \setminus X = \emptyset$ είναι ανοικτό υποσύνολο του (X, d), οπότε το X είναι κλειστό υποσύνολο του (X, d). Ομοίως, το $X \setminus \emptyset = X$ είναι ανοικτό υποσύνολο του (X, d), οπότε το $\emptyset$ είναι κλειστό υποσύνολο του (X, d).
3. Έστω $a \in X$ και $\epsilon > 0$ και παίρνουμε τυχόν $b \in N_a(\epsilon)$. Θα αποδείξουμε την ύπαρξη κάποιου $\delta > 0$ ώστε $N_b(\delta) \subseteq N_a(\epsilon)$. Αφού $b \in N_a(\epsilon)$, ισχύει $d(b, a) < \epsilon$ και παίρνουμε $\delta = \epsilon - d(b, a) > 0$. Αν $x \in N_b(\delta)$, τότε $d(x, b) < \delta$, οπότε $d(x, a) \leq d(x, b) + d(b, a) < \delta + d(b, a) = \epsilon$. Επομένως: $x \in N_b(\delta) \Rightarrow x \in N_a(\epsilon)$. Δηλαδή: $N_b(\delta) \subseteq N_a(\epsilon)$.

Αποδείξαμε ότι για κάθε $b \in N_a(\epsilon)$ υπάρχει περιοχή του b η οποία περιέχεται στο $N_a(\epsilon)$. Άρα το $N_a(\epsilon)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του (X, d).
4. Έστω $A = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$. Παίρνουμε τυχόν $x \in X \setminus A$, οπότε $d(x, x_1) > 0, \ldots, d(x, x_n) > 0$, και παίρνουμε $\epsilon = \min\big(d(x, x_1), \ldots, d(x, x_n)\big) > 0$. Κανένα από τα $x_1, \ldots, x_n$ δεν ανήκει στην $N_x(\epsilon)$ και, επομένως, $N_x(\epsilon) \subseteq X \setminus A$. Άρα,

για κάθε $x \in X \setminus A$ υπάρχει κάποια περιοχή του x η οποία περιέχεται στο $X \setminus A$. Επομένως, το $X \setminus A$ είναι ανοικτό υποσύνολο του (X, d), οπότε το A είναι κλειστό υποσύνολο του (X, d). Ο.Ε.Δ.

Ως εφαρμογή της Πρότασης 4.6.3 έχουμε ότι κάθε n-διάστατη ανοικτή μπάλα στον $\mathbf{R}^n$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$.

Άσκηση 25: Στον μετρικό χώρο (X, d) η **κλειστή ϵ-περιοχή** σημείου $a \in X$ ορίζεται να είναι το σύνολο $\overline{N_a}(\epsilon) = \{x \in X : d(x, a) \leq \epsilon\}$. Αποδείξτε ότι η $\overline{N_a}(\epsilon)$ είναι κλειστό υποσύνολο του (X, d). (Υπόδειξη: Θεωρήστε τυχόν $x \in X \setminus \overline{N_a}(\epsilon)$, οπότε $d(x, a) > \epsilon$, και πάρτε $\delta = d(x, a) - \epsilon > 0$. Αποδείξτε ότι $N_x(\delta) \subseteq X \setminus \overline{N_a}(\epsilon)$.)

Στον ευκλείδιο χώρο $\mathbf{R}^n$ χρησιμοποιούμε τον όρο *n-διάστατη κλειστή μπάλα κέντρου a και ακτίνας ϵ* για την $\overline{N_a}(\epsilon)$. Ισχύει, λοιπόν, ως εφαρμογή της άσκησης 25, ότι κάθε κλειστή μπάλα στον $\mathbf{R}^n$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$.

Όταν λέμε ότι έχουμε κάποια **οικογένεια συνόλων** ή **συλλογή συνόλων** Σ εννοούμε ότι έχουμε ένα σύνολο Σ του οποίου κάθε στοιχείο είναι σύνολο. Δηλαδή, κάθε $A \in \Sigma$ είναι σύνολο. Την ένωση όλων των συνόλων-στοιχείων της συλλογής Σ τη συμβολίζουμε $\bigcup_{A \in \Sigma} A$. Φυσικά: $x \in \bigcup_{A \in \Sigma} A$ αν και μόνον αν $x \in A$ για τουλάχιστον ένα $A \in \Sigma$. Ομοίως, την τομή όλων των συνόλων-στοιχείων της συλλογής Σ τη συμβολίζουμε $\bigcap_{A \in \Sigma} A$. Επίσης: $x \in \bigcap_{A \in \Sigma} A$ αν και μόνον αν $x \in A$ για κάθε $A \in \Sigma$.

Πολλές φορές μία συλλογή συνόλων περιγράφεται και με έναν διαφορετικό (αλλά, τελικά, ισοδύναμο) τρόπο. Ξεκινάμε με ένα σύνολο δεικτών Λ και σε κάθε $\lambda \in \Lambda$ αντιστοιχίζουμε ένα σύνολο A_λ. Παίρνουμε έτσι τη συλλογή συνόλων $\Sigma = \{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Τώρα, το να λέμε ότι το A είναι στοιχείο της συλλογής Σ είναι ισοδύναμο με το να λέμε ότι $A = A_\lambda$ για κάποιο $\lambda \in \Lambda$. Επίσης, η ένωση $\bigcup_{A \in \Sigma} A$ και η τομή $\bigcap_{A \in \Sigma} A$ συμβολίζονται, ισοδύναμα, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ και $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, αντιστοίχως. Στην ειδική περίπτωση πεπερασμένης συλλογής, οπότε ως σύνολο δεικτών παίρνουμε το $\Lambda = \{1, \ldots, n\}$ για κάποιο $n \in \mathbf{N}$, η ένωση και η τομή γράφονται και ως $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ και $\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap \cdots \cap A_n$. Ενώ στην περίπτωση άπειρης αριθμήσιμης συλλογής, οπότε ως σύνολο δεικτών παίρνουμε το $\mathbf{N}$, η ένωση και η τομή γράφονται και ως $\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k = A_1 \cup A_n \cup \cdots$ και $\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \cdots$.

Άσκηση 26: Έστω οποιαδήποτε μη κενή συλλογή συνόλων Σ κάθε στοιχείο-σύνολο της οποίας είναι υποσύνολο ενός συνόλου X. Αποδείξτε τους νόμους του de Morgan :
1. $X \setminus \bigcup_{A \in \Sigma} A = \bigcap_{A \in \Sigma} (X \setminus A)$ και
2. $X \setminus \bigcap_{A \in \Sigma} A = \bigcup_{A \in \Sigma} (X \setminus A)$.

Επίσης, αποδείξτε ότι για κάθε $B \subseteq X$ ισχύει:
3. $B \cap \bigcup_{A \in \Sigma} A = \bigcup_{A \in \Sigma} (B \cap A)$ και
4. $B \cup \bigcap_{A \in \Sigma} A = \bigcap_{A \in \Sigma} (B \cup A)$.

Θεώρημα 4.1 *Έστω μετρικός χώρος (X, d).*
1. Έστω οποιαδήποτε οικογένεια συνόλων Σ κάθε στοιχείο της οποίας είναι ανοι-

κτό υποσύνολο του (X,d) και έστω M η ένωση των στοιχείων της Σ, δηλαδή, $M = \bigcup_{A\in\Sigma} A$. Το M είναι ανοικτό υποσύνολο του (X,d).
2. Έστω πεπερασμένου πλήθους ανοικτά υποσύνολα $A_1,\ldots,A_n$ του (X,d) και M η τομή τους, δηλαδή, $M = A_1 \cap \cdots \cap A_n$. Το M είναι ανοικτό υποσύνολο του (X,d).
3. Έστω οποιαδήποτε οικογένεια συνόλων Σ κάθε στοιχείο της οποίας είναι κλειστό υποσύνολο του (X,d) και έστω M η τομή των στοιχείων της Σ, δηλαδή, $M = \bigcap_{A\in\Sigma} A$. Το M είναι κλειστό υποσύνολο του (X,d).
4. Έστω πεπερασμένου πλήθους κλειστά υποσύνολα $A_1,\ldots,A_n$ του (X,d) και M η ένωσή τους,δηλαδή, $M = A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Το M είναι κλειστό υποσύνολο του (X,d).

Απόδειξη 1. Έστω τυχόν $x \in M$. Το x ανήκει σε κάποιο από τα $A \in \Sigma$, έστω στο A_0. Αφού το A_0 είναι ανοικτό υποσύνολο του (X,d), υπάρχει περιοχή N_x του x η οποία περιέχεται στο A_0. Επομένως, αφού $A_0 \subseteq M$, η N_x περιέχεται στο M.
2. Έστω τυχόν $x \in M$, οπότε $x \in A_1,\ldots,x \in A_n$. Αφού κάθε A_k είναι ανοικτό υποσύνολο του (X,d), υπάρχουν περιοχές $N_x(\epsilon_1) \subseteq A_1,\ldots,N_x(\epsilon_n) \subseteq A_n$. Παίρνουμε $\epsilon = \min(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)$ και έχουμε $N_x(\epsilon) \subseteq N_x(\epsilon_1) \subseteq A_1,\ldots,N_x(\epsilon) \subseteq N_x(\epsilon_n) \subseteq A_n$. Άρα, $N_x(\epsilon) \subseteq A_1 \cap \cdots \cap A_n = M$.
3. Το σύνολο $X \setminus M = X \setminus \bigcap_{A\in\Sigma} A = \bigcup_{A\in\Sigma}(X \setminus A)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του (X,d), διότι για κάθε $A \in \Sigma$ το $X \setminus A$ είναι ανοικτό υποσύνολο του (X,d). Άρα, το M είναι κλειστό υποσύνολο του (X,d).
4. Το $X \setminus M = X \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_n) = (X \setminus A_1) \cap \cdots \cap (X \setminus A_n)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του (X,d), διότι όλα τα $X \setminus A_1,\ldots,X \setminus A_n$ είναι ανοικτά υποσύνολα του (X,d). Άρα, το M είναι κλειστό υποσύνολο του (X,d). Ο.Ε.Δ.

Άσκηση 27: Έστω μετρικός χώρος (X,d), A ανοικτό υποσύνολο του (X,d) και B κλειστό υποσύνολο του (X,d). Αποδείξτε ότι το $A \setminus B$ είναι ανοικτό υποσύνολο του (X,d) και το $B \setminus A$ είναι κλειστό υποσύνολο του (X,d).

Παραδείγματα:
1. Ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών διαστημάτων είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}$.
2. Ένωση οποιασδήποτε συλλογής ανοικτών διαστημάτων είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R}$.
3. Έστω το σύνολο $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$. Είναι το A κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}$;

Το συμπληρωματικό σύνολο είναι $\mathbf{R}\setminus A = (-\infty,0] \cup (1,+\infty) \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$. Παρατηρούμε ότι $0 \in \mathbf{R} \setminus A$ αλλά δεν υπάρχει καμία περιοχή του 0 η οποία να περιέχεται στο $\mathbf{R} \setminus A$. Επομένως, το $\mathbf{R} \setminus A$ δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R}$ και το A δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}$.
4. Έστω το σύνολο $B = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$. Είναι το B κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}$;

Τώρα, $\mathbf{R} \setminus B = (-\infty,0) \cup (1,+\infty) \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$, το οποίο, ως ένωση ανοικτών διαστημάτων, είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R}$. Άρα, το B είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}$.
5. Αν έχουμε μία άπειρη συλλογή ανοικτών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου,

η τομή της είναι άλλοτε ανοικτό υποσύνολο του χώρου και άλλοτε όχι. Για παράδειγμα, με $A_n = (0,1)$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ παίρνουμε $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = (0,1)$, δηλαδή, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R}$. Αλλά, με $A_n = (-1-1/n, 1+1/n)$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ παίρνουμε $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = [-1,1]$, το οποίο δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R}$.

Τα ίδια μπορούμε να πούμε για άπειρη συλλογή κλειστών υποσυνόλων και την ένωσή της. Για παράδειγμα, με $A_n = [-1,1]$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, έχουμε $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = [-1,1]$, δηλαδή, κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}$, ενώ με $A_n = [-1+1/n, 1-1/n]$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, έχουμε $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = (-1,1)$, το οποίο δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}$.

6. Το **σύνολο του Cantor**.

Θεωρούμε το κλειστό διάστημα $I_0 = [0,1]$. Παίρνουμε το υποσύνολό του $I_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Κρατάμε, δηλαδή, τα δύο ακριανά κλειστά διαστήματα μήκους, το καθένα, το $\frac{1}{3}$ του μήκους του αρχικού I_0. Κάνουμε το ίδιο σε καθένα από τα δύο υποδιαστήματα του I_1. Δηλαδή, $I_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Συνεχίζουμε με επαγωγικό τρόπο για να φτιάξουμε τα I_3, $I_4, \ldots$. Αν, δηλαδή, έχουμε φτιάξει το I_n ως ένωση κλειστών διαστημάτων, το καθένα από αυτά τα διαστήματα θα *γεννήσει* δύο καινούρια κλειστά διαστήματα: τα δύο ακριανά του με μήκος, το καθένα, το $\frac{1}{3}$ του μήκους του. Βλέπουμε, δηλαδή, ότι σε κάθε βήμα το πλήθος των διαστημάτων διπλασιάζεται και, επομένως, το I_n αποτελείται από 2^n κλειστά διαστήματα, από τα οποία το καθένα έχει μήκος $\frac{1}{3^n}$, αφού σε κάθε βήμα το μήκος κάθε διαστήματος υποτριπλασιάζεται. Κάθε I_n είναι κλειστό σύνολο αφού είναι ένωση πεπερασμένης συλλογής κλειστών διαστημάτων. Επίσης, το συνολικό μήκος των διαστημάτων που απαρτίζουν το I_n είναι ίσο με $2^n \cdot \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Ορίζουμε $C = \bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n$. Το C ονομάζεται **σύνολο του Cantor** και, ως τομή συλλογής κλειστών υποσυνόλων του $\mathbf{R}$, είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}$.

Άσκηση 28: Γράψτε το $\mathbf{R} \setminus C$ ως ένωση κατάλληλης συλλογής ανοικτών διαστημάτων.

Μία ενδιαφέρουσα ιδιότητα του C είναι ότι δεν περιέχει κανένα ανοικτό διάστημα. Πράγματι, έστω $(a,b) \subseteq C$. Τότε $(a,b) \subseteq I_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, οπότε το (a,b) πρέπει να περιέχεται σε ένα από τα κλειστά διαστήματα που απαρτίζουν το I_n. Επομένως, $b - a \le \frac{1}{3^n}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Αυτό είναι άτοπο, διότι $\frac{1}{3^n} \to 0$ ενώ $b - a > 0$.

Άσκηση 29: Αποδείξτε ότι το σύνολο C του Cantor περιέχει άπειρα σημεία.

Άσκηση 30: Περιγράψτε διαδικασία κατασκευής συνόλου Cantor στο $\mathbf{R}^2$: αρχίστε με το τετράγωνο $I_0 = [0,1] \times [0,1]$, φτιάξτε το $I_1 = \big([0,\frac{1}{3}] \times [0,\frac{1}{3}]\big) \cup \big([0,\frac{1}{3}] \times [\frac{2}{3},1]\big) \cup \big([\frac{2}{3},1] \times [0,\frac{1}{3}]\big) \cup \big([\frac{2}{3},1] \times [\frac{2}{3},1]\big)$ και συνεχίστε επαγωγικά με τα I_2, $I_3, \ldots$.

1. Κάθε I_n αποτελείται από ξένα ανά δύο κλειστά τετράγωνα. Καθένα από αυτά πόσα καινούρια τετράγωνα θα γεννήσει και πού βρίσκονται αυτά; Από πόσα τετράγωνα απαρτίζεται το I_n και πόσο είναι το εμβαδόν κάθε τέτοιου τετραγώνου;
2. Πάρτε $C = \bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n$ και αποδείξτε ότι το C είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}^2$.
3. Αποδείξτε ότι το C δεν περιέχει κανέναν ανοικτό δίσκο.

Άσκηση 31: Ένα σύνολο της μορφής $(a_1, b_1)\times\cdots\times(a_n, b_n) = \{(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) : a_k < x^{(k)} < b_k$ για κάθε $k = 1, \ldots, n\}$ ονομάζεται **ανοικτό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο** στον $\mathbf{R}^n$ με ακμές (a_k, b_k) $(1 \leq k \leq n)$ παράλληλες στους κύριους άξονες. Αποδείξτε ότι κάθε τέτοιο σύνολο είναι τομή κάποιας πεπερασμένης συλλογής ανοικτών ημιχώρων και, επομένως, είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$. (Υπόδειξη: Θεωρήστε ημιχώρους $L_k = \{(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) : a_k < x^{(k)}\}$ και $M_k = \{(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) : x^{(k)} < b_k\}$.)

Άσκηση 32: Ένα σύνολο της μορφής $[a_1, b_1]\times\cdots\times[a_n, b_n] = \{(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) : a_k \leq x^{(k)} \leq b_k$ για κάθε $k = 1, \ldots, n\}$ ονομάζεται **κλειστό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο** στον $\mathbf{R}^n$ με ακμές $[a_k, b_k]$ $(1 \leq k \leq n)$ παράλληλες στους κύριους άξονες. Αποδείξτε ότι κάθε τέτοιο σύνολο είναι τομή κάποιας πεπερασμένης συλλογής κλειστών ημιχώρων και, επομένως, είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$. (Υπόδειξη: Προσαρμόστε την υπόδειξη της προηγούμενης άσκησης.)

7. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και μετρικός υπόχωρος (W, d) του (X, d). Θα μελετήσουμε τη σχέση ανάμεσα στα ανοικτά υποσύνολα του (X, d) και στα ανοικτά υποσύνολα του (W, d). Θα χρησιμοποιήσουμε την ήδη γνωστή μας σχέση ανάμεσα στις περιοχές $N_x^X(\epsilon)$ και $N_x^W(\epsilon)$ των χώρων (X, d) και (W, d), αντιστοίχως, για κάθε $x \in W$.

Έστω τυχόν ανοικτό υποσύνολο A του (X, d). Θεωρούμε το $B = A\cap W \subseteq W$. Αν $x \in B$, τότε $x \in A$ και $x \in W$. Επειδή το A είναι ανοικτό υποσύνολο του (X, d), υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $N_x^X(\epsilon) \subseteq A$. Συνεπάγεται $N_x^W(\epsilon) = N_x^X(\epsilon) \cap W \subseteq A \cap W = B$. Άρα, για κάθε σημείο x του B υπάρχει περιοχή (στον (W, d)) του x η οποία περιέχεται στο B. Αυτό σημαίνει ότι το B είναι ανοικτό υποσύνολο του (W, d).

Έστω, τώρα, τυχόν ανοικτό υποσύνολο B του (W, d). Παίρνουμε οποιοδήποτε $x \in B$, οπότε υπάρχει $\epsilon = \epsilon(x)$ ώστε $N_x^W(\epsilon(x)) \subseteq B$. Επίσης, γνωρίζουμε ότι $N_x^W(\epsilon(x)) = N_x^X(\epsilon(x)) \cap W$. Θέτουμε $A = \bigcup_{x\in B} N_x^X(\epsilon(x))$ και, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1.1, το A είναι ανοικτό υποσύνολο του (X, d). Τώρα, $A \cap W = \bigcup_{x\in B} N_x^X(\epsilon(x)) \cap W = \bigcup_{x\in B} \big(N_x^X(\epsilon(x)) \cap W\big) = \bigcup_{x\in B} N_x^W(\epsilon(x))$. Παρατηρούμε ότι το τελευταίο σύνολο είναι το ίδιο με το B. Αυτό ισχύει διότι, αφ' ενός $N_x^W(\epsilon(x)) \subseteq B$ για κάθε $x \in B$ και, επομένως, $\bigcup_{x\in B} N_x^W(\epsilon(x)) \subseteq B$, αφ' ετέρου για κάθε $y \in B$ έχουμε $y \in N_y^W(\epsilon(y)) \subseteq \bigcup_{x\in B} N_x^W(\epsilon(x))$, οπότε $B \subseteq \bigcup_{x\in B} N_x^W(\epsilon(x))$. Καταλήγουμε, επομένως, στο ότι $A \cap W = B$.

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι τα ανοικτά υποσύνολα του (W, d) είναι τα ίδια με τις τομές των ανοικτών υποσυνόλων του (X, d) με το W.

Άσκηση 33: Έστω μετρικός χώρος (X, d) και υπόχωρος (W, d) του (X, d). Αποδείξτε ότι για κάθε A κλειστό υποσύνολο του (X, d) το $B = A \cap W$ είναι κλειστό υποσύνολο του (W, d). Αντιστρόφως, αποδείξτε ότι για κάθε κλειστό υποσύνολο B του (W, d) υπάρχει κάποιο κλειστό υποσύνολο A του (X, d) ώστε $B = A \cap W$.

8. Άς θεωρήσουμε τον υπόχωρο $W = [0, 1] \cup [2, 3]$ του $\mathbf{R}$. Επειδή το $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R}$, το $[0, 1] = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \cap W$ είναι, σύμφωνα με

το προηγούμενο παράδειγμα 7, ανοικτό υποσύνολο του (W,d). Ομοίως, επειδή το $(\frac{3}{2},4)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R}$, το $[2,3]=(\frac{3}{2},4)\cap W$ είναι ανοικτό υποσύνολο του (W,d). Τώρα, το $[2,3]=W\setminus[0,1]$ και το $[0,1]=W\setminus[2,3]$ είναι κλειστά υποσύνολα του W.

Έχουμε, λοιπόν, παράδειγμα μετρικού χώρου (X,d) ένα τουλάχιστον υποσύνολο A του οποίου είναι ανοικτό και, ταυτόχρονα, κλειστό υποσύνολό του. Προσέξτε ότι αυτό το A δεν είναι ίδιο ούτε με το X ούτε με το $\emptyset$.

Πριν προχωρήσουμε, ας δούμε, χωρίς τη βοήθεια του παραδείγματος 7, γιατί το $[0,1]$ (και, ομοίως, το $[2,3]$) είναι ανοικτό υποσύνολο του $W=[0,1]\cup[2,3]$. Παίρνουμε τυχόν $x\in[0,1]$. Αν $0<x<1$, μπορούμε να πάρουμε ως ϵ την μικρότερη από τις αποστάσεις του x από τα άκρα του $[0,1]$, οπότε έχουμε ότι $(x-\epsilon,x+\epsilon)\subseteq[0,1]$. Αν $x=0$, παρατηρούμε ότι η περιοχή $N_0^W(\frac{1}{2})$ του 0, δηλαδή, το σύνολο των σημείων *του* W που απέχουν από το 0 απόσταση μικρότερη από $\frac{1}{2}$, είναι το διάστημα $[0,\frac{1}{2})\subseteq[0,1]$. Ομοίως, αν $x=1$, η περιοχή $N_1(\frac{1}{2})$ είναι το διάστημα $(\frac{1}{2},1]\subseteq[0,1]$. Άρα, για κάθε $x\in[0,1]$ υπάρχει περιοχή του (στον W) η οποία περιέχεται στο $[0,1]$, οπότε το $[0,1]$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $W=[0,1]\cup[2,3]$.

Άσκηση 34: Αναφερθείτε στο αμέσως προηγούμενο παράδειγμα και για κάθε $x\in[0,1]$ βρείτε το *μέγιστο* $\epsilon>0$ ώστε $N_x^W(\epsilon)\subseteq[0,1]$.

Άσκηση 35: Έστω μετρικός χώρος (X,d), μη κενό $A\subseteq X$ και $\epsilon>0$. Ορίζουμε το σύνολο $N_A(\epsilon)=\{x\in X:\ \text{υπάρχει } y\in A \text{ ώστε } d(y,x)<\epsilon\}=\{x\in X: N_x(\epsilon)\cap A\neq\emptyset\}$.
1. Για παράδειγμα, στον $\mathbf{R}$ ποια είναι τα $N_A(\epsilon)$ για κάθε $\epsilon>0$ και για καθένα A από τα: $\{1\}$, $[0,1]$, $(0,1)$, $\{0,1\}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{Q}$ και $\{\frac{1}{n}:n\in\mathbf{N}\}$;
2. Αποδείξτε ότι το $N_A(\epsilon)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του (X,d) και $A\subseteq N_A(\epsilon)$.
3. Αποδείξτε ότι κάθε μη κενό κλειστό υποσύνολο του (X,d) είναι τομή αριθμήσιμης συλλογής ανοικτών υποσυνόλων του (X,d). (Υπόδειξη: Αν το A είναι κλειστό υποσύνολο του (X,d), αποδείξτε ότι $A=\bigcap_{n=1}^{+\infty}N_A(\frac{1}{n})$. Η $A\subseteq\bigcap_{n=1}^{+\infty}N_A(\frac{1}{n})$ είναι προφανής. Για την $A\supseteq\bigcap_{n=1}^{+\infty}N_A(\frac{1}{n})$ υποθέστε ότι υπάρχει $x\in\bigcap_{n=1}^{+\infty}N_A(\frac{1}{n})$ ώστε $x\in X\setminus A$, οπότε υπάρχει $\epsilon>0$ ώστε $N_x(\epsilon)\subseteq X\setminus A$, και αποδείξτε ότι, αν το n είναι αρκετά (πόσο;) μεγάλο, τότε $x\notin N_A(\frac{1}{n})$.)

Αν έχουμε μία συλλογή από ξένα ανά δύο ανοικτά διαστήματα, τότε η ένωσή της είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R}$. Τώρα θα αποδείξουμε το αντίστροφο και θα έχουμε μία ικανοποιητική *εικόνα* των ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbf{R}$.

Θεώρημα 4.2 *Έστω μη κενό ανοικτό υποσύνολο A του $\mathbf{R}$. Τότε το A είναι ένωση ανά δύο ξένων ανοικτών διαστημάτων. Πιο συγκεκριμένα: υπάρχει μία συλλογή Σ ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων ώστε $A=\bigcup_{I\in\Sigma}I$. Επίσης, η συλλογή Σ είναι αριθμήσιμη, δηλαδή, είτε πεπερασμένη είτε άπειρη αριθμήσιμη.*

Απόδειξη: Θεωρούμε τυχόν $x\in A$ και, κατ' αρχήν, θα αποδείξουμε ότι υπάρχει *μέγιστο ανοικτό διάστημα* το οποίο περιέχει το x και περιέχεται στο A. Επειδή το A είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R}$, υπάρχει κάποιο $\epsilon>0$ ώστε $(x-\epsilon,x+\epsilon)\subseteq A$. Η ιδέα είναι να *τεντώσουμε* την περιοχή αυτή όσο το δυνατόν περισσότερο χωρίς να *ξεφύγει* από το A. Κάτι τέτοιο γίνεται, με αυστηρό τρόπο, ως εξής. Θεωρούμε τα δύο σύνολα

$$R = \{y \in \mathbf{R} : [x, y) \subseteq A\}, \qquad L = \{z \in \mathbf{R} : (z, x] \subseteq A\}.$$

Παρατηρούμε ότι τα R και L είναι μη κενά διότι $x + \epsilon \in K$ και $x - \epsilon \in L$.

Ως προς το R διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

(i) Το R δεν είναι άνω φραγμένο. Αυτό σημαίνει ότι το R περιέχει απεριόριστα μεγάλους αριθμούς. Δηλαδή, υπάρχουν απεριόριστα μεγάλα y ώστε $[x, y) \subseteq A$. Αυτό, όμως, συνεπάγεται ότι $[x, +\infty) \subseteq A$. Δηλαδή, το A περιέχει ολόκληρη την ημιευθεία δεξιά του x. Πράγματι, έστω τυχόν $y_1 \in [x, +\infty)$. Υπάρχει y μεγαλύτερο από το y_1 ώστε $[x, y) \subseteq A$. Τότε, όμως, $y_1 \in [x, y)$ και, επομένως, $y_1 \in A$. Άρα $[x, +\infty) \subseteq A$.

(ii) Το R είναι άνω φραγμένο. Τότε το R έχει supremum στο $\mathbf{R}$. Θέτουμε $\beta = \sup(R) < +\infty$. Είναι σχετικά εύκολο να αποδείξουμε ότι $[x, \beta) \subseteq A$. Πράγματι, έστω τυχόν $y_1 \in [x, \beta)$. Επειδή $\beta = \sup(R)$, υπάρχει $y \in R$ ώστε $y_1 < y$. Επειδή $y \in R$, συνεπάγεται ότι $[x, y) \subseteq A$. Επειδή, όμως, $y_1 \in [x, y)$, έχουμε ότι $[x, y_1) \subseteq A$ και, επομένως, $y_1 \in A$. Άρα $[x, \beta) \subseteq A$. Επίσης, εύκολα αποδεικνύεται ότι $\beta \notin A$. Πράγματι, έστω $\beta \in A$. Επειδή το A είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R}$, υπάρχει περιοχή $(\beta - \delta, \beta + \delta)$ του β η οποία περιέχεται στο A. Τότε, όμως, έχουμε ότι $[x, \beta + \delta) \subseteq A$, το οποίο σημαίνει ότι $\beta + \delta \in R$ και το οποίο αντιφάσκει με το ότι $\beta = \sup(R)$. Άρα $\beta \notin A$.

Επομένως, $[x, \beta) \subseteq A$ και $\beta \notin A$. Δηλαδή, το $[x, \beta)$ είναι το μέγιστο διάστημα δεξιά του x το οποίο περιέχεται στο A.

Ανακεφαλαιώνουμε: οι δύο περιπτώσεις για το R λένε ότι υπάρχει μέγιστο διάστημα $[x, \beta)$ δεξιά του x το οποίο περιέχεται στο A, όπου είτε $\beta = +\infty$ είτε $\beta \in \mathbf{R}$.

Χρησιμοποιώντας το σύνολο L, με όμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει μέγιστο διάστημα $(\alpha, x]$ αριστερά του x το οποίο περιέχεται στο A, όπου είτε $\alpha = -\infty$ είτε $\alpha \in \mathbf{R}$.

Άρα, υπάρχει μέγιστο διάστημα (α, β) το οποίο περιέχει το x και περιέχεται στο A. Το διάστημα αυτό το ονομάζουμε *συνιστώσα του A η οποία περιέχει το x* και το συμβολίζουμε $I(x)$.

Συλλέγουμε όλες τις συνιστώσες $I(x)$ του A καθώς το x διατρέχει το A. Οι συνιστώσες αυτές έχουν τις εξής ιδιότητες.

(i) Αν $z \in I(x)$, τότε $I(x) \subseteq I(z)$.

Διότι το $I(x)$ είναι ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το z και περιέχεται στο A και το $I(z)$ είναι το *μέγιστο* ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το z και περιέχεται στο A.

(ii) Αν $z \in I(x)$, τότε $I(x) = I(z)$.

Από την (i) συνεπάγεται ότι $I(x) \subseteq I(z)$. Τότε, όμως, επειδή $x \in I(x)$, συνεπάγεται $x \in I(z)$. Άρα, από την (i) συνεπάγεται $I(z) \subseteq I(x)$.

(iii) Αν $x \in A$, $y \in A$ και $I(x) \cap I(y) \neq \emptyset$, τότε $I(x) = I(y)$.

Διότι, έστω $z \in I(x) \cap I(y)$. Τότε, λόγω της (ii), $I(x) = I(z) = I(y)$.

Η ιδιότητα (iii) διατυπώνεται ως εξής: *δύο οποιεσδήποτε συνιστώσες του A είτε είναι ξένες είτε ταυτίζονται.*

Θεωρούμε τώρα την συλλογή Σ όλων των συνιστωσών του A:

$$\Sigma = \{I(x) : x \in A\}.$$

Φυσικά, όπως σε κάθε σύνολο κανένα στοιχείο του δεν επαναλαμβάνεται περισσότερες από μία φορά, όσες συνιστώσες ταυτίζονται τις παίρνουμε μία μόνο φορά στη συλλογή Σ και, επομένως, τα στοιχεία της Σ είναι ξένα ανά δύο διαστήματα. Δηλαδή, (α) κάθε $I \in \Sigma$ είναι μία από τις συνιστώσες του A, (β) κάθε συνιστώσα του A είναι στοιχείο της συλλογής Σ και (γ) αν τα I' και I'' είναι διαφορετικά στοιχεία της Σ, τα I' και I'' είναι ξένα ανοικτά διαστήματα.

Κάθε $I \in \Sigma$ περιέχεται στο A, οπότε και η ένωση $\bigcup_{I\in\Sigma} I$ περιέχεται στο A. Αντιστρόφως, κάθε $x \in A$ περιέχεται σε κάποια απο τις συνιστώσες του A (συγκεκριμένα, στην $I(x)$), δηλαδή, σε κάποιο $I \in \Sigma$ και, επομένως, στην $\bigcup_{I\in\Sigma} I$. Άρα, το A περιέχεται στην $\bigcup_{I\in\Sigma} I$.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι $A = \bigcup_{I\in\Sigma} I$.

Κάθε ανοικτό διάστημα περιέχει τουλάχιστον έναν ρητό αριθμό. Επιλέγουμε έναν ρητό αριθμό σε κάθε συνιστώσα του A. Επειδή οι συνιστώσες του A είναι ξένες ανά δύο, οι ρητοί οι οποίοι αντιστοιχούν σε κάθε συνιστώσα είναι διαφορετικοί ανά δύο. Έχουμε, έτσι, μίαν αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία από τη συλλογή Σ των συνιστωσών του A σε ένα υποσύνολο Λ του $\mathbf{Q}$. Το Λ είναι αριθμήσιμο, ως υποσύνολο του $\mathbf{Q}$, και, επομένως, η Σ είναι αριθμήσιμη.

Άσκηση 36: Έστω υποσύνολο A του $\mathbf{R}$. Αν το A είναι ανοικτό και, ταυτόχρονα, κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}$, αποδείξτε ότι είτε $A = \emptyset$ είτε $A = \mathbf{R}$. (Υπόδειξη: *Πρώτος τρόπος.* Υποθέστε ότι $A \neq \emptyset$ και $A \neq \mathbf{R}$ και, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.2, γράψτε το A ως ένωση ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων. Ένα τουλάχιστον από αυτά έχει την μορφή (a, b) ή $(a, +\infty)$ ή $(-\infty, b)$. Στις δύο πρώτες περιπτώσεις, $a \in \mathbf{R} \setminus A$ και καταλήξτε σε άτοπο, αφού το $\mathbf{R} \setminus A$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R}$. Ομοίως, καταλήξτε σε άτοπο και στην τρίτη περίπτωση. *Δεύτερος τρόπος.* Υποθέστε ότι $A \neq \emptyset$ και $A \neq \mathbf{R}$, πάρτε $a \in A$ και $b \notin A$ και έστω $a < b$. Θέσατε $M = A \cap [a, b]$ και αποδείξτε ότι το $\sup(M)$ δεν είναι στοιχείο ούτε του A ούτε του $\mathbf{R} \setminus A$.)

4.3 Εσωτερικό, κλειστότητα, σύνορο.

Ορισμός 4.13 *Έστω μετρικός χώρος (X, d), $A \subseteq X$ και $x \in X$. Το x ονομάζεται* ***εσωτερικό σημείο του*** *A, αν υπάρχει κάποια περιοχή N_x του x η οποία περιέχεται στο A, δηλαδή, αν υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $N_x(\epsilon) \subseteq A$. Το σύνολο το οποίο έχει ως στοιχεία όλα τα εσωτερικά σημεία του A και μόνον αυτά ονομάζεται* ***εσωτερικό του*** *A ή* ***ανοικτός πυρήνας του*** *A και συμβολίζεται A°.*

Πρόταση 4.7 *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$.*
1. Ισχύει $A^\circ \subseteq A$.
2. Το A είναι ανοικτό υποσύνολο του (X, d) αν και μόνον αν $A^\circ = A$.

Απόδειξη: 1. Αν $x \in A^\circ$, το x είναι εσωτερικό σημείο του A, οπότε υπάρχει N_x ώστε $N_x \subseteq A$. Επειδή $x \in N_x$, συνεπάγεται $x \in A$. Άρα, $A^\circ \subseteq A$.

2. Έστω ότι το A είναι ανοικτό υποσύνολο του (X, d). Αν $x \in A$, τότε το x είναι εσωτερικό σημείο του A, οπότε $x \in A^\circ$. Άρα, $A \subseteq A^\circ$ και, επομένως, $A^\circ = A$.

Αντιστρόφως, έστω $A^\circ = A$. Αν $x \in A$, τότε $x \in A^\circ$, οπότε το x είναι εσωτερικό σημείο του A. Αφού κάθε στοιχείο του A είναι εσωτερικό του σημείο, το A είναι ανοικτό υποσύνολο του (X, d). Ο.Ε.Δ.

Παραδείγματα:
1. Έστω ο χώρος $\mathbf{R}$. Αν $A = (a, b)$, τότε $A^\circ = (a, b)$. Αν $A = [a, b]$, τότε $A^\circ = (a, b)$. Αν $A = \{a\}$, τότε $A^\circ = \emptyset$. Αν $A = [a, +\infty)$, τότε $A^\circ = (a, +\infty)$. Αν $A = (a, b]$, τότε $A^\circ = (a, b)$.

Το $\mathbf{Q}$ δεν περιέχει κανένα ανοικτό διάστημα, δηλαδή, καμία περιοχή κανενός σημείου και, επομένως, δεν έχει κανένα εσωτερικό σημείο. Άρα, $\mathbf{Q}^\circ = \emptyset$. Ομοίως, το $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ δεν έχει κανένα εσωτερικό σημείο, οπότε $(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})^\circ = \emptyset$.

Το σύνολο C του Cantor δεν περιέχει κανένα ανοικτό διάστημα και, επομένως, δεν έχει κανένα εσωτερικό σημείο. Δηλαδή, $C^\circ = \emptyset$.
2. Αν στον $\mathbf{R}^2$ πάρουμε ως A οποιονδήποτε δίσκο μαζί με κάποια (κανένα ή μερικά ή όλα) από τα σημεία της περιφέρειάς του, τότε αυτά τα σημεία της περιφέρειας δεν είναι εσωτερικά σημεία του A και, επομένως, το εσωτερικό του A είναι ο αντίστοιχος ανοικτός δίσκος. Ακριβώς τα ίδια ισχύουν αν αντί για δίσκο θεωρήσουμε οποιοδήποτε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Γενικότερα, έστω μία απλή σχετικά καμπύλη γ στο επίπεδο που χωρίζει το επίπεδο σε τρία υποσύνολα: το σύνολο A_1 των σημείων που βρίσκονται στη μία μεριά της γ, το σύνολο A_2 των σημείων που βρίσκονται στην άλλη μεριά της γ και το σύνολο των σημείων της γ. Αν A είναι το A_1 μαζί με μερικά από τα σημεία της γ, τότε κανένα από τα σημεία αυτά της γ δεν είναι εσωτερικό σημείο του A και, επομένως, το εσωτερικό του A είναι το A_1. Επίσης, αν A είναι η γ ή οποιοδήποτε υποσύνολό της, το A δεν έχει κανένα εσωτερικό σημείο, οπότε το εσωτερικό του A είναι το $\emptyset$.

Επομένως, ένα ευθύγραμμο τμήμα, μία ευθεία, η περιφέρεια ενός δίσκου και η περιφέρεια ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου έχουν ως εσωτερικό σύνολο το $\emptyset$.
3. Έστω ότι έχουμε μία απλή σχετικά επιφάνεια Γ στον χώρο η οποία χωρίζει τον χώρο σε τρία υποσύνολα: το σύνολο A_1 των σημείων που βρίσκονται στη μία μεριά της Γ, το σύνολο A_2 των σημείων που βρίσκονται στην άλλη μεριά της Γ και το σύνολο των σημείων της Γ. Αν ως A θεωρήσουμε το A_1 μαζί με κάποια από τα σημεία της Γ, τότε κανένα από αυτά τα σημεία της Γ δεν είναι εσωτερικό σημείο του A και, επομένως, το εσωτερικό του A είναι το A_1. Επίσης, αν ως A θεωρήσουμε την Γ ή οποιοδήποτε υποσύνολο της Γ, τότε κανένα σημείο του A δεν είναι εσωτερικό του σημείο, οπότε το εσωτερικό του A είναι το $\emptyset$.

Ειδικότερα, οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα ή ευθεία ή επίπεδο ή δίσκος (που περιέχεται, φυσικά, σε ένα επίπεδο) έχει κενό εσωτερικό σύνολο. Ακόμη, αν A είναι οποιαδήποτε μπάλα ή ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο μαζί με κάποια από τα σημεία της συνοριακής επιφάνειας, το εσωτερικό του A είναι η αντίστοιχη ανοικτή μπάλα ή το αντίστοιχο ανοικτό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

Άσκηση 37: Βρείτε το εσωτερικό καθενός από τα σύνολα της άσκησης 11.

Άσκηση 38: Βρείτε το εσωτερικό καθενός από τα σύνολα της άσκησης 12.

Άσκηση 39: Βρείτε το εσωτερικό καθενός από τα σύνολα της άσκησης 13.

4. Χρειάζεται λίγη προσοχή όταν θεωρούμε το A ως υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X,d) και ενός υπόχωρου (W,d). Για παράδειγμα, έστω $A=[0,1]$ στον $\mathbf{R}$. Τα 0 και 1 δεν είναι εσωτερικά σημεία του $[0,1]$, οπότε $[0,1]^\circ=(0,1)$. Θεωρούμε, τώρα, το $[0,1]$ ως υποσύνολο του $W=[0,1]\cup[2,3]$ και παρατηρούμε ότι τα 0 και 1 *είναι* εσωτερικά σημεία του $[0,1]$, οπότε $[0,1]^\circ=[0,1]$.

Άσκηση 40: Έστω μετρικός χώρος (X,d), υπόχωρος (W,d) και $A\subseteq W$. Αν συμβολίσουμε $A^{\circ,X}$ το εσωτερικό του A ως υποσύνολο του (X,d) και $A^{\circ,W}$ το εσωτερικό του A ως υποσύνολο του (W,d), αποδείξτε ότι $A^{\circ,X}\subseteq A^{\circ,W}$.

Άσκηση 41: Έστω μη κενό X και δ_X η διακριτή μετρική στο X. Για κάθε $A\subseteq X$ αποδείξτε ότι $A^\circ=A$.

Πρόταση 4.8 *Έστω μετρικός χώρος (X,d) και $A\subseteq X$. Το A° είναι το πιο μεγάλο ανοικτό υποσύνολο του (X,d) το οποίο περιέχεται στο A.*

Απόδειξη: Θα δείξουμε πρώτα ότι το A° είναι ανοικτό υποσύνολο του (X,d). Έστω $x\in A^\circ$. Τότε υπάρχει $N_x\subseteq A$. Έστω $y\in N_x$. Η N_x είναι ανοικτό υποσύνολο του (X,d), οπότε υπάρχει $N_y\subseteq N_x\subseteq A$. Άρα, το y είναι εσωτερικό σημείο του A. Επομένως: $y\in N_x\ \Rightarrow\ y\in A^\circ$. Οπότε $N_x\subseteq A^\circ$. Άρα, το A° είναι ανοικτό υποσύνολο του (X,d) και, όπως ήδη γνωρίζουμε, $A^\circ\subset A$.

Κατόπιν, έστω B ανοικτό υποσύνολο του (X,d) με $B\subseteq A$. Θα αποδείξουμε ότι $B\subseteq A^\circ$ και θα έχουμε τελειώσει. Έστω $y\in B$. Τότε, αφού το B είναι ανοικτό υποσύνολο του (X,d), υπάρχει $N_y\subseteq B\subseteq A$. Άρα $y\in A^\circ$. Άρα, $B\subseteq A^\circ$. Ο.Ε.Δ.

Άσκηση 42: Έστω μετρικός χώρος (X,d), $A,B,A_1,\dots,A_n\subseteq X$ και Σ μία συλλογή υποσυνόλων του X.
1. Αποδείξτε ότι $A\subseteq B\ \Rightarrow\ A^\circ\subseteq B^\circ$.
2. Αποδείξτε ότι $(A^\circ)^\circ=A^\circ$.
3. Αποδείξτε ότι $(A_1\cap\cdots\cap A_n)^\circ=A_1^\circ\cap\cdots\cap A_n^\circ$.
4. Αποδείξτε ότι $(\bigcap_{A\in\Sigma}A)^\circ\subseteq\bigcap_{A\in\Sigma}A^\circ$.
5. Βρείτε συλλογή υποσυνόλων Σ του $\mathbf{R}$ ώστε $(\bigcap_{A\in\Sigma}A)^\circ\neq\bigcap_{A\in\Sigma}A^\circ$.
6. Αποδείξτε ότι $(\bigcup_{A\in\Sigma}A)^\circ\supseteq\bigcup_{A\in\Sigma}A^\circ$.
7. Βρείτε δύο υποσύνολα A και B του $\mathbf{R}$ ώστε $(A\cup B)^\circ\neq A^\circ\cup B^\circ$.

Άσκηση 43: Έστω μετρικός χώρος (X,d) και $A,B\subseteq X$.
1. Αν $A^\circ=B^\circ=\emptyset$ και το A είναι κλειστό υποσύνολο του X, αποδείξτε ότι $(A\cup B)^\circ=\emptyset$.
2. Βρείτε υποσύνολα A και B του $\mathbf{R}$ ώστε $A^\circ=B^\circ=\emptyset$ και $(A\cup B)^\circ=\mathbf{R}$.

Ορισμός 4.14 *Έστω μετρικός χώρος (X,d), $A\subseteq X$ και $x\in X$. Το x ονομάζεται **σημείο επαφής** ή **οριακό σημείο του** A, αν κάθε περιοχή N_x του x περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του A. Δηλαδή, αν για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει $y\in N_x(\epsilon)\cap A$ ή, ισοδύναμα, υπάρχει $y\in A$ με $d(y,x)<\epsilon$.*

Το σύνολο το οποίο έχει ως στοιχεία όλα τα σημεία επαφής του A και μόνον αυτά ονομάζεται ***κλειστότητα*** *ή* ***κλειστή θήκη του*** *A και συμβολίζεται $\overline{A}$.*

Πρόταση 4.9 *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$.*
1. Ισχύει $A \subseteq \overline{A}$.
2. Το A είναι κλειστό υποσύνολο του (X, d) αν και μόνον αν $\overline{A} = A$.

Απόδειξη: 1. Αν $x \in A$, τότε κάθε N_x περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του A, το ίδιο το x, και, επομένως, το x είναι σημείο επαφής του A. Άρα, $A \subseteq \overline{A}$.
2. Έστω ότι το A είναι κλειστό υποσύνολο του (X, d). Παίρνουμε τυχόν $x \in \overline{A}$. Αν $x \notin A$, τότε $x \in X \setminus A$ και, επειδή το $X \setminus A$ είναι ανοικτό υποσύνολο του (X, d), υπάρχει N_x ώστε $N_x \subseteq X \setminus A$. Δηλαδή, υπάρχει N_x η οποία δεν περιέχει κανένα σημείο του A. Αυτό, όμως, αντιφάσκει με το ότι $x \in \overline{A}$ ή, ισοδύναμα, με το ότι το x είναι σημείο επαφής του A. Άρα, $x \in A$. Επομένως, $\overline{A} \subseteq A$, οπότε $\overline{A} = A$.

Αντιστρόφως, έστω ότι $\overline{A} = A$. Παίρνουμε τυχόν $x \in X \setminus A$ και, επομένως, $x \notin \overline{A}$. Δηλαδή, το x δεν είναι σημείο επαφής του A, οπότε υπάρχει N_x η οποία δεν περιέχει κανένα σημείο του A ή, ισοδύναμα, $N_x \subseteq X \setminus A$. Αφού για κάθε $x \in X \setminus A$ υπάρχει N_x ώστε $N_x \subseteq X \setminus A$, συνεπάγεται ότι το $X \setminus A$ είναι ανοικτό υποσύνολο του (X, d) και, επομένως, το A είναι κλειστό υποσύνολο του (X, d). Ο.Ε.Δ.

Άσκηση 44: Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Αποδείξτε ότι: το A είναι κλειστό υποσύνολο του X αν και μόνον αν $\overline{A} \subseteq A$.

Παραδείγματα:
1. Έστω ο χώρος $\mathbf{R}$. Αν $A = [a, b]$, τότε $\overline{A} = [a, b]$. Αν $A = (a, b)$, τότε $\overline{A} = [a, b]$. Αν $A = (a, +\infty)$, τότε $\overline{A} = [a, +\infty)$. Αν $A = (a, b) \cup (b, c)$, τότε $\overline{A} = [a, c]$.

Το C είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}$, οπότε $\overline{C} = C$. Αν πάρουμε τυχόν $x \in \mathbf{R}$, σε κάθε $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός, οπότε το x είναι σημείο επαφής του $\mathbf{Q}$. Άρα, $\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$. Με την ίδια αιτιολόγηση, $\overline{\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}} = \mathbf{R}$.

Άσκηση 45: Αν το $A \subseteq \mathbf{R}$ είναι μη κενό και άνω φραγμένο, αποδείξτε ότι $\sup A \in \overline{A}$. Ομοίως, αν το A είναι μη κενό και κάτω φραγμένο, αποδείξτε ότι $\inf A \in \overline{A}$.

2. Στον $\mathbf{R}^2$ θεωρούμε ως A οποιονδήποτε δίσκο μαζί με κάποια από τα σημεία της περιφέρειάς του. Είναι φανερό ότι, εκτός των σημείων του δίσκου, *όλα* τα σημεία της περιφέρειας είναι σημεία επαφής του A και ότι *κανένα* σημείο που βρίσκεται πέρα και από την περιφέρεια δεν είναι σημείο επαφής του A. Επομένως, η κλειστότητα του A είναι ο αντίστοιχος κλειστός δίσκος. Ακριβώς τα ίδια ισχύουν αν αντί για δίσκο θεωρήσουμε οποιοδήποτε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Γενικότερα, έστω μία απλή σχετικά καμπύλη γ στο επίπεδο που χωρίζει το επίπεδο σε τρία υποσύνολα: το σύνολο A_1 των σημείων που βρίσκονται στη μία μεριά της γ, το σύνολο A_2 των σημείων που βρίσκονται στην άλλη μεριά της γ και το σύνολο των σημείων της γ. Αν A είναι το A_1 μαζί με μερικά από τα σημεία της γ, τότε, εκτός των σημείων του A_1, κάθε σημείο της γ είναι σημείο επαφής του A ενώ κανένα σημείο του A_2 δεν είναι σημείο επαφής του A. Άρα, η κλειστότητα του A είναι το $A_1 \cup \gamma$.

3. Έστω Γ μία απλή σχετικά επιφάνεια στον χώρο η οποία χωρίζει τον χώρο σε τρία υποσύνολα: το σύνολο A_1 των σημείων που βρίσκονται στη μία μεριά της Γ, το σύνολο A_2 των σημείων που βρίσκονται στην άλλη μεριά της Γ και το σύνολο των σημείων της Γ. Αν ως A θεωρήσουμε το A_1 μαζί με κάποια από τα σημεία της Γ, τότε, εκτός των σημείων του A_1, *όλα* τα σημεία της Γ είναι σημεία επαφής του A και *κανένα* από τα σημεία του A_2 δεν είναι σημείο επαφής του A. Επομένως, η κλειστότητα του A είναι το $A_1 \cup \Gamma$.

Ειδικότερα, αν A είναι οποιαδήποτε μπάλα ή ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο μαζί με κάποια από τα σημεία της συνοριακής επιφάνειας, η κλειστότητα του A είναι η αντίστοιχη κλειστή μπάλα ή το αντίστοιχο κλειστό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

Άσκηση 46: Βρείτε την κλειστότητα καθενός από τα σύνολα της άσκησης 11.

Άσκηση 47: Βρείτε την κλειστότητα καθενός από τα σύνολα της άσκησης 12.

Άσκηση 48: Βρείτε την κλειστότητα καθενός από τα σύνολα της άσκησης 13.

4. Όπως και με το εσωτερικό ενός συνόλου, χρειάζεται προσοχή όταν θεωρούμε το A ως υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X, d) και ενός υπόχωρου (W, d). Για παράδειγμα, έστω $A = (0, 1)$ στον $\mathbf{R}$. Τα 0 και 1 είναι σημεία επαφής του $(0, 1)$, οπότε $\overline{(0, 1)} = [0, 1]$. Θεωρούμε, τώρα, το $(0, 1)$ ως υποσύνολο του $W = (0, 1) \cup [2, 3]$ και παρατηρούμε ότι τα 0 και 1 *δεν* είναι σημεία επαφής του $(0, 1)$, διότι, απλούστατα, δεν ανήκουν στο W. Άρα, $\overline{(0, 1)} = (0, 1)$.

Άσκηση 49: Έστω μετρικός χώρος (X, d), υπόχωρος (W, d) και $A \subseteq W$. Αν συμβολίσουμε $\overline{A}^X$ την κλειστότητα του A ως υποσύνολο του (X, d) και $\overline{A}^W$ την κλειστότητα του A ως υποσύνολο του (W, d), αποδείξτε ότι $\overline{A}^W = \overline{A}^X \cap W$.

Άσκηση 50: Έστω μη κενό X και δ_X η διακριτή μετρική στο X. Για κάθε $A \subseteq X$ αποδείξτε ότι $\overline{A} = A$.

Πρόταση 4.10 *Αν $A \subseteq X$, το $\overline{A}$ είναι το μικρότερο κλειστό υποσύνολο του (X, d) το οποίο περιέχει το A.*

Απόδειξη: Κατ' αρχήν θα αποδείξουμε ότι το $\overline{A}$ είναι κλειστό υποσύνολο του (X, d). Παίρνουμε τυχόν $x \in X \setminus \overline{A}$, οπότε το x δεν είναι σημείο επαφής του A. Επομένως, υπάρχει N_x η οποία δεν περιέχει κανένα σημείο του A. Κατόπιν, παίρνουμε τυχόν $y \in N_x$. Επειδή η N_x είναι ανοικτό υποσύνολο του (X, d), υπάρχει $N_y \subseteq N_x$. Άρα, υπάρχει N_y η οποία δεν περιέχει κανένα σημείο του A και, επομένως, το y δεν είναι σημείο επαφής του A ή, ισοδύναμα, $y \in X \setminus \overline{A}$. Άρα, $N_x \subseteq X \setminus \overline{A}$. Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε $x \in X \setminus \overline{A}$ υπάρχει N_x ώστε $N_x \subseteq X \setminus \overline{A}$, οπότε το $X \setminus \overline{A}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του (X, d) και, επομένως, το $\overline{A}$ είναι κλειστό υποσύνολο του (X, d). Επίσης, όπως ήδη γνωρίζουμε, ισχύει $A \subseteq \overline{A}$.

Τώρα, έστω τυχόν B κλειστό υποσύνολο του (X,d) με $A \subseteq B$. Για να τελειώσει η απόδειξη πρέπει να αποδείξουμε ότι $\overline{A} \subseteq B$. Παίρνουμε τυχόν $x \in \overline{A}$. Αν $x \in X \setminus B$, επειδή το $X \setminus B$ είναι ανοικτό υποσύνολο του (X,d), υπάρχει N_x ώστε $N_x \subseteq X \setminus B$. Συνεπάγεται ότι η N_x δεν περιέχει κανένα σημείο του B και, επειδή $A \subseteq B$, η N_x δεν περιέχει κανένα σημείο του A. Αυτό αντιφάσκει με το ότι $x \in \overline{A}$ ή, ισοδύναμα, με το ότι το x είναι σημείο επαφής του A. Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε $x \in \overline{A}$ ισχύει $x \in B$. Άρα, $\overline{A} \subseteq B$. Ο.Ε.Δ.

Άσκηση 51: Έστω μετρικός χώρος (X,d), $A, B, A_1, \ldots, A_n \subseteq X$ και Σ μία οικογένεια υποσυνόλων του X.
1. Αποδείξτε ότι $A \subseteq B \;\Rightarrow\; \overline{A} \subseteq \overline{B}$.
2. Αποδείξτε ότι $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.
3. Αποδείξτε ότι $\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A_1} \cup \cdots \cup \overline{A_n}$.
4. Αποδείξτε ότι $\overline{\bigcup_{A\in\Sigma} A} \supseteq \bigcup_{A\in\Sigma} \overline{A}$.
5. Βρείτε οικογένεια υποσυνόλων του $\mathbf{R}$ ώστε $\overline{\bigcup_{A\in\Sigma} A} \neq \bigcup_{A\in\Sigma} \overline{A}$.
6. Αποδείξτε ότι $\overline{\bigcap_{A\in\Sigma} A} \subseteq \bigcap_{A\in\Sigma} \overline{A}$.
7. Βρείτε δύο υποσύνολα A και B του $\mathbf{R}$ ώστε $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Άσκηση 52: Έστω μετρικός χώρος (X,d) και $A \subseteq X$. Αποδείξτε ότι $A^\circ \subseteq (\overline{A})^\circ$ και $\overline{(A^\circ)} \subseteq \overline{A}$. Βρείτε υποσύνολο A του $\mathbf{R}$ ώστε $A^\circ \neq (\overline{A})^\circ$ και υποσύνολο A του $\mathbf{R}$ ώστε $\overline{(A^\circ)} \neq \overline{A}$.

Άσκηση 53: Έστω μετρικός χώρος (X,d) και $A \subseteq X$. Αποδείξτε ότι $(X \setminus A)^\circ = X \setminus \overline{A}$ και $\overline{(X \setminus A)} = X \setminus A^\circ$.

Άσκηση 54: Ένα υποσύνολο A του $\mathbf{R}^n$ ονομάζεται **κυρτό**, αν για κάθε $x, y \in A$ και κάθε $t \in (0,1)$ ισχύει $tx + (1-t)y \in A$. Ποιο είναι το γεωμετρικό νόημα αυτού του ορισμού στους $\mathbf{R}^2$ και $\mathbf{R}^3$;
1. Αποδείξτε ότι τα μόνα κυρτά υποσύνολα του $\mathbf{R}$ είναι τα διαστήματα. Αποδείξτε ότι κάθε n-διάστατη (κλειστή ή ανοικτή) μπάλα, κάθε n-διάστατο (κλειστό ή ανοικτό) ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, κάθε υπερεπίπεδο και κάθε (ανοικτός ή κλειστός) ημιχώρος στον $\mathbf{R}^n$ είναι κυρτό σύνολο.
2. Αν A είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$, αποδείξτε ότι τα A° και $\overline{A}$ είναι επίσης κυρτά υποσύνολα του $\mathbf{R}^n$.

Άσκηση 55: Έστω μετρικός χώρος (X,d) και $A \subseteq X$. Το A ονομάζεται **πυκνό στον** (X,d), αν $\overline{A} = X$.
1. Αποδείξτε ότι: το A είναι πυκνό στον X αν και μόνον αν κάθε περιοχή N_x καθενός σημείου $x \in X$ περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του A.
2. Είναι το $\mathbf{Q}$ πυκνό στον $\mathbf{R}$; Είναι το $\mathbf{Q}^2$ πυκνό στον $\mathbf{R}^2$; Είναι το $\mathbf{Q}^n$ πυκνό στον $\mathbf{R}^n$;
3. Ποια υποσύνολα του X είναι πυκνά στον X, αν ο X είναι εφοδιασμένος με την δ_X;

Άσκηση 56: Ένας μετρικός χώρος (X,d) ονομάζεται **διαχωρίσιμος**, αν υπάρχει υποσύνολο του A με τις ιδιότητες:

(i) το A είναι αριθμήσιμο και
(ii) $\overline{A} = X$, δηλαδή, το A είναι πυκνό στον X.
1. Είναι ο $\mathbf{R}$ διαχωρίσιμος; Είναι ο $\mathbf{R}^n$ διαχωρίσιμος;
2. Έστω ο (X, δ_X). Αποδείξτε ότι: ο (X, δ_X) είναι διαχωρίσιμος αν και μόνον αν το X είναι αριθμήσιμο σύνολο.
3. Έστω υπόχωρος (W, d) του (X, d). Αν ο (X, d) είναι διαχωρίσιμος, αποδείξτε ότι και ο (W, d) είναι διαχωρίσιμος.

Άσκηση 57: Έστω μετρικός χώρος (X, d), $a \in X$ και $\epsilon > 0$.
1. Αποδείξτε ότι $\overline{N_a(\epsilon)} \subseteq \overline{N_a}(\epsilon)$.
2. Ισχύει πάντοτε ότι $\overline{N_a(\epsilon)} = \overline{N_a}(\epsilon)$; (Υπόδειξη: Έστω $d = \delta_X$, η διακριτή μετρική στο X.)
3. Στον $\mathbf{R}^n$ αποδείξτε ότι $\overline{N_a(\epsilon)} = \overline{N_a}(\epsilon)$.

Άσκηση 58: Έστω μετρικός χώρος (X, d), μη κενό $E \subseteq X$ και $x \in E$. Ορίζουμε την **απόσταση του** x **από το** E με τον τύπο $d_E(x) = \inf_{y \in E} d(x, y)$.
1. Αποδείξτε την ύπαρξη του infimum.
2. Αποδείξτε ότι: $d_E(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x \in \overline{E}$.

Ορισμός 4.15 *Έστω μετρικός χώρος (X, d), $A \subseteq X$ και $x \in X$. Το x ονομάζεται* ***σημείο συσσώρευσης του*** *A, αν κάθε περιοχή N_x του x περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του A διαφορετικό από το ίδιο το x. Δηλαδή, αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $y \in N_x(\epsilon) \cap (A \setminus \{x\})$ ή, ισοδύναμα, υπάρχει $y \in A$ με $0 < d(y, x) < \epsilon$.*

Το σύνολο το οποίο έχει ως στοιχεία όλα τα σημεία συσσώρευσης του A και μόνον αυτά ονομάζεται ***παράγωγο σύνολο του*** *A και συμβολίζεται A'.*

Παράδειγμα:
Θεωρούμε τον χώρο $\mathbf{R}$. Αν $A = [a, b]$, τότε $A' = [a, b]$. Αν $A = (a, b)$, τότε $A' = [a, b]$. Αν $A = (a, +\infty)$, τότε $A' = [a, +\infty)$.

Έστω $A = \{a\} \cup (b, c)$, όπου $a < b < c$. Το a δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A, οπότε $A' = [b, c]$. Αν $A = \{a, b\}$, τότε $A' = \emptyset$.

Άσκηση 59: Ποια είναι η διαφορά ανάμεσα στην έννοια του σημείου επαφής και στην έννοια του σημείου συσσώρευσης; Υπάρχει παράδειγμα σημείου επαφής το οποίο δεν είναι σημείο συσσώρευσης και παράδειγμα για το αντίστροφο;

Άσκηση 60: Βρείτε το παράγωγο σύνολο καθενός από τα σύνολα της άσκ. 11.

Άσκηση 61: Βρείτε το παράγωγο σύνολο καθενός από τα σύνολα της άσκ. 12.

Άσκηση 62: Βρείτε το παράγωγο σύνολο καθενός από τα σύνολα της άσκ. 13.

Άσκηση 63: Βρείτε υποσύνολο του $\mathbf{R}$ και υποσύνολο του $\mathbf{R}^2$ με ακριβώς δύο σημεία συσσώρευσης για το καθένα.

Άσκηση 64: Έστω μετρικός χώρος (X, d), $A \subseteq X$ και $x \in X$. Αποδείξτε ότι: το x είναι σημείο συσσώρευσης του A αν και μόνον αν κάθε περιοχή του x

περιέχει άπειρα σημεία του A.

Παράδειγμα:
Έστω μη κενό X με την διακριτή μετρική δ_X, $A \subseteq X$ και $x \in X$. Το x δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A, διότι η $N_x(1)$ είναι ίδια με το $\{x\}$ και, επομένως, δεν περιέχει κανένα σημείο του A εκτός από το ίδιο το x. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι κάθε υποσύνολο του X δεν έχει κανένα σημείο συσσώρευσης. Δηλαδή, για κάθε $A \subseteq X$ έχουμε $A' = \emptyset$.

Πρόταση 4.11 *Έστω μετρικός χώρος* (X, d) *και* $A \subseteq X$. *Τότε* $\overline{A} = A \cup A'$.

Απόδειξη: Έστω τυχόν $x \in A'$. Τότε κάθε N_x περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του A διαφορετικό από το X. Άρα, κάθε N_x περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του A και, επομένως, το x είναι σημείο επαφής του A, δηλαδή, $x \in \overline{A}$. Άρα, $A' \subseteq \overline{A}$. Επειδή $A \subseteq \overline{A}$, συνεπάγεται $A \cup A' \subseteq \overline{A}$.

Έστω, τώρα, $x \in \overline{A}$. Αν $x \in A$, τότε $x \in A \cup A'$. Έστω $x \notin A$. Επειδή $x \in \overline{A}$, κάθε N_x περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του A και, επειδή το x δεν ανήκει στο A, το σημείο αυτό είναι διαφορετικό από το x. Άρα, το x είναι σημείο συσσώρευσης του A ή, ισοδύναμα, $x \in A'$ και, επομένως, $x \in A \cup A'$. Άρα, κάθε $x \in \overline{A}$ ανήκει, σε κάθε περίπτωση, στο $A \cup A'$, οπότε $\overline{A} \subseteq A \cup A'$. Ο.Ε.Δ.

Άσκηση 65: Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Αποδείξτε ότι: το A είναι κλειστό υποσύνολο του X αν και μόνον αν $A' \subseteq A$.

Άσκηση 66: Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A, B \subseteq X$.
1. Αποδείξτε ότι το A' είναι κλειστό υποσύνολο του (X, d).
2. Αποδείξτε ότι $A' = (\overline{A})'$. Δηλαδή, τα A και $\overline{A}$ έχουν τα ίδια σημεία συσσώρευσης.
3. Αποδείξτε ότι $A \subseteq B \ \Rightarrow \ A' \subseteq B'$.
4. Αποδείξτε ότι $(A')' \subseteq A'$.
5. Βρείτε υποσύνολο A του $\mathbf{R}$ ώστε $(A')' \neq A'$.

Άσκηση 67: Έστω μετρικός χώρος (X, d) με την εξής ιδιότητα: οποιοδήποτε άπειρο υποσύνολο του X έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης.
1. Θεωρήστε τυχόν $\epsilon > 0$ και αποδείξτε ότι υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους σημεία του X ώστε κάθε άλλο σημείο του X να έχει απόσταση μικρότερη από ϵ από τουλάχιστον ένα από αυτά. (Υπόδειξη: Υποθέστε ότι αυτό δεν ισχύει και πάρτε τυχαίο $x_1 \in X$. Τότε υπάρχει $x_2 \in X$ ώστε $d(x_1, x_2) \geq \epsilon$. Κατόπιν, υπάρχει $x_3 \in X$ ώστε $d(x_1, x_3) \geq \epsilon$ και $d(x_2, x_3) \geq \epsilon$. Συνεχίζοντας επαγωγικά, κατασκευάστε άπειρο υποσύνολο $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ του X του οποίου κάθε δύο σημεία έχουν την μεταξύ τους απόσταση όχι μικρότερη από ϵ. Συμπεράνατε ότι το σύνολο αυτό δεν έχει κανένα σημείο συσσώρευσης.)
2. Αποδείξτε ότι ο (X, d) είναι διαχωρίσιμος. (Υπόδειξη: Σύμφωνα με το 1, για κάθε $n \in \mathbf{N}$ υπάρχουν $k_n \in \mathbf{N}$ και $x_{n,1}, \ldots, x_{n,k_n} \in X$ ώστε κάθε $x \in X$ να έχει απόσταση μικρότερη από $\frac{1}{n}$ από τουλάχιστον ένα από τα $x_{n,1}, \ldots, x_{n,k_n}$. Αποδείξτε ότι το $A = \{x_{n,m} : n, m \in \mathbf{N}, 1 \leq m \leq k_n\}$ είναι αριθμήσιμο και πυκνό στον X.)

Άσκηση 68: Έστω $A \subseteq \mathbf{R}$ και $x \in \mathbf{R}$. Το x ονομάζεται **σημείο συμπύκνωσης του** A, αν για κάθε $\epsilon > 0$ η $N_x(\epsilon)$ περιέχει υπεραριθμήσιμου πλήθους στοιχεία του A.
1. Αν το A είναι αριθμήσιμο, αποδείξτε ότι το A δεν έχει κανένα σημείο συμπύκνωσης.
2. Έστω ότι το A είναι υπεραριθμήσιμο. Αν P είναι το σύνολο όλων των σημείων συμπύκνωσης του A, αποδείξτε ότι $P' = P$ και ότι το $A \setminus P$ είναι αριθμήσιμο.

Άσκηση 69: Έστω $P \subseteq \mathbf{R}$. Το P ονομάζεται **τέλειο**, αν $P' = P$.
1. Βρείτε μερικά απλά παραδείγματα τέλειων συνόλων. Είναι το C τέλειο σύνολο;
2. Αν A είναι οποιοδήποτε κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}$, αποδείξτε ότι υπάρχει κάποιο τέλειο σύνολο P και κάποιο αριθμήσιμο σύνολο Z ώστε $A = P \cup Z$ και $P \cap Z = \emptyset$. (Υπόδειξη: Δείτε την προηγούμενη άσκηση και διακρίνατε τις περιπτώσεις: A είναι αριθμήσιμο, A είναι υπεραριθμήσιμο.)

Ορισμός 4.16 *Έστω μετρικός χώρος (X, d), $A \subseteq X$ και $x \in X$. Το x ονομάζεται **συνοριακό σημείο του** A, αν κάθε περιοχή N_x περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του A και τουλάχιστον ένα σημείο του $X \setminus A$. Το σύνολο το οποίο περιέχει όλα τα συνοριακά σημεία του A και μόνον αυτά ονομάζεται **σύνορο του** A και συμβολίζεται ∂A.*

Παραδείγματα:
1. Θεωρούμε τον χώρο $\mathbf{R}$. Αν $A = (a, b)$ ή $[a, b]$, τότε $\partial A = \{a, b\}$. Αν $A = (a, +\infty)$, τότε $\partial A = \{a\}$.

Κάθε περιοχή καθενός $x \in \mathbf{R}$ περιέχει και ρητούς και άρρητους αριθμούς. Επομένως, $\partial\mathbf{Q} = \mathbf{R}$ και $\partial(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) = \mathbf{R}$.

2. Στον $\mathbf{R}^2$ έστω A οποιοσδήποτε δίσκος μαζί με κάποια από τα σημεία της περιφέρειάς του. Είναι φανερό ότι, τα μόνα συνοριακά σημεία του A είναι *όλα* τα σημεία της περιφέρειας του δίσκου. Επομένως, το σύνορο του A είναι η περιφέρεια του δίσκου. Ομοίως, αν αντί για δίσκο θεωρήσουμε οποιοδήποτε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, το σύνορο του A είναι η περιφέρεια του παραλληλογράμμου.

Γενικότερα, έστω μία απλή σχετικά καμπύλη γ στο επίπεδο που χωρίζει το επίπεδο σε τρία υποσύνολα: το σύνολο A_1 των σημείων που βρίσκονται στη μία μεριά της γ, το σύνολο A_2 των σημείων που βρίσκονται στην άλλη μεριά της γ και το σύνολο των σημείων της γ. Αν A είναι το A_1 μαζί με μερικά από τα σημεία της γ, τότε όλα τα σημεία της γ και μόνον αυτά είναι συνοριακά σημεία του A. Άρα, η κλειστότητα του A είναι η γ.

3. Έστω Γ μία απλή σχετικά επιφάνεια στον χώρο η οποία χωρίζει τον χώρο σε τρία υποσύνολα: το σύνολο A_1 των σημείων που βρίσκονται στη μία μεριά της Γ, το σύνολο A_2 των σημείων που βρίσκονται στην άλλη μεριά της Γ και το σύνολο των σημείων της Γ. Αν A είναι το A_1 μαζί με κάποια από τα σημεία της Γ, τότε όλα τα σημεία της Γ και μόνον αυτά είναι συνοριακά σημεία του A και, επομένως, το σύνορο του A είναι η Γ.

Ειδικότερα, αν A είναι οποιαδήποτε μπάλα ή ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο μαζί με κάποια από τα σημεία της συνοριακής επιφάνειας, το σύνορο του A είναι η αντίστοιχη συνοριακή επιφάνεια.

Άσκηση 70: Βρείτε το σύνορο καθενός από τα σύνολα της άσκησης 11.

Άσκηση 71: Βρείτε το σύνορο καθενός από τα σύνολα της άσκησης 12.

Άσκηση 72: Βρείτε το σύνορο καθενός από τα σύνολα της άσκησης 13.

Άσκηση 73: Αποδείξτε ότι το σύνορο οποιουδήποτε ημιχώρου στον $\mathbf{R}^n$ με συνοριακό υπερεπίπεδο Γ είναι το Γ.

Άσκηση 74: Έστω μη κενό X, δ_X η διακριτή μετρική στο X και $A \subseteq X$. Αποδείξτε ότι $\partial A = \emptyset$.

Άσκηση 75: Θεωρήστε τον χώρο $\mathbf{R}$ και τον υπόχωρο $[0,1] \cup [2,3]$. Αν το $A = [0,1]$ το θεωρήσουμε ως υποσύνολο του $\mathbf{R}$, ποιο είναι το σύνορο του A; Αν το $A = [0,1]$ το θεωρήσουμε ως υποσύνολο του $[0,1] \cup [2,3]$, ποιο είναι το σύνορο του A;

Άσκηση 76: Έστω μετρικός χώρος (X,d), υπόχωρος (W,d) και $A \subseteq W$. Αν συμβολίσουμε $\partial_X A$ και $\partial_W A$ το σύνορο του A ως υποσύνολο του X και του W, αντιστοίχως, αποδείξτε ότι $\partial_W A \subseteq \partial_X A \cap W$.

Πρόταση 4.12 *Έστω μετρικός χώρος (X,d) και $A \subseteq X$.*
1. $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.
2. $\partial A = \partial(X \setminus A)$.
3. $\overline{A} = A \cup \partial A$.

Απόδειξη: 1. Η ισότητα αυτή είναι άμεση απόρροια των ορισμών του σημείου επαφής και του συνοριακού σημείου.
2. Οι ορισμοί του συνοριακού σημείου του A και του συνοριακού σημείου του $X \setminus A$ είναι ακριβώς ίδιοι.
3. Ισχύει $A \subseteq \overline{A}$ και, από το 1, $\partial A \subseteq \overline{A}$. Άρα, $A \cup \partial A \subseteq \overline{A}$. Αντιστρόφως, έστω $x \in \overline{A}$. Αν $x \in A$, τότε $x \in A \cup \partial A$. Έστω $x \notin A$. Επειδή $x \in \overline{A}$, κάθε N_x περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του A και, επειδή το x δεν ανήκει στο A, η ίδια περιοχή περιέχει και τουλάχιστον ένα σημείο του $X \setminus A$, το ίδιο το x. Άρα το x είναι συνοριακό σημείο του A, οπότε $x \in \partial A$. Έχουμε, λοιπόν, ότι κάθε $x \in \overline{A}$ ανήκει, σε κάθε περίπτωση, στο $A \cup \partial A$. Άρα, $\overline{A} \subseteq A \cup \partial A$. Ο.Ε.Δ.

Άσκηση 77: Έστω μετρικός χώρος (X,d) και $A \subseteq X$.
1. Αποδείξτε ότι το A είναι κλειστό υποσύνολο του X αν και μόνον αν $\partial A \subseteq A$.
2. Αποδείξτε ότι $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$.

Άσκηση 78: Έστω μετρικός χώρος (X,d) και $A, B \subseteq X$.
1. Αν το A είναι ανοικτό υποσύνολο του X ή αν το A είναι κλειστό υποσύνολο του X, αποδείξτε ότι $(\partial A)^\circ = \emptyset$.
2. Βρείτε υποσύνολο A του $\mathbf{R}$ ώστε $(\partial A)^\circ = \mathbf{R}$.
3. Αν $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, αποδείξτε ότι $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$.

4.4 Όρια και συνέχεια συναρτήσεων.

Ορισμός 4.17 *Έστω μετρικοί χώροι (X,d) και (Y,ρ), $A \subseteq X$, $f : A \to Y$, $x_0 \in X$ σημείο συσσώρευσης του A και $y_0 \in Y$. Λέμε ότι το y_0 είναι **όριο της f στο** x_0, και συμβολίζουμε*

$$y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x)\,,$$

αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ ώστε:

$$x \in A,\ 0 < d(x,x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad \rho(f(x),y_0) < \epsilon\,.$$

Είναι φανερό ότι ο προηγούμενος ορισμός διατυπώνεται, ισοδύναμα, ως εξής. Ισχύει $y_0 = \lim_{x\to x_0} f(x)$, αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ ώστε:

$$x \in N_{x_0}(\delta) \cap (A \setminus \{x_0\}) \quad \Rightarrow \quad f(x) \in N_{y_0}(\epsilon)\,.$$

Επίσης, μπορούμε να τον διατυπώσουμε ως εξής. Ισχύει $y_0 = \lim_{x\to x_0} f(x)$, αν για κάθε περιοχή N_{y_0} του y_0 υπάρχει αντίστοιχη περιοχή N_{x_0} του x_0 ώστε:

$$x \in N_{x_0} \cap (A \setminus \{x_0\}) \quad \Rightarrow \quad f(x) \in N_{y_0}\,.$$

Παράδειγμα:
Έστω ότι το X είναι εφοδιασμένο με τη διακριτή μετρική δ_X. Τότε για καμία συνάρτηση ορισμένη σε υποσύνολο του X δεν έχει νόημα η μελέτη ορίου, διότι κάθε υποσύνολο του X δεν έχει κανένα σημείο συσσώρευσης.

Άσκηση 79: Έστω μετρικοί χώροι (X,d) και (Y,ρ), $A \subseteq X$, $x_0 \in X$ σημείο συσσώρευσης του A και $f : A \to Y$ η οποία είναι σταθερή στο A, δηλαδή, υπάρχει $y_0 \in Y$ ώστε $f(x) = y_0$ για κάθε $x \in A$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$. Ποιες είναι οι κατάλληλες επιλογές για το δ συναρτήσει του ϵ;

Πρόταση 4.13 *Έστω μετρικοί χώροι (X,d) και (Y,ρ), $A \subseteq X$, $f : A \to Y$ και $x_0 \in X$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν υπάρχει στον Y όριο της f στο x_0, αυτό είναι μοναδικό.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε $y_0' = \lim_{x\to x_0} f(x)$ και $y_0'' = \lim_{x\to x_0} f(x)$, όπου y_0' και y_0'' είναι στοιχεία του Y, και παίρνουμε τυχόν $\epsilon > 0$.

Βρίσκουμε $\delta' > 0$ ώστε: $x \in A,\ 0 < d(x,x_0) < \delta' \ \Rightarrow\ \rho(f(x),y_0') < \frac{\epsilon}{2}$. Επίσης, βρίσκουμε $\delta'' > 0$ ώστε: $x \in A,\ 0 < d(x,x_0) < \delta'' \ \Rightarrow\ \rho(f(x),y_0'') < \frac{\epsilon}{2}$. Θέτουμε $\delta = \min(\delta',\delta'')$, οπότε: $x \in A,\ 0 < d(x,x_0) < \delta \ \Rightarrow\ \rho(f(x),y_0') < \frac{\epsilon}{2}$ και $\rho(f(x),y_0'') < \frac{\epsilon}{2}$.

Παίρνουμε, τώρα, οποιοδήποτε $x \in A$ με $0 < d(x,x_0) < \delta$ ή, ισοδύναμα, οποιοδήποτε $x \in N_{x_0}(\delta) \cap (A \setminus \{x_0\})$. Υπάρχει *τουλάχιστον ένα* τέτοιο x, διότι το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A. Με αυτό το x που επιλέξαμε έχουμε $\rho(f(x),y_0') < \frac{\epsilon}{2}$ και $\rho(f(x),y_0'') < \frac{\epsilon}{2}$ και, επομένως, $\rho(y_0',y_0'') \leq \rho(f(x),y_0') + \rho(f(x),y_0'') < \epsilon$.

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $0 \leq \rho(y_0',y_0'') < \epsilon$. Άρα, $\rho(y_0',y_0'') = 0$ και, επομένως, $y_0' = y_0''$. Ο.Ε.Δ.

Βάσει του αποτελέσματος της Πρότασης 4.13, μπορούμε να μιλάμε για *το* όριο μίας συνάρτησης σε κάποιο σημείο.

Ορισμός 4.18 *Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $A \subseteq X$, $f : A \to Y$ και $x_0 \in A$. Λέμε ότι* ***η f είναι συνεχής στο*** *x_0, αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ ώστε:*

$$x \in A,\ d(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad \rho(f(x), f(x_0)) < \epsilon\,.$$

Ο προηγούμενος ορισμός διατυπώνεται, ισοδύναμα, ως εξής. Η f είναι συνεχής στο x_0, αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ ώστε:

$$x \in N_{x_0}(\delta) \cap A \quad \Rightarrow \quad f(x) \in N_{f(x_0)}(\epsilon)\,.$$

Ή, πιο απλά. Η f είναι συνεχής στο x_0, αν για κάθε περιοχή $N_{f(x_0)}$ του $f(x_0)$ υπάρχει περιοχή N_{x_0} του x_0 ώστε:

$$x \in N_{x_0} \cap A \quad \Rightarrow \quad f(x) \in N_{f(x_0)}\,.$$

Ορισμός 4.19 *Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $A \subseteq X$ και $f : A \to Y$. Λέμε ότι* ***η f είναι συνεχής στο*** *A, αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του A.*

Άσκηση 80: Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $A \subseteq X$, $x_0 \in A$ και $f : A \to Y$.
1. Αν το x_0 δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A, αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο x_0.
2. Αν το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A, αποδείξτε ότι: η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνον αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Άσκηση 81: Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $A \subseteq X$ και $f : A \to Y$ η οποία είναι σταθερή στο A, δηλαδή, υπάρχει $y_0 \in Y$ ώστε $f(x) = y_0$ για κάθε $x \in A$. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο A. Ποιες είναι οι κατάλληλες επιλογές για το δ συναρτήσει του ϵ;

Άσκηση 82: Αποδείξτε ότι κάθε συνάρτηση f ορισμένη σε οποιοδήποτε υποσύνολο A μετρικού χώρου (X, δ_X) είναι συνεχής στο A. Ποιες είναι οι κατάλληλες επιλογές για το δ συναρτήσει του ϵ;

Άσκηση 83: Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $B \subseteq A \subseteq X$ ώστε $\overline{B} = A$, $y_0 \in Y$ και $f : A \to Y$ συνεχής στο A. Αν $f(x) = y_0$ για κάθε $x \in B$, αποδείξτε ότι $f(x) = y_0$ για κάθε $x \in A$. (Υπόδειξη: Πάρτε τυχόν $x_0 \in A$ και τυχόν $\epsilon > 0$. Εφαρμόστε τον ορισμό της συνέχειας στο x_0 καθώς και το ότι $x_0 \in \overline{B}$ για να αποδείξετε ότι υπάρχει κάποιο $x \in B$ ώστε $\rho(f(x), f(x_0)) < \epsilon$. Συμπεράνατε ότι $\rho(y_0, f(x_0)) < \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$, οπότε $f(x_0) = y_0$.)

Θεώρημα 4.3 *Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $A \subseteq X$ και $f : A \to Y$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
1. Η f είναι συνεχής στο A.
2. Για κάθε ανοικτό υποσύνολο B του (Y, ρ) το $f^{-1}(B)$ είναι ανοικτό υποσύνολο

του υπόχωρου (A,d).
3. Για κάθε κλειστό υποσύνολο B *του* (Y,ρ) *το* $f^{-1}(B)$ *είναι κλειστό υποσύνολο του υπόχωρου* (A,d).

Απόδειξη: $[1 \Rightarrow 2]$. Έστω η f συνεχής στο A. Παίρνουμε τυχόν ανοικτό υποσύνολο B του (Y,ρ) και, κατόπιν, τυχόν $x_0 \in f^{-1}(B)$ (οπότε $f(x_0) \in B$). Υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $N_{f(x_0)}(\epsilon) \subseteq B$. Κατόπιν, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: $x \in N_{x_0}(\delta) \cap A \Rightarrow f(x) \in N_{f(x_0)}(\epsilon)$. Επομένως: $x \in N_{x_0}(\delta) \cap A \Rightarrow f(x) \in B$. Ισοδύναμα: $x \in N_{x_0}(\delta) \cap A \Rightarrow x \in f^{-1}(B)$. Ισοδύναμα: $N_{x_0}(\delta) \cap A \subseteq f^{-1}(B)$. Όμως, το σύνολο $N_{x_0}(\delta) \cap A$ δεν είναι τίποτα άλλο από την δ-περιοχή του x_0 στον μετρικό υπόχωρο (A,d). Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε $x_0 \in f^{-1}(B)$ υπάρχει κάποια περιοχή του x_0 στον μετρικό υπόχωρο (A,d) η οποία περιέχεται στο $f^{-1}(B)$. Αυτό σημαίνει ότι το $f^{-1}(B)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του (A,d).
$[2 \Rightarrow 1]$. Παίρνουμε τυχόν $x_0 \in A$ για να αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0. Έστω τυχόν $\epsilon > 0$. Η $N_{f(x_0)}(\epsilon)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του (Y,ρ), οπότε, βάσει της υπόθεσης, το $f^{-1}\big(N_{f(x_0)}(\epsilon)\big)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του υπόχωρου (A,d). Επειδή $x_0 \in f^{-1}\big(N_{f(x_0)}(\epsilon)\big)$ (διότι $f(x_0) \in N_{f(x_0)}(\epsilon)$), υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η $N_{x_0}(\delta) \cap A$ να περιέχεται στο $f^{-1}\big(N_{f(x_0)}(\epsilon)\big)$. Δηλαδή: $x \in N_{x_0}(\delta) \cap A \Rightarrow x \in f^{-1}\big(N_{f(x_0)}(\epsilon)\big)$. Ισοδύναμα: $x \in N_{x_0}(\delta) \cap A \Rightarrow f(x) \in N_{f(x_0)}(\epsilon)$. Αυτό σημαίνει ότι η f είναι συνεχής στο x_0.
$[2 \Rightarrow 3]$. Έστω τυχόν κλειστό υποσύνολο B του (Y,ρ). Το $Y \setminus B$ είναι ανοικτό υποσύνολο του (Y,ρ), οπότε το $A \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του υπόχωρου (A,d). Άρα, το $f^{-1}(B)$ είναι κλειστό υποσύνολο του (A,d).
$[3 \Rightarrow 2]$. Έστω τυχόν ανοικτό υποσύνολο B του (Y,ρ). Το $Y \setminus B$ είναι κλειστό υποσύνολο του (Y,ρ), οπότε το $A \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B)$ είναι κλειστό υποσύνολο του υπόχωρου (A,d). Άρα, το $f^{-1}(B)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του (A,d).
Ο.Ε.Δ.

Άσκηση 84: Έστω μετρικός χώρος (X,d), $A \subseteq X$, $a,b,c \in \mathbf{R}$ και $f : A \to \mathbf{R}$ συνεχής στο A. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι κλειστά υποσύνολα του (A,d): $\{x \in A : f(x) = a\}$, $\{x \in A : f(x) \geq a\}$ και $\{x \in A : f(x) = a$ ή b ή $c\}$.

Άσκηση 85: Αποδείξτε ότι τα $\{x \in \mathbf{R} : 2 < x^3 - x < 4\}$ και $\{x \in \mathbf{R} : \frac{\sin x}{2} < e^x < \sin x\}$ είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbf{R}$. Αποδείξτε ότι το $\{x \in [0,1] : \frac{1}{4} < x^2 < 4\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $[0,1]$.

Άσκηση 86: Έστω μετρικοί χώροι (X,d) και (Y,ρ), $A \subseteq X$ και $f : A \to Y$. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
1. Η f είναι συνεχής στο A.
2. $f^{-1}(B^\circ) \subseteq \big(f^{-1}(B)\big)^\circ \cap A$ για κάθε $B \subseteq Y$.
3. $f(\overline{B} \cap A) \subseteq \overline{f(B)}$ για κάθε $B \subseteq A$.

Παράδειγμα:
Θα δούμε, τώρα, μία σημαντική μέθοδο αναγνώρισης ανοικτών ή κλειστών υποσυνόλων του ευκλείδιου χώρου $\mathbf{R}^n$ ή και υποχώρων A του $\mathbf{R}^n$.

Για παράδειγμα, έστω $A \subseteq \mathbf{R}^n$, $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *συνεχής* στο A και $a,b \in \mathbf{R}$.

Τα $\{x \in A : a < f(x)\} = f^{-1}((a, +\infty))$, $\{x \in A : f(x) < b\} = f^{-1}((-\infty, b))$ και $\{x \in A : a < f(x) < b\} = f^{-1}((a, b))$ είναι ανοικτά υποσύνολα του A ως αντίστροφες εικόνες των ανοικτών υποσυνόλων $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$ και (a, b) του $\mathbf{R}$. Ομοίως, τα $\{x \in A : a \leq f(x)\} = f^{-1}([a, +\infty))$, $\{x \in A : f(x) \leq b\} = f^{-1}((-\infty, b])$ και $\{x \in A : a \leq f(x) \leq b\} = f^{-1}([a, b])$ είναι κλειστά υποσύνολα του A.

Φυσικά, μπορούμε, εκτός από διαστήματα, να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε άλλο ανοικτό ή κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}$.

Η εφαρμογή αυτής της μεθόδου προϋποθέτει, βέβαια, ότι μπορούμε να αναγνωρίζουμε συνεχείς συναρτήσεις $A \to \mathbf{R}$ ορισμένες σε υποσύνολα A του $\mathbf{R}^n$. Οι επόμενες προτάσεις θα μας βοηθήσουν να αποκτήσουμε ένα σημαντικό απόθεμα συνεχών συναρτήσεων.

Πρόταση 4.14 *Έστω (X, d), (Y, ρ) και (Z, τ) τρεις μετρικοί χώροι, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, $x_0 \in A$, $f : A \to B$ και $g : B \to Z$. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και η g είναι συνεχής στο $y_0 = f(x_0)$, τότε η $g \circ f : A \to Z$ είναι συνεχής στο x_0.*

Απόδειξη: Έστω $\epsilon > 0$. Υπάρχει $\delta' = \delta'(\epsilon) > 0$ ώστε $\tau(g(y), g(y_0)) < \epsilon$ για κάθε $y \in B$ με $\rho(y, y_0) < \delta'$. Κατόπιν, υπάρχει $\delta = \delta(\delta') = \delta(\epsilon) > 0$ ώστε $\rho(f(x), f(x_0)) < \delta'$ για κάθε $x \in A$ με $d(x, x_0) < \delta$. Επομένως: $x \in A$, $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(x_0)) < \delta' \Rightarrow \tau(g(f(x)), g(f(x_0))) < \epsilon$. Δηλαδή: $x \in A$, $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \tau((g \circ f)(x), (g \circ f)(x_0)) < \epsilon$. Άρα, η $g \circ f : A \to Z$ είναι συνεχής στο x_0. O.E.Δ.

Πρόταση 4.15 *Έστω μετρικός χώρος (X, d), $A \subseteq X$, $x_0 \in A$ και $f, g : A \to \mathbf{R}$ συνεχείς στο x_0. Τότε*
1. η $\lambda f + \mu g$ είναι συνεχής στο x_0 για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$,
2. η fg είναι συνεχής στο x_0 και,
3. αν $B = \{x \in A : g(x) \neq 0\}$ και $g(x_0) \neq 0$, τότε η $\frac{1}{g} : B \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής στο x_0.

Απόδειξη: 1. Παίρνουμε $\epsilon > 0$ και βρίσκουμε $\delta > 0$ ώστε $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2(|\lambda|+1)}$ και $|g(x) - g(x_0)| < \frac{\epsilon}{2(|\mu|+1)}$ για κάθε $x \in A$ με $d(x, x_0) < \delta$. Τότε: $x \in A$, $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \big|(\lambda f(x) + \mu g(x)) - (\lambda f(x_0) + \mu g(x_0))\big| \leq |\lambda||f(x) - f(x_0)| + |\mu||g(x) - g(x_0)| \leq |\lambda|\frac{\epsilon}{2(|\lambda|+1)} + |\mu|\frac{\epsilon}{2(|\mu|+1)} < \epsilon$.
2. Παίρνουμε $\epsilon > 0$ και θέτουμε $\epsilon_1 = \min\big(\sqrt{\frac{\epsilon}{3}}, \frac{\epsilon}{3(|f(x_0)|+1)}, \frac{\epsilon}{3(|g(x_0)|+1)}\big)$. Βρίσκουμε $\delta > 0$ ώστε $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon_1$ και $|g(x) - g(x_0)| < \epsilon_1$ για κάθε $x \in A$ με $d(x, x_0) < \delta$. Τότε: $x \in A$, $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)||g(x) - g(x_0)| + |f(x_0)||g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)||f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon_1^2 + |f(x_0)|\epsilon_1 + |g(x_0)|\epsilon_1 < \epsilon$.
3. Παίρνουμε $\epsilon > 0$ και, κατ᾽ αρχήν, βρίσκουμε $\delta' > 0$ ώστε $|g(x) - g(x_0)| < \frac{|g(x_0)|}{2}$ για κάθε $x \in A$ με $d(x, x_0) < \delta'$. Συνεπάγεται $|g(x)| > \frac{|g(x_0)|}{2}$ για κάθε $x \in A$ με $d(x, x_0) < \delta'$. Κατόπιν, βρίσκουμε $\delta'' > 0$ ώστε $|g(x) - g(x_0)| < \frac{g(x_0)^2}{2}\epsilon$ για κάθε $x \in A$ με $d(x, x_0) < \delta''$. Θέτουμε $\delta = \min(\delta', \delta'')$ και έχουμε: $x \in B$, $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \big|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\big| = \frac{|g(x) - g(x_0)|}{|g(x)||g(x_0)|} \leq \frac{2|g(x) - g(x_0)|}{g(x_0)^2} < \epsilon$. O.E.Δ.

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες προτάσεις, μπορούμε, ξεκινώντας από πολύ απλές συνεχείς συναρτήσεις, να κατασκευάζουμε όλο και πιο πολύπλοκες.

Παράδειγμα:
Στον $\mathbf{R}^n$ ορίζεται για κάθε k με $1 \leq k \leq n$ η συνάρτηση k-**προβολή**

$$\pi_k : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

με τύπο

$$\pi_k(x) = x^{(k)}, \qquad x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) \in \mathbf{R}^n .$$

Κάθε π_k είναι συνεχής στον $\mathbf{R}^n$, διότι, $|\pi_k(x) - \pi_k(y)| = |x^{(k)} - y^{(k)}| \leq \sqrt{(x^{(1)} - y^{(1)})^2 + \cdots + (x^{(n)} - y^{(n)})^2} = d_{n,2}(x, y)$ για κάθε $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ και $y = (y^{(1)}, \ldots, y^{(n)})$ στον $\mathbf{R}^n$.

Άρα, αν η $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$, τότε η $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ με τύπο

$$f(x) = g(x^{(k)}), \qquad x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) \in \mathbf{R}^n$$

είναι συνεχής στον $\mathbf{R}^n$, διότι $f = g \circ \pi_k$.

Άρα, *πολυωνυμικές συναρτήσεις* $p : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, δηλαδή, συναρτήσεις με τύπο

$$p(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) = A \cdot (x^{(1)})^{a_1} \cdots (x^{(n)})^{a_n} + B \cdot (x^{(1)})^{b_1} \cdots (x^{(n)})^{b_n} + \cdots ,$$

όπου οι εκθέτες είναι όλοι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί, οι συντελεστές είναι όλοι πραγματικοί αριθμοί και το άθροισμα είναι πεπερασμένο, είναι συνεχείς στον $\mathbf{R}^n$. Ρητές συναρτήσεις, δηλαδή κλάσματα πολυωνυμικών, είναι επίσης συνεχείς (εκτός από τα σημεία στα οποία μηδενίζεται ο παρονομαστής) όπως και συναρτήσεις οι οποίες είναι απλοί συνδυασμοί εκθετικών, τριγωνομετρικών κ.λ.π συναρτήσεων των συντεταγμένων.

Άσκηση 87: Έστω μετρικός χώρος (X, d), $A \subseteq X$ και $f, g : A \to \mathbf{R}$ συνεχείς στο A. Αποδείξτε ότι το $\{x \in A : f(x) < g(x)\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του (A, d) και ότι τα $\{x \in A : f(x) \leq g(x)\}$ και $\{x \in A : f(x) = g(x)\}$ είναι κλειστά υποσύνολα του (A, d). (Υπόδειξη: Θεωρήστε την $f - g$.)

Άσκηση 88: Έστω μετρικός χώρος (X, d), $A \subseteq X$, x_0 σημείο συσσώρευσης του A, $f, g : A \to \mathbf{R}$ και $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ και $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$.
1. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \to x_0}(f + g)(x) = l + m$ και $\lim_{x \to x_0}(fg)(x) = lm$.
2. Αν, επιπλέον, $m \neq 0$, θεωρήστε το $B = \{x \in A : g(x) \neq 0\}$ και αποδείξτε ότι το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του B και ότι για την $\frac{1}{g} : B \to \mathbf{R}$ ισχύει $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{m}$.

Άσκηση 89: Έστω μετρικός χώρος (X, d), μη κενό $E \subseteq X$ και η $d_E : X \to \mathbf{R}$ που ορίσθηκε στην άσκηση. Αποδείξτε ότι $|d_E(x) - d_E(y)| \leq d(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$ και ότι η $d_E : X \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής στον X. (Υπόδειξη: Για τυχόν $z \in E$, $d(y, z) \geq d(x, z) - d(x, y) \geq d_E(x) - d(x, y)$. Άρα, $d_E(y) \geq d_E(x) - d(x, y)$ και, επομένως, $d_E(x) - d_E(y) \leq d(x, y)$. Συμμετρικά, $d_E(y) - d_E(x) \leq d(x, y)$.)

Άσκηση 90: Έστω μετρικός χώρος (X, d) και μη κενά *κλειστά* υποσύνολα A

και B του (X,d) με $A\cap B=\emptyset$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f:X\to\mathbf{R}$ με τύπο $f(x)=\frac{d_A(x)}{d_A(x)+d_B(x)}$ για κάθε $x\in X$. (Δείτε την προηγούμενη άσκηση.)
1. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στον X.
2. Αποδείξτε ότι: $f(x)=1 \Leftrightarrow x\in B$ καθώς και $f(x)=0 \Leftrightarrow x\in A$.
3. Ορίζουμε $K=f^{-1}\big((-\infty,\frac{1}{2})\big)$ και $L=f^{-1}\big((\frac{1}{2},+\infty)\big)$. Αποδείξτε ότι τα K και L είναι ανοικτά υποσύνολα του (X,d), ότι $K\cap L=\emptyset$ και ότι $A\subseteq K$ και $B\subseteq L$.

4.5 Ακολουθίες.

Ορισμός 4.20 *Εστω μετρικός χώρος (X,d), $x\in X$ και ακολουθία (x_n) στο X. Λέμε ότι* ***η*** (x_n) ***συγκλίνει στο*** x ***στον*** (X,d) *ή ότι* ***το*** x ***είναι όριο της*** (x_n) ***στον*** (X,d)*, και συμβολίζουμε*

$$x_n\to x \quad \textit{στον } (X,d) \qquad \textit{ή} \qquad \lim_{n\to+\infty}x_n=x \quad \textit{στον } (X,d)\,,$$

αν για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει $n_0=n_0(\epsilon)\in\mathbf{N}$ ώστε:

$$n\geq n_0 \quad\Rightarrow\quad d(x_n,x)<\epsilon\,.$$

Ή, ισοδύναμα, η (x_n) συγκλίνει στο x στον (X,d), αν για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει $n_0=n_0(\epsilon)\in\mathbf{N}$ ώστε:

$$n\geq n_0 \quad\Rightarrow\quad x_n\in N_x(\epsilon)\,.$$

Πρόταση 4.16 *Εστω μετρικός χώρος (X,d) και ακολουθία (x_n) στο X. Αν στον (X,d) υπάρχει όριο της (x_n), αυτό είναι μοναδικό.*

Απόδειξη: Έστω $x_n\to x'$ και $x_n\to x''$ στον (X,d). Παίρνουμε τυχόν $\epsilon>0$ και βρίσκουμε n_0' ώστε $d(x_n,x')<\frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $n\geq n_0'$. Επίσης, βρίσκουμε n_0'' ώστε $d(x_n,x'')<\frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $n\geq n_0''$. Παίρνουμε $n_0=\max(n_0',n_0'')$ και έχουμε $d(x_{n_0},x')<\frac{\epsilon}{2}$ και $d(x_{n_0},x'')<\frac{\epsilon}{2}$. Συνεπάγεται $d(x',x'')\leq d(x_{n_0},x')+d(x_{n_0},x'')<\epsilon$. Άρα, για κάθε $\epsilon>0$ ισχύει $0\leq d(x',x'')<\epsilon$ και, επομένως, $d(x',x'')=0$. Ο.Ε.Δ.

Σύμφωνα με την Πρόταση 4.16, μπορούμε να μιλάμε για *το* όριο μίας ακολουθίας.

Άσκηση 91: Έστω $x_n\to x$ στον μετρικό χώρο (X,d) και υποακολουθία (x_{n_k}). Αποδείξτε ότι $x_{n_k}\to x$ στον (X,d). (Υπόδειξη: Μιμηθείτε τη γνωστή απόδειξη του αντίστοιχου αποτελέσματος για ακολουθίες στο $\mathbf{R}$.)

Πρόταση 4.17 *Εστω μετρικός χώρος (X,d), $x\in X$ και ακολουθία (x_n) στο X. Τότε: $x_n\to x$ στον (X,d) αν και μόνον αν $d(x_n,x)\to 0$ στον $\mathbf{R}$.*

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι προφανής από τους ορισμούς της σύγκλισης της (x_n) στον (X,d) και της $\big(d(x_n,x)\big)$ στον $\mathbf{R}$. Ο.Ε.Δ.

Άσκηση 92: Έστω ότι $x_n \to x$ και $y_n \to y$ στον (X, d). Αποδείξτε ότι $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$. (Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι $|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y)$.)

Παραδείγματα:
1. Έστω μετρικός χώρος (X, d), $x \in X$ και (x_n) στον X η οποία μετά από κάποιον δείκτη είναι σταθερή και ίση με x. Τότε $x_n \to x$ στον (X, d).

Πράγματι, έστω ότι υπάρχει κάποιο $n_1 \in \mathbf{N}$ ώστε $x_n = x$ για κάθε $n \geq n_1$. Παίρνουμε τυχόν $\epsilon > 0$ και επιλέγουμε $n_0 = n_1$. Τότε: $n \geq n_0 \Rightarrow n \geq n_1 \Rightarrow d(x_n, x) = 0 < \epsilon$. Άρα, $x_n \to x$ στον (X, d).

Εναλλακτικά, μπορούμε να σκεφτούμε ως εξής. Η ακολουθία $(d(x_n, x))$ είναι ακολουθία στον $\mathbf{R}$ και μετά από κάποιον δείκτη είναι σταθερή και ίση με 0. Άρα, $d(x_n, x) \to 0$ στον $\mathbf{R}$ και, επομένως, $x_n \to x$ στον (X, d).
2. Η επόμενη πρόταση ανάγει τη σύγκλιση ακολουθιών στον $\mathbf{R}^n$ στη σύγκλιση ακολουθιών πραγματικών αριθμών.

Πρόταση 4.18 *Έστω* $x_m = (x_m^{(1)}, \ldots, x_m^{(n)})$ $(m \in \mathbf{N})$ *ακολουθία στον* $\mathbf{R}^n$ *και* $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) \in \mathbf{R}^n$. *Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.*
1. $x_m \to x$ *στον* $\mathbf{R}^n$.
2. $x_m^{(k)} \to x^{(k)}$ *στον* $\mathbf{R}$ *για κάθε* $k = 1, \ldots, n$.

Απόδειξη: $[1 \Rightarrow 2]$. Έστω $x_m \to x$ στον $\mathbf{R}^n$, οπότε $d_{n,2}(x_m, x) \to 0$. Για κάθε $k = 1, \ldots, n$ ισχύει $|x_m^{(k)} - x^{(k)}| \leq d_{n,2}(x_m, x) \to 0$, οπότε $x_m^{(k)} \to x^{(k)}$ στον $\mathbf{R}$.
$[2 \Rightarrow 1]$. Έστω $x_m^{(k)} \to x^{(k)}$ στον $\mathbf{R}$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$. Τότε $(x_m^{(k)} - x^{(k)})^2 \to 0$ στον $\mathbf{R}$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$. Άρα, $(x_m^{(1)} - x^{(1)})^2 + \cdots + (x_m^{(n)} - x^{(n)})^2 \to 0$ και, επομένως, $d_{n,2}(x_m, x) \to 0$. Άρα, $x_m \to x$ στον $\mathbf{R}^n$. Ο.Ε.Δ.

Άσκηση 93: Θεωρούμε τις ακολουθίες (x_m) και (y_m) στον $\mathbf{R}^n$ και ακολουθία (λ_m) στον $\mathbf{R}$. Αν $x_m \to x$, $y_m \to y$ στον $\mathbf{R}^n$ και $\lambda_m \to \lambda$ στον $\mathbf{R}$, αποδείξτε ότι $x_m + y_m \to x + y$, $x_m \cdot y_m \to x \cdot y$ και $\lambda_m x_m \to \lambda x$. (Η τελεία $\cdot$ δηλώνει το εσωτερικό γινόμενο.) (Υπόδειξη: Μετασχηματίστε σε παραστάσεις συντεταγμένων.)

3. Στον χώρο (X, δ_X) ισχύει $N_x(\epsilon) = \begin{cases} \{x\}, & \text{αν } 0 < \epsilon \leq 1, \\ X, & \text{αν } 1 < \epsilon. \end{cases}$ Αν μία ακολουθία (x_n) συγκλίνει στο x στον (X, δ_X), τότε για $\epsilon = \frac{1}{2}$ υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε: $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in N_x(\frac{1}{2}) = \{x\}$, δηλαδή, $x_n = x$. Άρα, η (x_n) είναι μετά από κάποιον δείκτη σταθερή. Το αντίστροφο, σύμφωνα με το πρώτο παράδειγμα, ισχύει σε κάθε μετρικό χώρο. Άρα, οι συγκλίνουσες ακολουθίες στον (X, δ_X) είναι εκείνες και μόνον εκείνες οι οποίες είναι μετά από κάποιον δείκτη σταθερές.

Ο χώρος (X, δ_X) είναι αρκετά απλοϊκός και ήδη γνωρίζουμε όλα τα ανοικτά και τα κλειστά υποσύνολά του και όλες τις συγκλίνουσες ακολουθίες του. Είναι πηγή παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων.

Θα δούμε, τώρα, την πολύ ισχυρή σχέση ανάμεσα στην έννοια της σύγκλισης ακολουθιών και σε διάφορες έννοιες που έχουμε ήδη μελετήσει: τις έννοιες του σημείου επαφής και του σημείου συσσώρευσης, την έννοια του κλειστού υποσυνόλου (και, εμμέσως, του ανοικτού υποσυνόλου), την έννοια του συνοριακού σημείου και, τέλος, τις έννοιες του ορίου συνάρτησης και της συνέχειας συνάρτησης.

Πρόταση 4.19 *Έστω μετρικός χώρος (X, d), $A \subseteq X$ και $x \in X$. Το x είναι σημείο επαφής του A αν και μόνον αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to x$ στον (X, d).*

Απόδειξη: Έστω ότι το x είναι σημείο επαφής του A και έστω τυχόν $n \in \mathbf{N}$. Στην $N_x\big(\frac{1}{n}\big)$ υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του A και έστω x_n ένα τέτοιο στοιχείο. Δηλαδή, $x_n \in A$ και $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$. Άρα, έχουμε ακολουθία (x_n) στο A για την οποία ισχύει $d(x_n, x) \to 0$ στον $\mathbf{R}$ και, επομένως, $x_n \to x$ στον (X, d).

Αντιστρόφως, έστω ότι υπάρχει (x_n) στο A ώστε $x_n \to x$ στον (X, d). Παίρνουμε τυχόν $\epsilon > 0$, οπότε υπάρχει n_0 ώστε $x_n \in N_x(\epsilon)$ για κάθε $n \geq n_0$. Ειδικώτερα: $x_{n_0} \in N_x(\epsilon)$. Αποδείξαμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ η περιοχή $N_x(\epsilon)$ του x περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του A, το x_{n_0}. Άρα, το x είναι σημείο επαφής του A. Ο.Ε.Δ.

Η απόδειξη της επόμενης Πρότασης 4.20 είναι παρόμοια με την απόδειξη της Πρότασης 4.19.

Πρόταση 4.20 *Έστω μετρικός χώρος (X, d), $A \subseteq X$ και $x \in X$. Το x είναι σημείο συσσώρευσης του A αν και μόνον αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο $A \setminus \{x\}$ ώστε $x_n \to x$ στον (X, d).*

Απόδειξη: Έστω ότι το x είναι σημείο συσσώρευσης του A και έστω τυχόν $n \in \mathbf{N}$. Στην $N_x\big(\frac{1}{n}\big)$ υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του $A\setminus\{x\}$ και έστω x_n ένα τέτοιο στοιχείο. Δηλαδή, $x_n \in A \setminus \{x\}$ και $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$. Άρα, έχουμε ακολουθία (x_n) στο $A \setminus \{x\}$ για την οποία ισχύει $d(x_n, x) \to 0$ στον $\mathbf{R}$ και, επομένως, $x_n \to x$ στον (X, d).

Αντιστρόφως, έστω ότι υπάρχει (x_n) στο $A \setminus \{x\}$ ώστε $x_n \to x$ στον (X, d). Παίρνουμε τυχόν $\epsilon > 0$, οπότε υπάρχει n_0 ώστε $x_n \in N_x(\epsilon)$ για κάθε $n \geq n_0$. Ειδικώτερα: $x_{n_0} \in N_x(\epsilon)$. Αποδείξαμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ η περιοχή $N_x(\epsilon)$ του x περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του $A \setminus \{x\}$, το x_{n_0}. Άρα, το x είναι σημείο συσσώρευσης του A. Ο.Ε.Δ.

Παραδείγματα:

1. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Κάθε $x \in A$ είναι σημείο επαφής του A, διότι υπάρχει η σταθερή ακολουθία (x) στο A με όριο x στον (X, d).
2. Έστω το $[a, b]$ στον $\mathbf{R}$ με $a < b$. Από το προηγούμενο παράδειγμα γνωρίζουμε ότι κάθε $x \in [a, b]$ είναι σημείο επαφής του $[a, b]$. Επίσης, κάθε $x \in [a, b]$ είναι σημείο συσσώρευσης του $[a, b]$. Πράγματι, αν $a \leq x < b$, υπάρχει η ακολουθία $\big(x + \frac{b-x}{n}\big)$ στο $[a, b] \setminus \{x\}$ με όριο το x και, αν $x = b$, υπάρχει η ακολουθία $\big(b - \frac{b-a}{n}\big)$ στο $[a, b] \setminus \{b\}$ με όριο το b.

Έστω, τώρα, το $[a, b] \cup \{c\}$ στον $\mathbf{R}$ με $a < b < c$. Κάθε $x \in [a, b] \cup \{c\}$ είναι σημείο επαφής του $[a, b] \cup \{c\}$. Επίσης, με την αιτιολόγηση του προηγούμενου παραδείγματος, κάθε $x \in [a, b]$ είναι σημείο συσσώρευσης του $[a, b] \cup \{c\}$. Όμως, το c δεν είναι σημείο συσσώρευσης του $[a,b]\cup\{c\}$, διότι δεν υπάρχει καμία ακολουθία (x_n) στο $\big([a,b]\cup\{c\}\big)\setminus\{c\}$ με όριο το c στον $\mathbf{R}$. Αν υπήρχε, θα είχαμε $a\le x_n\le b$ για κάθε n και, παίρνοντας όριο καθώς $n\to+\infty$, θα καταλήγαμε στην $a\le c\le b$.

Πρόταση 4.21 *Έστω μετρικός χώρος (X,d) και $A\subseteq X$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.*
1. Το A είναι κλειστό υποσύνολο του X.
2. Κάθε x, για το οποίο υπάρχει ακολουθία στο A με όριο x στον (X,d), ανήκει στο A.

Απόδειξη: $[1\Rightarrow 2]$. Έστω τυχόν x για το οποίο υπάρχει (x_n) στο A ώστε $x_n\to x$ στον (X,d). Βάσει της Πρότασης 4.19, το x είναι σημείο επαφής του A, οπότε $x\in\overline{A}$. Επειδή το A είναι κλειστό υποσύνολο του X, ισχύει $\overline{A}=A$ και, επομένως, $x\in A$.
$[2\Rightarrow 1]$. Έστω τυχόν σημείο επαφής x του A. Τότε, από την Πρόταση 4.19, υπάρχει ακολουθία στο A με όρι το x στον (X,d) και, επομένως, το x ανήκει στο A. Αποδείξαμε ότι κάθε σημείο επαφής του A ή, ισοδύναμα, κάθε στοιχείο του $\overline{A}$ ανήκει στο A, οπότε $\overline{A}\subseteq A$. Επειδή η $A\subseteq\overline{A}$ ισχύει για κάθε A, συνεπάγεται $A=\overline{A}$ και, επομένως, το A είναι κλειστό υποσύνολο του X. Ο.Ε.Δ.

Παραδείγματα:
1. Έστω $[a,b]$ στον $\mathbf{R}$ και οποιοδήποτε x το οποίο είναι όριο ακολουθίας (x_n) στο $[a,b]$. Δηλαδή, $a\le x_n\le b$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$ και $x_n\to x$. Παίρνοντας όριο καθώς $n\to+\infty$, βρίσκουμε $a\le x\le b$, δηλαδή, $x\in[a,b]$. Άρα το A είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}$.

Ομοίως, κάθε κλειστό διάστημα $[a,+\infty)$, $(-\infty,b]$ και $(-\infty,+\infty)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}$.

Για το (a,b) υπάρχει ένα τουλάχιστον x, συγκεκριμένα το $x=a$ ή το $x=b$, το οποίο είναι όριο ακολουθίας στο (a,b), συγκεκριμένα της $x_n=a+(b-a)/2n$ ή της $x_n=b-(b-a)/2n$, αντιστοίχως, αλλά δεν ανήκει στο (a,b). Άρα το (a,b) δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}$.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι τα $(a,+\infty)$, $(-\infty,b)$, $[a,b)$ και $(a,b]$ δεν είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbf{R}$.

Άσκηση 94: Αποδείξτε ότι το $\{\frac{1}{n}:n\in\mathbf{N}\}$ δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}$ ενώ το $\{0\}\cup\{\frac{1}{n}:n\in\mathbf{N}\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}$.

2. Στον $\mathbf{R}^n$ θεωρούμε την κλειστή μπάλα $\overline{N_a}(r)=\{x\in\mathbf{R}^n : d_{n,2}(x,a)\le r\}$. Υποθέτουμε ότι το $x\in\mathbf{R}^n$ είναι όριο κάποιας (x_m) στο $\overline{N_a}(r)$. Αν $x=(x^{(1)},\dots,x^{(n)})$, $a=(a^{(1)},\dots,a^{(n)})$ και $x_m=(x_m^{(1)},\dots,x_m^{(n)})$, η σχέση $x_m\in\overline{N_a}(r)$ γίνεται $\sqrt{(x_m^{(1)}-a^{(1)})^2+\cdots+(x_m^{(n)}-a^{(n)})^2}\le r$ για κάθε $m\ge 1$ και από το ότι $x_m\to x$ συνεπάγεται $x_m^{(k)}\to x^{(k)}$ για κάθε $k=1,\dots,n$. Συμπεραίνουμε $\sqrt{(x^{(1)}-a^{(1)})^2+\cdots+(x^{(n)}-a^{(n)})^2}\le r$, παίρνοντας όριο καθώς $m\to+\infty$ στην τελευταία ανισότητα. Άρα, $x\in\overline{N_a}(r)$.

Άρα η $\overline{N_a}(r)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$.

3. Έστω $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ ένα τουλάχιστον εκ των οποίων είναι $\neq 0$ και $a \in \mathbf{R}$. Στον $\mathbf{R}^n$ θεωρούμε το υπερεπίπεδο $\Gamma = \{x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) : a_1 x^{(1)} + \cdots + a_n x^{(n)} = a\}$. Υποθέτουμε ότι το $x \in \mathbf{R}^n$ είναι όριο κάποιας (x_m) στο Γ. Αν $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ και $x_m = (x_m^{(1)}, \ldots, x_m^{(n)})$, η σχέση $x_m \in \Gamma$ γράφεται $a_1 x_m^{(1)} + \cdots + a_n x_m^{(n)} = a$ για κάθε $m \geq 1$ και από το ότι $x_m \to x$ συνεπάγεται $x_m^{(k)} \to x^{(k)}$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$. Παίρνοντας όριο καθώς $m \to +\infty$ στην τελευταία ισότητα, συμπεραίνουμε $a_1 x^{(1)} + \cdots + a_n x^{(n)} = a$ και, επομένως, $x \in \Gamma$.

Άρα το Γ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$.

Άσκηση 95: Αποδείξτε ότι κάθε κλειστός ημιχώρος και κάθε κλειστό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο στον $\mathbf{R}^n$ με ακμές παράλληλες στους κύριους άξονες είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbf{R}^n$.

Άσκηση 96: Έστω ο μετρικός χώρος (X, δ_X). Αποδείξτε ότι κάθε $A \subseteq X$ είναι κλειστό υποσύνολο του (X, δ_X).

Πρόταση 4.22 *Έστω μετρικός χώρος (X, d), $A \subseteq X$ και $x \in X$. Το x είναι συνοριακό σημείο του A αν και μόνον αν υπάρχει (x'_n) στο A και (x''_n) στο $X \setminus A$ ώστε $x'_n \to x$ και $x''_n \to x$ στον (X, d).*

Απόδειξη: Το ότι το x είναι συνοριακό σημείο του A είναι ισοδύναμο με το ότι το x είναι σημείο επαφής του A και του $X \setminus A$. Αυτό, όμως, είναι ισοδύναμο με το ότι υπάρχει (x'_n) στο A ώστε $x'_n \to x$ στον (X, d) και (x''_n) στο $X \setminus A$ ώστε $x''_n \to x$ στον (X, d). Ο.Ε.Δ.

Άσκηση 97: Η Πρόταση 4.19 μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε έναν διαφορετικό, αλλά ισοδύναμο με τον προηγούμενο, ορισμό του σημείου επαφής ενός $A \subseteq X$ σε μετρικό χώρο (X, d): *το $x \in X$ είναι σημείο επαφής του A, αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to x$ στον (X, d).* Με ανάλογο τρόπο, από την Πρόταση 4.20 προέρχεται ο ισοδύναμος ορισμός του σημείου συσσώρευσης: *το $x \in X$ είναι σημείο συσσώρευσης του A, αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο $A \setminus \{x\}$ ώστε $x_n \to x$ στον (X, d).* Ακόμη, από την Πρόταση 4.22 έχουμε τον ισοδύναμο ορισμό του συνοριακού σημείου: *το $x \in X$ είναι συνοριακό σημείο του A, αν υπάρχουν ακολουθίες (x'_n) στο A και (x''_n) στο $X \setminus A$ ώστε $x'_n \to x$ και $x''_n \to x$ στον (X, d).* Τέλος, η Πρόταση 4.21 μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον ισοδύναμο ορισμό του κλειστού υποσυνόλου: *το A είναι κλειστό υποσύνολο του (X, d), αν κάθε x, για το οποίο υπάρχει ακολουθία στο A με όριο x στον (X, d), ανήκει στο A.*

Χρησιμοποιώντας τους τέσσερεις αυτούς ορισμούς, αποδείξτε με διαφορετικό τρόπο τα παρακάτω ήδη γνωστά μας αποτελέσματα: την Πρόταση 4.5, την Πρόταση 4.6.2 και 4.6.4, το Θεώρημα 4.1.3 και 4.1.4, την Πρόταση 4.9, την Πρόταση 4.10, την Πρόταση 4.11 και την Πρόταση 4.12. Επίσης, λύστε τις ασκήσεις 27, 44, 45, 49, 51, 57, 58, 66, 74, 75 και 76.

Πρόταση 4.23 *Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $A \subseteq X$, x_0 σημείο συσσώρευσης του A, $y_0 \in Y$ και $f : A \to Y$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.*
1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$.

2. Για κάθε (x_n) στο $A \setminus \{x_0\}$ με $x_n \to x_0$ στον (X,d) ισχύει $f(x_n) \to y_0$ στον (Y,ρ).

Απόδειξη: $[1 \Rightarrow 2]$. Έστω (x_n) στο $A \setminus \{x_0\}$ με $x_n \to x_0$ στον (X,d). Παίρνουμε τυχόν $\epsilon > 0$ και βρίσκουμε $\delta > 0$ ώστε: $x \in A,\ 0 < d(x,x_0) < \delta \ \Rightarrow\ d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$. Κατόπιν, βρίσκουμε n_0 ώστε: $n \geq n_0 \ \Rightarrow\ d(x_n, x_0) < \delta$. Επειδή $x_n \in A \setminus \{x_0\}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, έχουμε: $n \geq n_0 \ \Rightarrow\ x_n \in A, 0 < d(x_n,x_0) < \delta \ \Rightarrow\ d(f(x_n), f(x_0)) < \epsilon$. Άρα, $f(x_n) \to f(x_0)$ στον (Y,ρ).
$[2 \Rightarrow 1]$. Έστω ότι η f *δεν* είναι συνεχής στο x_0. Τότε υπάρχει κάποιο ϵ_0 ώστε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in A$ με $d(x,x_0) < \delta$ και $\rho(f(x), f(x_0)) \geq \epsilon_0$. Άρα, για κάθε $n \in \mathbf{N}$ υπάρχει $x_n \in A$ με $d(x_n,x_0) < \frac{1}{n}$ και $\rho(f(x_n), f(x_0)) \geq \epsilon_0$. Τώρα, η ακολουθία (x_n) είναι στο A και ισχύει $x_n \to x_0$ στον (X,d), αφού $d(x_n,x_0) \to 0$ στον $\mathbf{R}$. Όμως, δεν ισχύει $\rho(f(x_n), f(x_0)) \to 0$ στον $\mathbf{R}$ και, επομένως, δεν ισχύει $f(x_n) \to f(x_0)$ στον (Y,ρ). Ο.Ε.Δ.

Η απόδειξη της επόμενης Πρότασης 4.24 είναι σχεδόν κατά λέξη επανάληψη της απόδειξης της Πρότασης 4.23.

Πρόταση 4.24 *Έστω μετρικοί χώροι (X,d) και (Y,ρ), $A \subseteq X$, $x_0 \in A$ και $f : A \to Y$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.*
1. Η f είναι συνεχής στο x_0.
2. Για κάθε (x_n) στο A με $x_n \to x_0$ στον (X,d) ισχύει $f(x_n) \to f(x_0)$ στον (Y,ρ).

Απόδειξη: $[1 \Rightarrow 2]$. Έστω (x_n) στο A με $x_n \to x_0$ στον (X,d). Παίρνουμε τυχόν $\epsilon > 0$ και βρίσκουμε $\delta > 0$ ώστε: $x \in A,\ d(x,x_0) < \delta \ \Rightarrow\ d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$. Κατόπιν, βρίσκουμε n_0 ώστε: $n \geq n_0 \ \Rightarrow\ d(x_n,x_0) < \delta$. Επειδή $x_n \in A$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, έχουμε: $n \geq n_0 \ \Rightarrow\ x_n \in A,\ d(x_n,x_0) < \delta \ \Rightarrow\ d(f(x_n), f(x_0)) < \epsilon$. Άρα, $f(x_n) \to f(x_0)$ στον (Y,ρ).
$[2 \Rightarrow 1]$. Έστω ότι η f *δεν* είναι συνεχής στο x_0. Τότε υπάρχει κάποιο ϵ_0 ώστε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in A$ με $d(x,x_0) < \delta$ και $\rho(f(x), f(x_0)) \geq \epsilon_0$. Άρα, για κάθε $n \in \mathbf{N}$ υπάρχει $x_n \in A$ με $d(x_n,x_0) < \frac{1}{n}$ και $\rho(f(x_n), f(x_0)) \geq \epsilon_0$. Τώρα, η ακολουθία (x_n) είναι στο A και ισχύει $x_n \to x_0$ στον (X,d), αφού $d(x_n,x_0) \to 0$ στον $\mathbf{R}$. Όμως, δεν ισχύει $\rho(f(x_n), f(x_0)) \to 0$ στον $\mathbf{R}$ και, επομένως, δεν ισχύει $f(x_n) \to f(x_0)$ στον (Y,ρ). Ο.Ε.Δ.

Άσκηση 98: Στο ίδιο πνεύμα με την άσκηση 97, βάσει των Προτάσεων 4.23 και 4.24, μπορούμε να διατυπώσουμε εναλλακτικούς, ισοδύναμους με τους προηγούμενους, ορισμούς του ορίου συνάρτησης και της συνέχειας συνάρτησης. Δηλαδή, *ορίζουμε $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$, αν για κάθε (x_n) στο $A \setminus \{x_0\}$ με $x_n \to x_0$ στον (X,d) ισχύει $f(x_n) \to y_0$ στον (Y,ρ).* Επίσης, λέμε ότι *η f είναι συνεχής στο x_0, αν για κάθε (x_n) στο A με $x_n \to x_0$ στον (X,d) ισχύει $f(x_n) \to f(x_0)$ στον (Y,ρ).*

Χρησιμοποιώντας αυτούς τους ορισμούς καθώς και τους ορισμούς στην άσκηση, αποδείξτε με διαφορετικό τρόπο την Πρόταση 4.13, την ισοδυναμία $[1 \Leftrightarrow 3]$ του Θεωρήματος 4.3, την Πρόταση 4.14 και την Πρόταση 4.15. Επίσης, λύστε τις ασκήσεις 79, 80, 81, 82, 83 και 88.

Κεφάλαιο 5

Συμπάγεια.

5.1 Γενικά.

Έστω X οποιοδήποτε μη κενό σύνολο, $M \subseteq X$ και μία οικογένεια Σ υποσυνόλων του X. Δηλαδή, κάθε $A \in \Sigma$ είναι ένα υποσύνολο του X.

Ορισμός 5.1 *Η Σ ονομάζεται **κάλυψη του** M, αν $M \subseteq \bigcup_{A\in\Sigma} A$. Αν, επιπλέον, η Σ είναι πεπερασμένη, ονομάζεται **πεπερασμένη κάλυψη** του M.*

Ορισμός 5.2 *Έστω Σ και Σ' δύο καλύψεις του M. Αν $\Sigma' \subseteq \Sigma$, λέμε ότι **η** Σ **είναι μεγαλύτερη ή ίση της** Σ' και ότι **η** Σ' **είναι μικρότερη ή ίση της** Σ.*

Ορισμός 5.3 *Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος και $M \subseteq X$. Αν η Σ είναι κάλυψη του M και όλα τα $A \in \Sigma$ είναι ανοικτά υποσύνολα του (X,d), η Σ ονομάζεται **ανοικτή κάλυψη του** M.*

Είναι απολύτως προφανές ότι, αν οι Σ και Σ' είναι καλύψεις του M και $\Sigma' \subseteq \Sigma$ και η Σ είναι ανοικτή κάλυψη του M, τότε και η Σ' είναι ανοικτή κάλυψη του M.

Είναι, επίσης, προφανές ότι, αν η Σ είναι κάλυψη του M και $N \subseteq M$, τότε η Σ είναι κάλυψη και του N.

Παραδείγματα:
1. Έστω $X = \mathbf{R}$ και $M = [0,1]$. Θεωρούμε όλα τα διαστήματα της μορφής $A_x = \big(x - \frac{1}{100}\,, x + \frac{1}{100}\big)$ $(x \in \mathbf{R})$ και τη συλλογή $\Sigma = \{A_x : x \in \mathbf{R}\}$.

Η Σ είναι, προφανώς, ανοικτή κάλυψη του $[0,1]$. Αν ξεχωρίσουμε και κρατήσουμε μονάχα τα διαστήματα της μορφής $A_{x_k} = \big(x_k - \frac{1}{100}\,, x_k + \frac{1}{100}\big)$, όπου $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{100}, \ldots, x_k = \frac{k}{100}, \ldots, x_{99} = \frac{99}{100}$, $x_{100} = 1$, τότε η συλλογή $\Sigma' = \{A_{x_k} : 0 \leq k \leq 100\}$ είναι μία πεπερασμένη κάλυψη του $[0,1]$ μικρότερη ή ίση από την Σ.

Άρα, για τη συγκεκριμένη ανοικτή κάλυψη Σ του $[0,1]$ *υπάρχει* μια πεπερασμένη κάλυψη του $[0,1]$ μικρότερη ή ίση από αυτήν.

2. Έστω $X = \mathbf{R}$ και $M = \mathbf{R}$. Παίρνουμε τα ίδια $A_x = \big(x - \frac{1}{100}, x + \frac{1}{100}\big)$ $(x \in \mathbf{R})$ όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, και την $\Sigma = \{A_x : x \in \mathbf{R}\}$, η οποία

είναι ανοικτή κάλυψη του $\mathbf{R}$. Η Σ είναι άπειρη οικογένεια και τίθεται το ερώτημα αν υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη του $\mathbf{R}$ μικρότερη ή ίση από τη Σ.

Όχι, διότι αν πάρουμε οποιαδήποτε πεπερασμένου πλήθους διαστήματα $A_{x_1} = \left(x_1 - \frac{1}{100}\,, x_1 + \frac{1}{100}\right), \ldots, A_{x_n} = \left(x_n - \frac{1}{100}\,, x_n + \frac{1}{100}\right)$ και θεωρήσουμε την $\Sigma' = \{A_{x_k} : 1 \leq k \leq n\}$, τότε η Σ' δεν είναι κάλυψη του $\mathbf{R}$. Πράγματι, αν διατάξουμε τα $x_1, \ldots, x_n$ ώστε $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, τότε $\bigcup_{A \in \Sigma'} A \subseteq \left(x_1 - \frac{1}{100}\,, x_n + \frac{1}{100}\right)$.

Άρα, για τη συγκεκριμένη ανοικτή κάλυψη Σ του $\mathbf{R}$ δεν υπάρχει *καμία* πεπερασμένη κάλυψη του $\mathbf{R}$ μικρότερη ή ίση από αυτήν.

3. Έστω $X = \mathbf{R}$ και $M = \mathbf{R}$. Παίρνουμε όλα τα διαστήματα της μορφής $(-n, +\infty)$ και $(-\infty, n)$ $(n \in \mathbf{N})$ και έστω $\Sigma = \{(-n, +\infty), (-\infty, n) : n \in \mathbf{N}\}$.

Προφανώς, η Σ είναι ανοικτή κάλυψη του $\mathbf{R}$ και η $\Sigma' = \{(-1, +\infty), (-\infty, 1)\}$ είναι, επίσης, κάλυψη του $\mathbf{R}$.

Άρα, για τη συγκεκριμένη ανοικτή κάλυψη Σ του $\mathbf{R}$ *υπάρχει* μία πεπερασμένη κάλυψη του $\mathbf{R}$ μικρότερη ή ίση από αυτήν.

4. Έστω $X = \mathbf{R}$ και $M = (0,1)$. Θεωρούμε την ίδια συλλογή $\Sigma = \{A_x : x \in \mathbf{R}\}$ του παραδείγματος 1, όπου $A_x = \left(x - \frac{1}{100}, x + \frac{1}{100}\right)$ $(x \in \mathbf{R})$. Η Σ είναι ανοικτή κάλυψη του $(0,1)$. Η $\Sigma' = \{A_{x_k} : 0 \leq k \leq 100\}$ είναι, όπως και στο παράδειγμα 1, πεπερασμένη κάλυψη του $(0,1)$ μικρότερη ή ίση από την Σ.

Άρα, για τη συγκεκριμένη ανοικτή κάλυψη του $(0,1)$ *υπάρχει* μία πεπερασμένη κάλυψη του $(0,1)$ μικρότερη ή ίση από αυτήν.

5. Έστω $X = \mathbf{R}$ και $M = (0,1)$. Θεωρούμε τα ανοικτά διαστήματα $A_n = \left(\frac{1}{n}, 1\right)$ $(n = 2, 3, \ldots)$ και την $\Sigma = \{A_n : n = 2, 3, \ldots\}$.

Η Σ είναι ανοικτή κάλυψη του $(0,1)$, διότι κάθε x στο $(0,1)$ περιέχεται στο $\left(\frac{1}{n}, 1\right)$, αρκεί το n να είναι αρκετά μεγάλο ώστε $\frac{1}{n} < x < 1$. Αν πάρουμε οποιαδήποτε πεπερασμένου πλήθους από τα διαστήματα αυτά, δηλαδή, $A_{n_1} = \left(\frac{1}{n_1}\,, 1\right), \ldots, A_{n_N} = \left(\frac{1}{n_N}\,, 1\right)$ και θεωρήσουμε την $\Sigma' = \{A_{n_k} : 1 \leq k \leq N\}$, τότε η Σ' δεν είναι κάλυψη του $(0,1)$. Πράγματι, αν διατάξουμε $n_1 < n_2 < \cdots < n_N$, τότε $\bigcup_{A \in \Sigma'} A = \left(\frac{1}{n_N}\,, 1\right)$.

Άρα, για τη συγκεκριμένη ανοικτή κάλυψη του $(0,1)$ δεν υπάρχει *καμία* πεπερασμένη κάλυψη του $(0,1)$ μικρότερη ή ίση από αυτήν.

Στα προηγούμενα παραδείγματα:

(i) Στις περιπτώσεις $M = (0,1)$ και $M = \mathbf{R}$ είδαμε συγκεκριμένες ανοικτές καλύψεις Σ του M για τις οποίες υπάρχουν πεπερασμένες καλύψεις Σ' του M ώστε $\Sigma' \subseteq \Sigma$ και συγκεκριμένες ανοικτές καλύψεις Σ του M για τις οποίες δεν υπάρχει καμία πεπερασμένη κάλυψη Σ' του M ώστε $\Sigma' \subseteq \Sigma$.

(ii) Στην περίπτωση $M = [0,1]$ είδαμε συγκεκριμένη ανοικτή κάλυψη Σ του M για την οποία υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη Σ' του M ώστε $\Sigma' \subseteq \Sigma$. *Είναι δυνατόν να βρούμε ανοικτή κάλυψη Σ του $[0,1]$ για την οποία δεν υπάρχει καμία πεπερασμένη κάλυψη Σ' του M ώστε $\Sigma' \subseteq \Sigma$;* Λίγο παρακάτω θα αποδείξουμε ότι αυτό είναι αδύνατον!

Η ερώτηση που διατυπώθηκε στην προηγούμενη παράγραφο για το διάστημα $[0,1]$, μπορεί, φυσικά, να διατυπωθεί για οποιοδήποτε υποσύνολο όχι μόνον του $\mathbf{R}$ αλλά και οποιουδήποτε μετρικού χώρου: δοθέντος μετρικού χώρου (X, d) και υποσυνόλου M του X, *είναι δυνατόν να βρούμε ανοικτή κάλυψη Σ του M για την οποία δεν υπάρχει καμία πεπερασμένη κάλυψη Σ' του M ώστε $\Sigma' \subseteq \Sigma$;*

Όσο περίεργο κι αν φαίνεται ένα τέτοιο ερώτημα, η αλήθεια είναι ότι η δυνατότητα απάντησης σ' αυτό παίζει *ιδιαίτερα σημαντικό* ρόλο στη Μαθηματική Ανάλυση. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε ορισμένες εκφάνσεις αυτού του ρόλου, αφού κωδικοποιήσουμε το ερώτημα με τον επόμενο Ορισμό 5.4.

Άσκηση 1: Θεωρήστε το $(0,1)$ στον $\mathbf{R}$ και τα $A_x = (\frac{x}{2}, \frac{1+x}{2})$ $(0 < x < 1)$. Αποδείξτε ότι η $\Sigma = \{A_x : 0 < x < 1\}$ είναι ανοικτή κάλυψη του $(0,1)$ και ότι δεν υπάρχει καμία πεπερασμένη κάλυψη Σ' του $(0,1)$ ώστε $\Sigma' \subseteq \Sigma$.

Άσκηση 2: Θεωρήστε το $[0,1]$ στον $\mathbf{R}$ και τα $A_x = (\frac{x}{2}, \frac{1+x}{2})$ $(0 < x < 1)$. Έστω I και J δύο ανοικτά διαστήματα με $0 \in I$ και $1 \in J$. Αποδείξτε ότι η $\Sigma = \{I, J\} \cup \{A_x : 0 < x < 1\}$ είναι ανοικτή κάλυψη του $[0,1]$ και ότι υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη Σ' του $[0,1]$ ώστε $\Sigma' \subseteq \Sigma$.

Ορισμός 5.4 *Έστω μετρικός χώρος (X,d) και $M \subseteq X$. Το M ονομάζεται* ***συμπαγές υποσύνολο του*** *(X,d), αν για κάθε ανοικτή κάλυψη του M υπάρχει τουλάχιστον μία πεπερασμένη κάλυψη του M μικρότερη ή ίση από αυτήν.*

Παραδείγματα:

1. Το $(0,1)$ και το $\mathbf{R}$ δεν είναι συμπαγή υποσύνολα του $\mathbf{R}$, σύμφωνα με τα παραδείγματα 2 και 5 μετά από τον Ορισμό 5.3.

2. Έστω μη κενό X με τη διακριτή μετρική δ_X και $M \subseteq X$. Θα δούμε ότι: το M είναι συμπαγές υποσύνολο του (X, δ_X) αν και μόνον αν το M είναι πεπερασμένο.

Έστω ότι $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ για κάποια $x_1, \dots, x_n \in X$. Θεωρούμε τυχούσα ανοικτή κάλυψη Σ του M. Τότε κάθε $x_k \in M$ περιέχεται σε κάποιο $A_k \in \Sigma$. Είναι, τώρα, προφανές ότι $M = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$ και, επομένως, η $\Sigma' = \{A_1, \dots, A_n\}$ είναι πεπερασμένη κάλυψη του M με $\Sigma' \subseteq \Sigma$.

Αντιστρόφως, έστω ότι το M είναι συμπαγές υποσύνολο του (X, δ_X). Για κάθε $x \in M$ θεωρούμε το σύνολο $A_x = \{x\}$, το οποίο είναι ανοικτό υποσύνολο του (X, δ_X), και έχουμε την ανοικτή κάλυψη $\Sigma = \{A_x : x \in M\}$ του M. Επειδή το M είναι συμπαγές υποσύνολο του (X, δ_X), υπάρχει κάποια πεπερασμένη κάλυψη Σ' του M με $\Sigma' \subseteq \Sigma$. Αυτό σημαίνει ότι $\Sigma' = \{A_{x_1}, \dots, A_{x_n}\}$ για κάποια $x_1, \dots, x_n \in M$ και ότι $M \subseteq A_{x_1} \cup \cdots \cup A_{x_n} = \{x_1\} \cup \cdots \cup \{x_n\} = \{x_1, \dots, x_n\}$. Επειδή, μάλιστα, $x_1, \dots, x_n \in M$, συνεπάγεται $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ και, επομένως, το M είναι πεπερασμένο.

3. Έστω $a, b \in \mathbf{R}$ με $a < b$. Θα αποδείξουμε ότι το $[a,b]$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbf{R}$. Θα δούμε αργότερα ότι αυτό είναι απλή εφαρμογή του (δύσκολου) Θεωρήματος 5.5 και απλή ειδική περίπτωση της (επίσης, δύσκολης) Πρότασης 5.4, αλλά θα δώσουμε εδώ απόδειξη ειδικά για το συγκεκριμένο σύνολο και θα φανεί ότι το να αποδείξει κανείς ότι κάποιο συγκεκριμένο σύνολο είναι συμπαγές υποσύνολο ενός μετρικού χώρου εν γένει δεν είναι εύκολη υπόθεση!

Θεωρούμε τυχούσα ανοικτή κάλυψη Σ του $[a,b]$. Δηλαδή, κάθε $A \in \Sigma$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R}$ και $[a,b] \subseteq \bigcup_{A \in \Sigma} A$. Ορίζουμε το σύνολο

$$K = \{x \in [a,b] : \text{υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη } \Sigma' \text{ του } [a,x] \text{ με } \Sigma' \subseteq \Sigma\}.$$

Δηλαδή, το $x \in [a,b]$ είναι στοιχείο του K αν και μόνον υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους σύνολα-στοιχεία της Σ στων οποίων την ένωση περιέχεται το $[a,x]$.

Το a είναι στοιχείο του K και, επομένως, το K δεν είναι κενό. Αυτό το βλέπουμε ως εξής. Επειδή η Σ είναι κάλυψη του $[a,b]$, το a ανήκει σε κάποιο $A_0 \in \Sigma$. Επομένως, η $\Sigma' = \{A_0\}$ είναι πεπερασμένη κάλυψη του $[a,a] = \{a\}$ και, φυσικά, $\Sigma' \subseteq \Sigma$.

Επίσης, το K είναι άνω φραγμένο, αφού $K \subseteq [a,b]$. Άρα, το K έχει supremum και θέτουμε $c = \sup(K)$. Προφανώς, $a \le c \le b$.

Επειδή $c \in [a,b]$, υπάρχει κάποιο $A_1 \in \Sigma$ ώστε $c \in A_1$. Το A_1 είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R}$, οπότε υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $(c-\epsilon, c+\epsilon) \subseteq A_1$. Επειδή $c = \sup(K)$, υπάρχει $x \in K$ με $c - \epsilon < x \le c$. Επειδή $x \in K$, υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη Σ' του $[a,x]$ με $\Sigma' \subseteq \Sigma$. Σχηματίζουμε την πεπερασμένη συλλογή $\Sigma'' = \Sigma' \cup \{A_1\}$. Τώρα, $[a,x] \subseteq \bigcup_{A\in\Sigma'} A$ και $[x,c] \subseteq (c-\epsilon, c+\epsilon) \subseteq A_1$. Άρα, $[a,c] = [a,x] \cup [x,c] \subseteq \big(\bigcup_{A\in\Sigma'} A\big) \cup A_1 = \bigcup_{A\in\Sigma''} A$ και, επομένως, υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη, η Σ'', του $[a,c]$ με $\Sigma'' \subseteq \Sigma$. Συμπεραίνουμε ότι $c \in K$.

Υποθέτουμε, τώρα, ότι $c < b$. Χρησιμοποιούμε τα συγκεκριμένα A_1, ϵ, x, Σ' και Σ'' που εμφανίστηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Παίρνουμε οποιονδήποτε αριθμό c_1 ώστε $c < c_1 < \min(b, c+\epsilon)$. Από την προηγούμενη παράγραφο, $[a,x] \subseteq \bigcup_{A\in\Sigma'} A$ και παρατηρούμε ότι $[x,c_1] \subseteq (c-\epsilon, c+\epsilon) \subseteq A_1$. Επομένως, $[a,c_1] = [a,x] \cup [x,c_1] \subseteq \big(\bigcup_{A\in\Sigma'} A\big) \cup A_1 = \bigcup_{A\in\Sigma''} A$ και, επομένως, υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη, η Σ'', του $[a,c_1]$ με $\Sigma'' \subseteq \Sigma$. Επίσης, επειδή $c_1 \le b$, έχουμε $c_1 \in [a,b]$, οπότε $c_1 \in K$. Αυτό, όμως, είναι άτοπο, διότι $\sup(K) = c < c_1$.

Καταλήγουμε στο ότι $c = b$ και, επομένως, υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη, η Σ'', του $[a,b]$ με $\Sigma'' \subseteq \Sigma$.

Άσκηση 3: Έστω μετρικός χώρος (X,d). Αποδείξτε ότι το $\emptyset$ είναι συμπαγές υποσύνολο του (X,d).

Άσκηση 4: Έστω μετρικός χώρος (X,d) και M οποιοδήποτε πεπερασμένο υποσύνολο του X. Αποδείξτε ότι το M είναι συμπαγές υποσύνολο του (X,d). (Υπόδειξη: Μιμηθείτε το πρώτο σκέλος της απόδειξης στο παράδειγμα 2 μετά από τον Ορισμό 5.4.)

Άσκηση 5: Έστω μετρικός χώρος (X,d) και $x_n \to x$ στον (X,d). Αποδείξτε ότι το σύνολο $\{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του (X,d). (Υπόδειξη: Θεωρήστε τυχούσα ανοικτή κάλυψη Σ του $\{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbf{N}\}$. Υπάρχει κάποιο $A_0 \in \Sigma$ ώστε $x \in A_0$ και υπάρχει $\epsilon_0 > 0$ ώστε $N_x(\epsilon_0) \subseteq A_0$. Κατόπιν, υπάρχει n_0 ώστε $x_n \in N_x(\epsilon_0)$ για κάθε $n \ge n_0$. Για κάθε $k = 1, \ldots, n_0 - 1$ υπάρχει $A_k \in \Sigma$ ώστε $x_k \in A_k$. Θεωρήστε την $\Sigma' = \{A_0, A_1, \ldots, A_{n_0-1}\}$.)

Άσκηση 6: Αποδείξτε ότι το $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$ δεν είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbf{R}$. (Υπόδειξη: Βρείτε κατάλληλη ανοικτή κάλυψη του $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$ για την οποία να μην υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη του $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$ που να περιέχεται σ' αυτήν. Μπορείτε, για παράδειγμα, να θεωρήσετε μικρά ανοικτά διαστήματα I_n $(n \in \mathbf{N})$ ξένα ανά δύο καθένα εκ των οποίων περιέχει ένα από τα $\frac{1}{n}$. Βρείτε, πάντως, και μία δεύτερη τέτοια ανοικτή κάλυψη διαφορετικής φύσης από την πρώτη.)

Άσκηση 7: Γενικεύστε την προηγούμενη άσκηση ως εξής. Έστω μετρικός χώρος (X,d), ακολουθία (x_n) στο X, $x \in X$ και $x_n \to x$ στον (X,d). Αν $x_n \neq x$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, αποδείξτε ότι το $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ δεν είναι συμπαγές υποσύνολο του (X,d). (Υπόδειξη: Θεωρήστε τα $\{y \in X : d(y,x) > \frac{1}{n}\}$.)

Άσκηση 8: Έστω μετρικός χώρος (X,d) και $M, M_1, \ldots, M_n \subseteq X$.
1. Αν τα $M_1, \ldots, M_n$ είναι συμπαγή υποσύνολα του (X,d), αποδείξτε ότι το $M_1 \cup \cdots \cup M_n$ είναι συμπαγές υποσύνολο του (X,d). (Υπόδειξη: Θεωρήστε τυχούσα ανοικτή κάλυψη Σ του $M_1 \cup \cdots \cup M_n$ και παρατηρήστε ότι η Σ είναι κάλυψη καθενός από τα $M_1, \ldots, M_n$.)
2. Βρείτε συμπαγή υποσύνολα $M_1, M_2, \ldots$ του $\mathbf{R}$ ώστε το $\bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n$ να μην είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbf{R}$.

Άσκηση 9: Έστω μετρικός χώρος (X,d) και $M \subseteq X$. Αν το M είναι συμπαγές υποσύνολο του (X,d), αποδείξτε ότι υπάρχει αριθμήσιμο $A \subseteq M$ ώστε $M \subseteq \overline{A}$. (Υπόδειξη: Για κάθε $n \in \mathbf{N}$ θεωρήστε την ανοικτή κάλυψη $\{N_x(\frac{1}{n}) : x \in M\}$ του M. Υπάρχει $\{N_{x_{n,1}}, \ldots, N_{x_{n,k_n}})$ με $x_{n,1}, \ldots, x_{n,k_n} \in M$ και $M \subseteq \bigcup_{k=1}^{k_n} N_{x_{n,k}}$. Τέλος, θεωρήστε το $A = \{x_{n,k} : n \in \mathbf{N}, 1 \leq k \leq k_n\}$.)

Άσκηση 10: Έστω μετρικός χώρος (X,d) και μη κενό $M \subseteq X$. Αποδείξτε ότι: το M είναι συμπαγές υποσύνολο του (X,d) αν και μόνον αν το M είναι συμπαγές υποσύνολο του (M,d). (Υπόδειξη: Έστω ότι το M είναι συμπαγές υποσύνολο του (X,d). Πάρτε τυχούσα ανοικτή κάλυψη Σ του M στον (M,d). Δηλαδή, κάθε $B \in \Sigma$ είναι ανοικτό υποσύνολο του (M,d) και $M \subseteq \bigcup_{B \in \Sigma} B$. Για κάθε $B \in \Sigma$ υπάρχει ανοικτό υποσύνολο A_B του (X,d) ώστε $B = A_B \cap M$ (οπότε $B \subseteq A_B$). Θεωρήστε την $\Sigma_1 = \{A_B : B \in \Sigma\}$ που είναι ανοικτή κάλυψη του M στον (X,d), διότι $M \subseteq \bigcup_{B \in \Sigma} B \subseteq \bigcup_{B \in \Sigma} A_B \subseteq \bigcup_{A_B \in \Sigma_1} A_B$. Υπάρχουν $A_{B_1}, \ldots, A_{B_n}$ ώστε $M \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} A_{B_k}$. Αποδείξτε ότι η $\{B_1, \ldots, B_n\}$ αποτελεί ανοικτή κάλυψη του M στον (M,d). Η απόδειξη για το αντίστροφο είναι παρόμοια.)

Άσκηση 11: Έστω μετρικοί χώροι (X_1,d_1) και (X_2,d_2) και $M \subseteq X_1 \cap X_2$. Υποθέτουμε, επίσης, ότι οι μετρικές d_1, d_2 ταυτίζονται στο M, δηλαδή, $d_1(x,y) = d_2(x,y)$ για κάθε $x, y \in M$. Αυτό επιτρέπει να συμβολίσουμε $d = d_1 = d_2$ τον (κοινό) περιορισμό των d_1, d_2 στο $M \times M$.

Αποδείξτε ότι: το M είναι συμπαγές υποσύνολο του (X_1,d_1) αν και μόνον αν το M είναι συμπαγές υποσύνολο του (X_2,d_2). (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της άσκησης.)

Συμπεράνατε ότι η συμπάγεια του M είναι ιδιότητα του M καθεαυτού (και της μετρικής του) και δεν εξαρτάται από τον μετρικό χώρο στον οποίο περιέχεται το M.

Μετά από τις τελευταίες δύο ασκήσεις, δικαιολογείται ο παρακάτω ορισμός.

Ορισμός 5.5 *Ο μετρικός χώρος (X,d) ονομάζεται* ***συμπαγής μετρικός χώρος****, αν το X είναι συμπαγές υποσύνολο του (X,d).*

Επομένως, η άσκηση 10 διατυπώνεται ως εξής: το M είναι συμπαγές υποσύνολο του (X,d) αν και μόνον αν ο (M,d) είναι συμπαγής μετρικός χώρος.

Ορισμός 5.6 *Έστω μετρικός χώρος (X,d) και $M \subseteq X$. Το M ονομάζεται* ***φραγμένο στον*** *(X,d), αν υπάρχει $x_0 \in X$ και θετικός αριθμός R ώστε: $M \subseteq N_{x_0}(R)$ ή, ισοδύναμα, $d(x,x_0) < R$ για κάθε $x \in M$.*

Άσκηση 12: Έστω μετρικός χώρος (X,d).
1. Αποδείξτε ότι το $\emptyset$ είναι φραγμένο στον (X,d).
2. Αν $N \subseteq M \subseteq X$ και το M είναι φραγμένο στον (X,d), αποδείξτε ότι το N είναι φραγμένο στον (X,d).
3. Αν $M, N \subseteq X$ και τα M και N είναι φραγμένα στον (X,d), αποδείξτε ότι το $M \cup N$ είναι φραγμένο στον (X,d).

Το αποτέλεσμα της επόμενης άσκησης σημαίνει ότι το κέντρο x_0 της περιοχής $N_{x_0}(R)$ δεν παίζει ουσιαστικό ρόλο στον ορισμό του φραγμένου υποσυνόλου.

Άσκηση 13: Έστω μετρικός χώρος (X,d), $M \subseteq X$ και $x_0', x_0'' \in X$. Αποδείξτε ότι: υπάρχει R' ώστε $M \subseteq N_{x_0'}(R')$ αν και μόνον αν υπάρχει R'' ώστε $M \subseteq N_{x_0''}(R'')$.

Παραδείγματα:
1. Στο $\mathbf{R}$ ένα υποσύνολο M είναι φραγμένο αν και μόνον αν περιέχεται σε κάποιο διάστημα (a,b). Γενικά, στον $\mathbf{R}^n$ ένα υποσύνολο M είναι φραγμένο αν και μόνον αν περιέχεται σε κάποιο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με ακμές παράλληλες στους κύριους άξονες.

Πράγματι, αν το M είναι φραγμένο στον $\mathbf{R}^n$, δηλαδή, υπάρχουν $R < +\infty$ και $x_0 = (x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(n)})$ ώστε $d_{n,2}(x,x_0) = \sqrt{(x^{(1)} - x_0^{(1)})^2 + \cdots + (x^{(n)} - x_0^{(n)})^2} < R$ για κάθε $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) \in M$, τότε $|x^{(k)} - x_0^{(k)}| < R$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$ και $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) \in M$. Άρα, $x \in [x_0^{(1)} - R, x_0^{(1)} + R] \times [x_0^{(n)} - R, x_0^{(n)} + R]$ για κάθε $x \in M$ και, επομένως, το M περιέχεται στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $[x_0^{(1)} - R, x_0^{(1)} + R] \times \cdots \times [x_0^{(n)} - R, x_0^{(n)} + R]$.

Αντιστρόφως, έστω ότι το M περιέχεται στο $[a_1,b_1] \times \cdots \times [a_n,b_n]$. Θέτουμε $x_0^{(k)} = \frac{a_k+b_k}{2}$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$ και $R = \sqrt{n} \max_{1 \leq k \leq n} \frac{b_k - a_k}{2}$. Τότε για κάθε $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) \in M$ έχουμε $|x^{(k)} - x_0^{(k)}| \leq \frac{R}{\sqrt{n}}$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$ και, επομένως, $d_{n,2}(x,x_0) = \sqrt{(x^{(1)} - x_0^{(1)})^2 + \cdots + (x^{(n)} - x_0^{(n)})^2} \leq \sqrt{n\frac{R^2}{n}} = R$. Άρα το M είναι φραγμένο στον $\mathbf{R}^n$.
2. Έστω οποιοδήποτε μη κενό X και η διακριτή μετρική δ_X. Κάθε $M \subseteq X$ είναι φραγμένο στον (X,δ_X). Ειδικώτερα, το ίδιο το X είναι φραγμένο στον (X,δ_X).

Αυτό οφείλεται στο ότι η δ_X έχει δύο μόνον τιμές, 0 και 1. Αν, λοιπόν, επιλέξουμε οποιοδήποτε $x_0 \in X$, ισχύει $\delta_X(x,x_0) \leq 1$ για κάθε $x \in X$.

Παρατηρούμε ότι το αν ένα υποσύνολο M ενός μετρικού χώρου είναι φραγμένο ή όχι εξαρτάται από τη συγκεκριμένη μετρική του χώρου. Για παράδειγμα, το $\mathbf{R}$ δεν είναι φραγμένο στον $\mathbf{R}$ (με την ευκλείδια μετρική) ενώ είναι φραγμένο στον $\mathbf{R}$ με τη διακριτή μετρική.

Άσκηση 14: Στο $\mathbf{R}$ θεωρούμε τη μετρική d που ορίζεται με τον τύπο $d(x,y) =$

$\frac{|x-y|}{|x-y|+1}$ για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$. Ως εφαρμογή του αποτελέσματος της άσκησης 17 του κεφαλαίου 4, η d και η ευκλείδια μετρική είναι ισοδύναμες. Αποδείξτε ότι το $\mathbf{R}$ είναι φραγμένο στον $(\mathbf{R}, d)$ ενώ δεν είναι φραγμένο στον $\mathbf{R}$ (με την ευκλείδια μετρική).

Άσκηση 15: Έστω πεπερασμένο μη κενό X και οποιαδήποτε μετρική d στο X. Αποδείξτε ότι το X (και κάθε υποσύνολό του) είναι φραγμένο στον (X, d).

Άσκηση 16: Έστω $1 \leq p < q \leq +\infty$ και $M \subseteq \mathbf{R}^n$. Αποδείξτε ότι: το M είναι φραγμένο στο $(\mathbf{R}^n, d_{n,p})$ αν και μόνον αν είναι φραγμένο στον $(\mathbf{R}^n, d_{n,q})$.

Ορισμός 5.7 *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και μη κενό $M \subseteq X$. Ονομάζουμε* ***διάμετρο του*** *M, και συμβολίζουμε $diam(M)$, το*

$$diam(M) = \sup\{d(x, y) : x, y \in M\}.$$

Το σύνολο $\{d(x, y) : x, y \in M\}$ είναι μη κενό, διότι το M είναι μη κενό και, αν $x \in M$, το $d(x, x) = 0$ είναι στοιχείο του συνόλου αυτού. Επίσης, το σύνολο αυτό είναι υποσύνολο του $\mathbf{R}$ και τα στοιχεία του είναι μη αρνητικοί αριθμοί. Αν το σύνολο αυτό είναι άνω φραγμένο, το supremum υπάρχει και είναι μη αρνητικός αριθμός ≥ 0 ενώ, αν το σύνολο αυτό δεν είναι άνω φραγμένο, το supremum είναι το $+\infty$. Άρα, η διάμετρος του M είναι καλώς ορισμένη και

$$0 \leq diam(M) \leq +\infty.$$

Άσκηση 17: Έστω μετρικός χώρος (X, d).
1. Αν $\emptyset \neq N \subseteq M \subseteq X$, αποδείξτε ότι $diam(N) \leq diam(M)$.
2. Αν $\emptyset \neq M, N \subseteq X$ και $M \cap N \neq \emptyset$, αποδείξτε ότι $diam(M \cup N) \leq diam(M) + diam(N)$.

Άσκηση 18: Υπολογίστε τη διάμετρο του $\mathbf{R}$ στο $\mathbf{R}$ (με την ευκλείδια μετρική) και τη διάμετρο του $\mathbf{R}$ στο $\mathbf{R}$ με τη μετρική d της άσκησης 14.

Άσκηση 19: Υπολογίστε τη διάμετρο στον $\mathbf{R}^n$ κάθε ανοικτής και κάθε κλειστής μπάλας και κάθε ανοικτού και κάθε κλειστού παραλληλεπιπέδου με ακμές παράλληλες στους κύριους άξονες.

Άσκηση 20: Υπολογίστε τη διάμετρο του X στον (X, δ_X), διακρίνοντας δύο περιπτώσεις: (i) το X είναι μονοσύνολο και (ii) το X περιέχει περισσότερα από ένα στοιχεία.

Στη δεύτερη περίπτωση πάρτε οποιοδήποτε $x_0 \in X$ και υπολογίστε τη διάμετρο της κλειστής περιοχής $\overline{N_{x_0}}(1)$. Συμφωνεί το αποτέλεσμα με τον 'κανόνα' *διάμετρος = δύο φορές η ακτίνα*;

Πρόταση 5.1 *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και μη κενό $M \subseteq X$. Το M είναι φραγμένο στον (X, d) αν και μόνον αν $diam(M) < +\infty$.*

Απόδειξη: Έστω ότι το M είναι φραγμένο στον (X, d). Δηλαδή, υπάρχει $x_0 \in X$ και αριθμός $R > 0$ ώστε $M \subseteq N_{x_0}(R)$. Για κάθε $x, y \in M$ ισχύει $d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(y, x_0) < R + R = 2R$. Άρα, $diam(M) \leq 2R < +\infty$.

Αντιστρόφως, έστω ότι $diam(M) < +\infty$. Θεωρούμε τυχόν $x_0 \in M$ και το κρατάμε σταθερό. Τότε για κάθε $x \in M$ έχουμε $d(x_0, x) \leq diam(M)$. Αν θέσουμε $R = diam(M) + 1$, τότε για κάθε $x \in M$ ισχύει $d(x_0, x) < R$ και, επομένως, $x \in N_{x_0}(R)$. Άρα, $M \subseteq N_{x_0}(R)$ και, επομένως, το M είναι φραγμένο στον (X, d). Ο.Ε.Δ.

Άσκηση 21: Έστω μετρικός χώρος (X, d) και μη κενό $M \subseteq X$. Αποδείξτε ότι $diam(M) = diam(\overline{M})$. (Υπόδειξη: Η $diam(M) \leq diam(\overline{M})$ είναι απλή. Για την $diam(M) \geq diam(\overline{M})$ θεωρήστε $x, y \in \overline{M}$ και πάρτε (x_n) και (y_n) στο M ώστε $x_n \to x$ και $y_n \to y$. Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της άσκησης 92 του κεφαλαίου 4.)

Πρόταση 5.2 *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $M \subseteq X$. Αν το M είναι συμπαγές υποσύνολο του (X, d), τότε το M είναι φραγμένο και κλειστό υποσύνολο του (X, d).*

Απόδειξη: Παίρνουμε οποιοδήποτε $x_0 \in X$ και θεωρούμε τη συλλογή $\Sigma = \{N_{x_0}(n) : n \in \mathbf{N}\}$. Η Σ είναι ανοικτή κάλυψη του M, οπότε υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη Σ' του M η οποία είναι μικρότερη ή ίση από την Σ. Δηλαδή, υπάρχουν $n_1, \ldots, n_N$ ώστε $M \subseteq N_{x_0}(n_1) \cup \cdots \cup N_{x_0}(n_N)$. Αν θέσουμε $R = \max(n_1, \ldots, n_N)$, συνεπάγεται $M \subseteq N_{x_0}(R)$ και, επομένως, το M είναι φραγμένο στον (X, d).

Παίρνουμε τυχόν $x_0 \in X \setminus M$. Θεωρούμε $A_n = \{x \in X : d(x, x_0) > \frac{1}{n}\}$ και τη συλλογή $\Sigma = \{A_n : n \in \mathbf{N}\}$. Η Σ είναι ανοικτή κάλυψη του M, οπότε υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη Σ' του M μικρότερη ή ίση από την Σ. Δηλαδή, υπάρχουν $n_1, \ldots, n_N$ ώστε $M \subseteq A_{n_1} \cup \cdots \cup A_{n_N}$. Αν θέσουμε $n = \max(n_1, \ldots, n_N)$, συνεπάγεται $M \subseteq A_n$ και, επομένως, $N_{x_0}(\frac{1}{n}) \subseteq X \setminus M$. Αποδείξαμε ότι για κάθε $x_0 \in X \setminus M$ υπάρχει περιοχή του η οποία περιέχεται στο $X \setminus M$. Άρα, το $X \setminus M$ είναι ανοικτό υποσύνολο του (X, d) και, επομένως, το M είναι κλειστό υποσύνολο του (X, d). Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 5.3 *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $N \subseteq M \subseteq X$. Αν το M είναι συμπαγές και το N κλειστό υποσύνολο του (X, d), το N είναι συμπαγές υποσύνολο του (X, d).*

Απόδειξη: Έστω τυχούσα ανοικτή κάλυψη Σ του N. Τότε η $\Sigma_1 = \{X \setminus N\} \cup \Sigma$ είναι ανοικτή κάλυψη του M. Πράγματι, $M = (M \setminus N) \cup N \subseteq (X \setminus N) \cup N \subseteq (X \setminus N) \cup \bigcup_{A \in \Sigma} A$. Επειδή το M είναι συμπαγές υποσύνολο του (X, d), υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη Σ_1' του M μικρότερη ή ίση από την Σ_1. Δηλαδή, υπάρχουν $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma_1$ (μπορούμε να τα πάρουμε διαφορετικά ανά δύο) ώστε η $M \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Διακρίνουμε, τώρα, περιπτώσεις σε σχέση με το αν το $X \setminus N$ είναι ένα από τα $A_1, \ldots, A_n$ ή όχι. Στην πρώτη περίπτωση, έστω $X \setminus N = A_n$. Τότε η $M \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$ γράφεται $M \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1} \cup (X \setminus N)$, οπότε $N \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}$. Αυτό σημαίνει ότι η $\Sigma' = \{A_1, \ldots, A_{n-1}\}$ είναι πεπερασμένη κάλυψη του N μικρότερη ή ίση από την Σ. Στη δεύτερη περίπτωση, όλα τα $A_1, \ldots, A_n$ ανήκουν στην Σ, οπότε η $\Sigma' = \{A_1, \ldots, A_n\}$ είναι πεπερασμένη κάλυψη του N μικρότερη ή ίση από την Σ. Άρα, σε κάθε περίπτωση, υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη του N μικρότερη ή ίση από την Σ. Ο.Ε.Δ.

Παράδειγμα:
Το σύνολο C του Cantor είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbf{R}$, αφού είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}$ και περιέχεται στο $[0,1]$ το οποίο είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbf{R}$.

Άσκηση 22: Έστω μετρικός χώρος (X,d) και $A, B \subseteq X$. Αν το A είναι συμπαγές και το B κλειστό υποσύνολο του (X,d), αποδείξτε ότι το $A \cap B$ είναι συμπαγές υποσύνολο του (X,d). (Υπόδειξη: Συνδυάστε τις Προτάσεις 5.2 και 5.3.)

Το επόμενο Θεώρημα 5.1 είναι γενίκευση του γνωστού αποτελέσματος για ακολουθίες εγκιβωτισμένων κλειστών και φραγμένων διαστημάτων στο $\mathbf{R}$: *αν* $[a_1,b_1] \supseteq [a_2,b_2] \supseteq \ldots \supseteq [a_n,b_n] \supseteq \ldots$, *τότε υπάρχει* x *το οποίο ανήκει σε όλα τα* $[a_n,b_n]$ *και, αν, επιπλέον,* $b_n - a_n \to 0$, *το* x *αυτό είναι μοναδικό.*

Θεώρημα 5.1 *Έστω «εγκιβωτισμένη» ακολουθία μη κενών συμπαγών υποσυνόλων* $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \ldots \supseteq K_n \supseteq \ldots$ *ενός μετρικού χώρου* (X,d). *Τότε η τομή τους,* $\bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n$, *δεν είναι κενή. Δηλαδή, υπάρχει στοιχείο το οποίο ανήκει σε όλα τα* K_n. *Αν, επιπλέον,* $diam(K_n) \to 0$, *το κοινό στοιχείο είναι μοναδικό.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε $\bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n = \emptyset$. Θεωρούμε την $\Sigma = \{X \setminus K_n : n \in \mathbf{N}\}$ και παρατηρούμε ότι αυτή είναι ανοικτή κάλυψη του K_1. Άρα, υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη του K_1 μικρότερη ή ίση από τη Σ, δηλαδή, υπάρχουν $n_1, \ldots, n_N$ ώστε $K_1 \subseteq (X \setminus K_{n_1}) \cup \cdots \cup (X \setminus K_{n_N})$. Θέτουμε $n = \max(n_1, \ldots, n_N)$, οπότε συνεπάγεται $K_1 \subseteq X \setminus K_n$, το οποίο είναι άτοπο.

Έστω $diam(K_n) \to 0$. Αν τα x, y ανήκουν και τα δύο σε όλα τα K_n, τότε $0 \leq d(x,y) \leq diam(K_n)$ για κάθε n. Άρα, $d(x,y) = 0$ και, επομένως, $x = y$. Ο.Ε.Δ.

5.2 Συμπάγεια και ακολουθίες.

Θεώρημα 5.2 *Έστω μετρικός χώρος* (X,d) *και* $M \subseteq X$. *Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.*
1. Το M *είναι συμπαγές υποσύνολο του* (X,d).
2. Κάθε ακολουθία στο M *έχει τουλάχιστον μια υποακολουθία η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του* M.

Απόδειξη: $[1 \Rightarrow 2]$. Έστω τυχούσα (x_n) στο M. Ας υποθέσουμε ότι για κάθε $x \in M$ υπάρχει περιοχή $N_x(\epsilon(x))$ του x (το $\epsilon(x)$ εξαρτάται από το x), η οποία περιέχει πεπερασμένου πλήθους όρους της (x_n). Η $\Sigma = \{N_x(\epsilon(x)) : x \in M\}$ είναι ανοικτή κάλυψη του M. Άρα, υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη Σ' του M μικρότερη ή ίση από την Σ. Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, \ldots, x_n$ ώστε $M \subseteq N_{x_1}(\epsilon(x_1)) \cup \cdots \cup N_{x_n}(\epsilon(x_n))$. Αφού καθεμία από αυτές τις περιοχές περιέχει πεπερασμένου πλήθους όρους της (x_n), η ένωσή τους και, επομένως, και το M, περιέχει πεπερασμένου πλήθους όρους της (x_n). Αυτό, όμως, αντιφάσκει με το ότι ολόκληρη η (x_n) περιέχεται στο M.

Επομένως, η αρχική υπόθεση δεν ισχύει, οπότε υπάρχει κάποιο $x_0 \in M$ ώστε για κάθε $\epsilon > 0$ η $N_{x_0}(\epsilon)$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Άρα, η $N_{x_0}(1)$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n) και έστω $n_1 \geq 1$ ώστε $x_{n_1} \in N_{x_0}(1)$. Ομοίως, η $N_{x_0}(\frac{1}{2})$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n) και έστω $n_2 > n_1$ ώστε $x_{n_2} \in N_{x_0}(\frac{1}{2})$. Ομοίως, η $N_{x_0}(\frac{1}{3})$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n) και έστω $n_3 > n_2$ ώστε $x_{n_3} \in N_{x_0}(\frac{1}{3})$. Συνεχίζοντας επαγωγικά, βρίσκουμε υποακολουθία (αφού $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$) (x_{n_k}) της (x_n) με την ιδιότητα: $x_{n_k} \in N_{x_0}(\frac{1}{k})$ ή, ισοδύναμα, $d(x_{n_k}, x_0) < \frac{1}{k}$ για κάθε $k \in \mathbf{N}$. Άρα, $x_{n_k} \to x_0$ στον (X, d).
$[2 \Rightarrow 1]$. *Βήμα 1.* Έστω $\epsilon > 0$. Θα αποδείξουμε ότι *υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους στοιχεία $x_1, \ldots, x_n$ του M ώστε: $M \subseteq N_{x_1}(\epsilon) \cup \cdots \cup N_{x_n}(\epsilon)$.* Έστω ότι αυτό δεν ισχύει. Διαλέγουμε τυχόν $x_1 \in M$. Τότε $M \not\subseteq N_{x_1}(\epsilon)$. Άρα, υπάρχει $x_2 \in M$ με $x_2 \notin N_{x_1}(\epsilon)$. Τότε $M \not\subseteq N_{x_1}(\epsilon) \cup N_{x_2}(\epsilon)$. Άρα, υπάρχει $x_3 \in M$ με $x_3 \notin N_{x_1}(\epsilon) \cup N_{x_2}(\epsilon)$. Τότε $M \not\subseteq N_{x_1}(\epsilon) \cup N_{x_2}(\epsilon) \cup N_{x_3}(\epsilon)$. Άρα, υπάρχει $x_4 \in M$ με $x_4 \notin N_{x_1}(\epsilon) \cup N_{x_2}(\epsilon) \cup N_{x_3}(\epsilon)$. Συνεχίζοντας επαγωγικά βλέπουμε ότι υπάρχουν $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ στο M ώστε: $n > m \geq 1 \;\Rightarrow\; d(x_n, x_m) \geq \epsilon$. Αυτό, όμως, αποκλείει τη δυνατότητα να υπάρχει υποακολουθία της (x_n) η οποία να συγκλίνει και καταλήγουμε σε άτοπο.
Βήμα 2. Έστω τυχούσα ανοικτή κάλυψη Σ του M. Θα αποδείξουμε ότι *υπάρχει $\epsilon > 0$ με την ιδιότητα: για κάθε $x \in M$ το $N_x(\epsilon)$ περιέχεται σε κάποιο από τα $A \in \Sigma$.*

Ορισμός 5.8 *Ο αριθμός $\epsilon > 0$ με την ιδιότητα αυτή ονομάζεται **αριθμός Lebesgue** της ανοικτής κάλυψης Σ του M.*

Έστω ότι δεν υπάρχει $\epsilon > 0$ με την ιδιότητα αυτή. Δηλαδή, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $x = x(\epsilon) \in M$ ώστε το $N_x(\epsilon)$ δεν περιέχεται σε κανένα από τα $A \in \Sigma$. Εφαρμόζουμε για $\epsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$. Άρα, για κάθε $n \in \mathbf{N}$ υπάρχει $x_n \in M$ ώστε το $N_{x_n}(\frac{1}{n})$ δεν περιέχεται σε κανένα από τα $A \in \Sigma$. Υπάρχει, όμως, υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x_0 \in M$: $x_{n_k} \to x_0$. Το x_0 ανήκει σε κάποιο απο τα $A \in \Sigma$. Έστω $x_0 \in A_0 \in \Sigma$. Αφού το A_0 είναι ανοικτό, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $N_{x_0}(\delta) \subseteq A_0$. Επιλέγουμε αρκετά μεγάλο n_k ώστε: $d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\delta}{2}$ και $\frac{1}{n_k} < \frac{\delta}{2}$. Τότε $N_{x_{n_k}}(\frac{1}{n_k}) \subseteq N_{x_0}(\delta) \subseteq A_0$ και καταλήγουμε σε άτοπο.
Βήμα 3. Έστω τυχούσα ανοικτή κάλυψη Σ του M. Τότε υπάρχει αριθμός Lebesgue ϵ της κάλυψης αυτής, σύμφωνα με το βήμα 2. Λόγω του βήματος 1, υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους στοιχεία $x_1, \ldots, x_n$ του M ώστε $M \subseteq N_{x_1}(\epsilon) \cup \ldots \cup N_{x_n}(\epsilon)$. Καθένα, όμως, από τα $N_{x_k}(\epsilon)$ περιέχεται σε κάποιο από τα $A \in \Sigma$. Έστω $N_{x_k}(\epsilon) \subseteq A_k \in \Sigma$. Τότε $M \subseteq N_{x_1}(\epsilon) \cup \cdots \cup N_{x_n}(\epsilon) \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Επομένως, η $\Sigma' = \{A_1, \ldots, A_n\}$ είναι πεπερασμένη κάλυψη του M μικρότερη ή ίση από την Σ. Ο.Ε.Δ.

Παραδείγματα:
Στα παραδείγματα αυτά ο μετρικός χώρος είναι ο $\mathbf{R}$.
1. $M = (a, b]$. Ας θεωρήσουμε την ακολουθία $x_n = a + \frac{b-a}{n}$ $(n \in \mathbf{N})$. Επειδή $x_n \to a$, κάθε υποακολουθία της συγκλίνει στο a. Άρα, η (x_n) περιέχεται στο $(a, b]$ και δεν έχει καμία υποακολουθία η οποία να συγκλίνει σε στοιχείο του $(a, b]$. Άρα, το $(a, b]$ δεν είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbf{R}$.
2. $M = [a, b]$. Θεωρούμε τυχούσα ακολουθία (x_n) η οποία περιέχεται στο $[a, b]$.

Η (x_n) είναι φραγμένη. Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass στο $\mathbf{R}$, η (x_n) έχει τουλάχιστον μια υποακολουθία (x_{n_k}) η οποία συγκλίνει, δηλαδή $x_{n_k} \to x$ για κάποιο $x \in \mathbf{R}$. Επειδή το $[a, b]$ είναι κλειστό και η (x_{n_k}) περιέχεται στο $[a, b]$, συνεπάγεται $x \in [a, b]$. Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι κάθε ακολουθία στο $[a, b]$ έχει υποακολουθία η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του $[a, b]$ και, επομένως, το $[a, b]$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbf{R}$.
3. $M = [a, +\infty)$. Θεωρούμε την ακολουθία $x_n = a + n \ \ (n \in \mathbf{N})$. Επειδή $x_n \to +\infty$, κάθε υποακολουθία της αποκλίνει στο $+\infty$. Άρα, η (x_n) περιέχεται στο $[a, +\infty)$ και δεν έχει καμία υποακολουθία η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του $[a, +\infty)$. Άρα, το $[a, +\infty)$ δεν είναι συμπαγές.

Εν γένει, το να αποδείξουμε ότι ένα συγκεκριμένο σύνολο M *δεν είναι* συμπαγές είναι σχετικά απλό πρόβλημα: αρκεί να βρούμε *μία συγκεκριμένη* ακολουθία στο M ώστε καμία υποακολουθία της να μη συγκλίνει σε στοιχείο του M. Ενώ το να αποδείξουμε ότι ένα σύνολο M *είναι* συμπαγές είναι πιο δύσκολο πρόβλημα: πρέπει να θεωρήσουμε *τυχούσα* ακολουθία στο M και να αποδείξουμε ότι έχει υποακολουθία η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του M. Η δυσκολία είναι φανερή στο παράδειγμα 2 προηγουμένως, όπου χρειάστηκε να χρησιμοποιήσουμε το δύσκολο Θεώρημα Bolzano-Weierstrass στο $\mathbf{R}$.

Πάντως, το Θεώρημα 5.2 είναι πολύτιμο, αφού παρέχει έναν εναλλακτικό ορισμό της έννοιας της συμπάγειας.

Ορισμός 5.4′ *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $M \subseteq X$. Το M ονομάζεται* ***συμπαγές υποσύνολο του*** *(X, d), αν κάθε ακολουθία στο M έχει τουλάχιστον μία υποακολουθία η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του M.*

Παρατήρηση: Ίσως ο δεύτερος ορισμός της έννοιας της συμπάγειας φαίνεται πιο εύληπτος από τον πρώτο, αφού στο στάδιο αυτό ο αναγνώστης είναι συνήθως πιο εξοικειωμένος με την έννοια της ακολουθίας (και της υποακολουθίας) παρά με την έννοια της ανοικτής κάλυψης. Επιλέγουμε, όμως, τον πρώτο ορισμό διότι στο πλαίσιο των *τοπολογικών χώρων*, το οποίο είναι ευρύτερο από το πλαίσιο των μετρικών χώρων, δεν ισχύει το Θεώρημα 5.2 και, για λόγους που δε θα μας απασχολήσουν τώρα (αφού δε θα ασχοληθούμε με τους τοπολογικούς χώρους), ο κατάλληλος ορισμός είναι ο πρώτος, αυτός με τις ανοικτές καλύψεις.

Ούτως ή άλλως, η έννοια της ανοικτής κάλυψης, σε σχέση με την έννοια της συμπάγειας, είναι αρκετά χρήσιμη στη Μαθηματική Ανάλυση (για παράδειγμα, στη θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων) και, επομένως, όποιον ορισμό κι αν επιλέξουμε, το Θεώρημα 5.2 που εξασφαλίζει την ισοδυναμία των δύο ορισμών είναι αναπόφευκτο.

Συνιστάται ιδιαίτερα να λύσετε την άσκηση 23, διότι θα δείτε ότι κάποιες αποδείξεις είναι αρκετά ευκολότερες αν βασισθούν στο Ορισμό 5.4′ της έννοιας της συμπάγειας.

Άσκηση 23: Χρησιμοποιώντας τον Ορισμό 5.4′, αποδείξτε με δεύτερο τρόπο την Πρόταση 5.2, την Πρόταση 5.3 και το Θεώρημα 5.1. Επίσης, λύστε και τις ασκήσεις 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10 και 11. Τέλος, ξαναδείτε το παράδειγμα 2 μετά από τον Ορισμό 5.4.

Άσκηση 24: Έστω μετρικός χώρος (X, d), $x_0 \in X$ και μη κενά M και N συμπαγή υποσύνολα του (X, d).
1. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $x', y' \in M$ ώστε $d(x', y') = diam(M)$. (Υπόδειξη: Θεωρήστε για κάθε $n \in \mathbf{N}$ $x_n, y_n \in M$ ώστε $d(x_n, y_n) > diam(M) + \frac{1}{n}$. Γιατί υπάρχουν αυτά;)
2. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x' \in M$ ώστε $d(x_0, x') = \inf\{d(x_0, x) : x \in M\}$.
3. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $x' \in M$ και $y' \in N$ με την ιδιότητα: $d(x', y') = \inf\{d(x, y) : x \in M, y \in N\}$.

Άσκηση 25: Έστω μετρικός χώρος (X, d) και μη κενά M και N συμπαγή υποσύνολα του (X, d). Αν $M \cap N = \emptyset$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\epsilon_0 > 0$ με την ιδιότητα: $d(x, y) \geq \epsilon_0$ για κάθε $x \in M$ και $y \in N$. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το τρίτο αποτέλεσμα της άσκησης 24.)

5.3 Συμπάγεια στον ευκλείδιο χώρο.

Πρόταση 5.4 *Κάθε κλειστό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο στον $\mathbf{R}^n$ με ακμές παράλληλες στους κύριους άξονες είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$.*

Πρώτη απόδειξη: Έστω $M = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Θεωρούμε τυχούσα ακολουθία $x_m = (x_m^{(1)}, \ldots, x_m^{(n)})$ $(m \in \mathbf{N})$ στο M. Χωρίζοντας κάθε ακμή $[a_k, b_k]$ στα $[a_k, \frac{a_k+b_k}{2}]$ και $[\frac{a_k+b_k}{2}, b_k]$, χωρίζουμε το M σε 2^n ορθογώνια παραλληλεπίπεδα. Καθένα από αυτά περιέχεται, φυσικά, στο M και έχει διάμετρο υποδιπλάσια της διαμέτρου του M και μήκη ακμών υποδιπλάσια των μηκών των αντίστοιχων ακμών του M. Τώρα, επειδή ολόκληρη η (x_m) περιέχεται στο M, τουλάχιστον ένα από τα 2^n αυτά ορθογώνια παραλληλεπίπεδα πρέπει να περιέχει *άπειρους* όρους της (x_m). Παίρνουμε ένα τέτοιο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και το συμβολίζουμε $M_1 = [a_{1,1}, b_{1,1}] \times \cdots \times [a_{1,n}, b_{1,n}]$. Χωρίζοντας κάθε ακμή $[a_{1,k}, b_{1,k}]$ στα $[a_{1,k}, \frac{a_{1,k}+b_{1,k}}{2}]$ και $[\frac{a_{1,k}+b_{1,k}}{2}, b_{1,k}]$, χωρίζουμε το M_1 σε 2^n ορθογώνια παραλληλεπίπεδα. Καθένα από αυτά περιέχεται στο M_1 και έχει διάμετρο υποδιπλάσια της διαμέτρου του M_1 και μήκη ακμών υποδιπλάσια των μηκών των αντίστοιχων ακμών του M_1 και, επειδή άπειροι όροι της (x_m) περιέχονται στο M_1, τουλάχιστον ένα από τα 2^n αυτά ορθογώνια παραλληλεπίπεδα θα περιέχει, επίσης, άπειρους όρους της (x_m). Παίρνουμε ένα τέτοιο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και το συμβολίζουμε $M_2 = [a_{2,1}, b_{2,1}] \times \cdots \times [a_{2,n}, b_{2,n}]$. Συνεχίζοντας αυτήν τη διαδικασία επαγωγικά, δημιουργούμε ακολουθία ορθογώνιων παραλληλεπιπέδων $M_l = [a_{l,1}, b_{l,1}] \times \cdots \times [a_{l,n}, b_{l,n}]$ $(l \in \mathbf{N})$ με τις ιδιότητες:
(i) κάθε M_l περιέχει άπειρους όρους της (x_m),
(ii) $M \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_{l-1} \supseteq M_l \supseteq \cdots$,
(iii) για κάθε $k = 1, \ldots, n$ ισχύει $a_k \leq a_{1,k} \leq \cdots \leq a_{l-1,k} \leq a_{l,k} \leq \cdots \leq b_{l,k} \leq b_{l-1,k} \leq \cdots \leq b_{1,k} \leq b_k$,
(iv) για κάθε $k = 1, \ldots, n$ και κάθε $l \geq 2$ ισχύει $b_{l,k} - a_{l,k} = \frac{b_{l-1,k}-a_{l-1,k}}{2} = \cdots = \frac{b_{1,k}-a_{1,k}}{2^{l-1}} = \frac{b_k-a_k}{2^l}$, οπότε $\lim_{l\to+\infty}(b_{l,k} - a_{l,k}) = 0$ και

(v) για κάθε $l \geq 2$ ισχύει $diam(M_l) = \frac{diam(M_{l-1})}{2} = \cdots = \frac{diam(M_1)}{2^{l-1}} = \frac{diam(M)}{2^l}$, οπότε $\lim_{l\to+\infty} diam(M_l) = 0$.

Επειδή το M_1 περιέχει άπειρους όρους της (x_m) υπάρχει $x_{m_1} \in M_1$. Επειδή το M_2 περιέχει άπειρους όρους της (x_m) υπάρχει $x_{m_2} \in M_2$ με $m_2 > m_1$. Επειδή το M_3 περιέχει άπειρους όρους της (x_m) υπάρχει $x_{m_3} \in M_3$ με $m_3 > m_2$. Συνεχίζοντας επαγωγικά, βρίσκουμε υποακολουθία (x_{m_l}) της (x_m) ώστε $x_{m_l} \in M_l$ για κάθε $l \geq 1$. Αυτό γράφεται: $a_{l,k} \leq x_{m_l}^{(k)} \leq b_{l,k}$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$ και $l \geq 1$. Από την (iii) συνεπάγεται για κάθε $k = 1, \ldots, n$ ότι: η $(a_{l,k})$ είναι αύξουσα και φραγμένη, η $(b_{l,k})$ είναι φθίνουσα και φραγμένη και, επομένως, οι δύο ακολουθίες συγκλίνουν σε δύο αντίστοιχα όρια, τα οποία, λόγω της (iv), είναι ο ίδιος αριθμός. Θέτουμε $x^{(k)} = \lim_{l\to+\infty} a_{l,k} = \lim_{l\to+\infty} b_{l,k}$. Αφού $a_{l,k} \leq x_{m_l}^{(k)} \leq b_{l,k}$, συνεπάγεται $x_{m_l}^{(k)} \to x^{(k)}$ και, επειδή αυτό ισχύει για κάθε $k = 1, \ldots, n$, συνεπάγεται ότι $x_{m_l} \to x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$. Βλέπουμε, επίσης, ότι $x \in M_l$ για κάθε $l \geq 1$, διότι $a_{l,k} \leq x^{(k)} \leq b_{l,k}$ για κάθε $l \geq 1$ και $k = 1, \ldots, n$. Δηλαδή, το x ανήκει σε καθένα από τα M_l (και, φυσικά, και στο M το οποίο περιέχει όλα τα M_l). Είναι, επίσης, εύκολο να δούμε ότι το x είναι το μοναδικό στοιχείο με αυτήν την ιδιότητα. Πράγματι, αν υπάρχει, εκτός του x, το y σε όλα τα M_l, τότε, λόγω της (v), $0 \leq d_{n,2}(x,y) \leq diam(M_l) \to 0$ και, επομένως, $d_{n,2}(x,y) = 0$ ή, ισοδύναμα, $y = x$.

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι οποιαδήποτε (x_m) στο M έχει τουλάχιστον μία υποακολουθία η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του M.

Δεύτερη απόδειξη: Θεωρούμε τυχούσα ανοικτή κάλυψη Σ του M και υποθέτουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι δεν υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη Σ' του M μικρότερη ή ίση από την Σ. Όπως και στην πρώτη απόδειξη, χωρίζουμε το M στα ίδια 2^n ορθογώνια παραλληλεπίπεδα και παρατηρούμε ότι για τουλάχιστον ένα από αυτά δεν υπάρχει πεπερασμένη κάλυψή του μικρότερη ή ίση από την Σ. Σε αντίθετη περίπτωση, θα είχαμε για καθένα υπο-παραλληλεπίπεδο μία πεπερασμένη κάλυψη $\subseteq \Sigma$, οπότε η ένωσή τους θα ήταν *πεπερασμένη* κάλυψη του M και $\subseteq \Sigma$. Επιλέγουμε ένα τέτοιο παραλληλεπίπεδο και το συμβολίζουμε M_1. Όπως πριν, χωρίζουμε το M_1 σε 2^n υπο-παραλληλεπίπεδα από τα οποία για ένα τουλάχιστον δεν υπάρχει πεπερασμένη κάλυψή του μικρότερη ή ίση από την Σ. Επιλέγουμε ένα τέτοιο και το συμβολίζουμε M_2. Συνεχίζοντας επαγωγικά, κατασκευάζουμε ακολουθία (M_l) ορθογώνιων παραλληλεπιπέδων με ακριβώς τις ίδιες ιδιότητες $(ii) - (v)$ όπως και η αντίστοιχη ακολουθία στην πρώτη απόδειξη και με την (i) να έχει αντικατασταθεί από την: για κάθε l δεν υπάρχει καμία πεπερασμένη κάλυψη του M_l μικρότερη ή ίση από την Σ.

Όπως πριν, υπάρχει μοναδικό $x \in M$ το οποίο περιέχεται σε όλα τα M_l. Επειδή η Σ είναι κάλυψη του M, υπάρχει κάποιο $A_0 \in \Sigma$ ώστε $x \in A_0$. Επειδή το A_0 είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$, υπάρχει $\epsilon_0 > 0$ ώστε $N_x(\epsilon_0) \subseteq A_0$. Επειδή $diam(M_l) \to 0$, υπάρχει l_0 αρκετά μεγάλο ώστε $diam(M_{l_0}) < \epsilon_0$. Τότε για κάθε $y \in M_{l_0}$ έχουμε $d_{n,2}(y,x) \leq diam(M_{l_0}) < \epsilon_0$ και, επομένως, $y \in N_x(\epsilon_0)$. Άρα, $M_{l_0} \subseteq N_x(\epsilon_0) \subseteq A_0$. Αυτό σημαίνει ότι η $\Sigma' = \{A_0\}$ είναι πεπερασμένη κάλυψη του M_{l_0} μικρότερη ή ίση από την Σ και καταλήγουμε σε άτοπο. Ο.Ε.Δ.

Θα αποδείξουμε, τώρα, το θεώρημα Bolzano-Weierstrass στον ευκλείδιο χώρο, το οποίο διατυπώνεται με δύο (ισοδύναμες) μορφές.

Θεώρημα 5.3 ***Bolzano-Weierstrass.*** *Κάθε φραγμένη ακολουθία στον* $\mathbf{R}^n$ *έχει συγκλίνουσα υποακολουθία.*

Απόδειξη: Έστω (x_m) φραγμένη ακολουθία στον $\mathbf{R}^n$. Τότε υπάρχει κάποιο κλειστό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο M με ακμές παράλληλες στους κύριους άξονες ώστε $x_m \in M$ για κάθε $m \geq 1$. Αν δεχθούμε τον ορισμό της έννοιας της συμπάγειας μέσω ακολουθιών, τότε η συνέχεια της απόδειξης είναι ακριβώς η πρώτη απόδειξη της Πρότασης 5.4. Αν δεχθούμε τον ορισμό της έννοιας της συμπάγειας μέσω καλύψεων, τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 5.4, το M είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$, οπότε υπάρχει, βάσει του Θεωρήματος 5.2, υποακολουθία της (x_m) η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του M. Ο.Ε.Δ.

Άσκηση 26: Έστω $x_0 \in \mathbf{R}^n$, μη κενό κλειστό υποσύνολο M του $\mathbf{R}^n$ και μη κενό συμπαγές υποσύνολο N του $\mathbf{R}^n$.
1. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x' \in M$ ώστε $d_{n,2}(x_0, x') = \inf\{d_{n,2}(x_0, x) : x \in M\}$.
2. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $x' \in M$ και $y' \in N$ ώστε $d_{n,2}(x', y') = \inf\{d_{n,2}(x, y) : x \in M, y \in N\}$.
3. Αν, επιπλέον, $M \cap N = \emptyset$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\epsilon_0 > 0$ ώστε $d_{n,2}(x, y) \geq \epsilon_0$ για κάθε $x \in M$ και $y \in N$.
Να αντιπαραβάλετε με τις ασκήσεις 24 και 25.

Θεώρημα 5.4 ***Bolzano-Weierstrass.*** *Κάθε φραγμένο άπειρο υποσύνολο του* $\mathbf{R}^n$ *έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης.*

Απόδειξη: Έστω K τυχόν άπειρο και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$. Επειδή το K είναι άπειρο, υπάρχει ακολουθία (x_m) στο K με όρους διαφορετικούς ανά δύο. Το K είναι φραγμένο, οπότε η (x_m) είναι φραγμένη και, βάσει του Θεωρήματος 5.3, υπάρχει υποακολουθία (x_{m_k}) της (x_m) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in \mathbf{R}^n$. Επειδή οι όροι της (x_{m_k}) είναι διαφορετικοί ανά δύο, το πολύ ένας από αυτούς είναι $= x$. Άρα, η ακολουθία (x_{m_k}) από κάποιον δείκτη και πέρα έχει όλους τους όρους της $\neq x$ και συγκλίνει στο x. Από την Πρόταση 4.20 συνεπάγεται ότι το x είναι σημείο συσσώρευσης του K. Ο.Ε.Δ.

Ερχόμαστε, τώρα, σε ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα το οποίο χαρακτηρίζει όλα τα συμπαγή υποσύνολα του ευκλείδιου χώρου.

Θεώρημα 5.5 *Έστω* $M \subseteq \mathbf{R}^n$*. Το* M *είναι συμπαγές υποσύνολο του* $\mathbf{R}^n$ *αν και μόνον αν είναι φραγμένο και κλειστό υποσύνολο του* $\mathbf{R}^n$*.*

Πρώτη απόδειξη: Η Πρόταση 5.2 αποδεικνύει τη μία κατεύθυνση.

Έστω ότι το M είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$. Θεωρούμε τυχούσα (x_m) στο M. Επειδή το M είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$, η (x_m) είναι φραγμένη και, σύμφωνα με το Θεώρημα 5.3, έχει υποακολουθία (x_{m_k}) η οποία συγκλίνει, δηλαδή, $x_{m_k} \to x$ για κάποιο $x \in \mathbf{R}^n$. Επειδή το M είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$ και η (x_{m_k}) περιέχεται στο M, συνεπάγεται $x \in M$.

Άρα, κάθε ακολουθία στο M έχει υποακολουθία η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του M και, επομένως, το M είναι συμπαγές.

Δεύτερη απόδειξη: Πάλι η Πρόταση 5.2 αποδεικνύει τη μία κατεύθυνση.

Επειδή το M είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$, υπάρχει κλειστό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο N με ακμές παράλληλες στους κύριους άξονες ώστε $M \subseteq N$. Από την Πρόταση 5.4 συνεπάγεται ότι το N είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$ και, επειδή το M είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$, το M είναι, σύμφωνα με την Πρόταση 5.3, συμπαγές υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$. Ο.Ε.Δ.

Παραδείγματα:
1. Οποιαδήποτε κλειστή μπάλα $\overline{N_{x_0}}(R)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$.
2. Το σύνολο C του Cantor είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbf{R}$, διότι είναι φραγμένο και κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}$.

Άσκηση 27: Αποδείξτε ότι το $\{(x^{(1)}, x^{(2)}) : x^{(1)} \geq 0, x^{(2)} \geq 0, x^{(1)} + x^{(2)} \leq 1\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbf{R}^2$ και ότι το $\{(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) : (x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2 \leq x^{(3)} \leq 1\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbf{R}^3$.

Άσκηση 28: Έστω φραγμένο υποσύνολο M του $\mathbf{R}^n$. Αποδείξτε ότι τα $\overline{M}$, M' και ∂M είναι συμπαγή υποσύνολα του $\mathbf{R}^n$. (Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι και τα τρία σύνολα είναι φραγμένα υποσύνολα του $\mathbf{R}^n$.)

Άσκηση 29: Φτιάξτε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbf{R}$ με άπειρου αριθμήσιμου πλήθους σημεία συσσώρευσης.

Παρατήρηση: Το Θεώρημα 5.5 λέει ότι το αντίστροφο της Πρότασης 5.2 ισχύει στον χώρο $\mathbf{R}^n$. Δεν είναι, όμως, σωστό ότι ισχύει σε κάθε μετρικό χώρο. Πράγματι, σύμφωνα με το Παράδειγμα 2 μετά από τον Ορισμό 5.4, κάθε άπειρο υποσύνολο του X δεν είναι συμπαγές υποσύνολο του (X, δ_X) ενώ είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολό του.

Πρόταση 5.5 *Κάθε μη κενό συμπαγές υποσύνολο του* $\mathbf{R}$ *έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο.*

Απόδειξη: Έστω μη κενό συμπαγές υποσύνολο M του $\mathbf{R}$. Αφού το M είναι μη κενό και φραγμένο, το M έχει supremum. Θέτουμε $\beta = \sup M$, οπότε υπάρχει ακολουθία (x_n) στο M ώστε $x_n \to \beta$. Αφού το M είναι κλειστό, $\beta \in M$ και, επομένως, το β είναι το μέγιστο στοιχείο του M.

Η απόδειξη είναι ίδια για την ύπαρξη ελαχίστου στοιχείου. Ο.Ε.Δ.

Άσκηση 30: Έστω μετρικός χώρος (X, d). Θεωρούμε το σύνολο $Z_b = \{A : A \text{ μη κενό και φραγμένο υποσύνολο του } X\}$. Για κάθε $A, B \in Z_b$ ορίζουμε το $\widetilde{d}(A, B) = \inf\{\mu \in \mathbf{R} : \text{ για κάθε } a \in A \text{ υπάρχει } b \in B \text{ ώστε } d(a, b) \leq \mu \text{ και για κάθε } b \in B \text{ υπάρχει } a \in A \text{ ώστε } d(a, b) \leq \mu\}$.
1. Αποδείξτε ότι το σύνολο του οποίου το infimum ορίζει το $\widetilde{d}(A, B)$ είναι μη κενό με κάτω φράγμα το 0 και, επομένως, $0 \leq \widetilde{d}(A, B) < +\infty$.

2. Αποδείξτε ότι η $\widetilde{d}$ είναι **ψευδομετρική** στο Z_b. Δηλαδή, ότι ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες μίας μετρικής (Ορισμός 4.3) εκτός της (ii), η οποία γίνεται: για κάθε $A \in Z_b$ ισχύει $\widetilde{d}(A,A) = 0$.
3. Αποδείξτε ότι για κάθε $A, B \in Z_b$ ισχύει: $\widetilde{d}(A,B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$.

Έστω $Z_{bc} = \{A : A$ μη κενό, φραγμένο και κλειστό υποσύνολο του $(X,d)\}$. Για κάθε $A, B \in Z_{bc}$ ορίζουμε με τον ίδιο τύπο το $\widetilde{d}(A,B)$. Με άλλα λόγια, ο $(Z_{bc}, \widetilde{d})$ είναι υπόχωρος του $(Z_b, \widetilde{d})$.
4. Αποδείξτε ότι η $\widetilde{d}$ είναι μετρική στο Z_{bc}. Η $\widetilde{d}$ ονομάζεται **μετρική Hausdorff** στον χώρο Z_{bc} των μη κενών, κλειστών και φραγμένων υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου (X,d).
5. Ως (X,d) θεωρούμε τον $\mathbf{R}^n$ με την ευκλείδια μετρική. Έστω ακολουθία (A_n) μη κενών, κλειστών και φραγμένων υποσυνόλων του $\mathbf{R}^n$ και έστω $\widetilde{d}(A_n, A) \to 0$, όπου το A είναι, επίσης, μη κενό, κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$. Αποδείξτε ότι, αν όλα τα A_n είναι κυρτά, τότε και το A είναι κυρτό.
6. Προσπαθήστε να *δείτε* τι σημαίνει γεωμετρικά η σχέση $\widetilde{d}(A,B) \le \epsilon$ ανάμεσα σε δύο κλειστά και φραγμένα (δηλαδή, συμπαγή) υποσύνολα του $\mathbf{R}^2$ ή του $\mathbf{R}^3$.

5.4 Συμπάγεια και συνεχείς συναρτήσεις.

Θεώρημα 5.6 *Έστω μετρικοί χώροι (X,d) και (Y,ρ), $M \subseteq X$ και $f : M \to Y$. Αν η f είναι συνεχής στο M και το M είναι συμπαγές υποσύνολο του (X,d), το $f(M)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του (Y,ρ).*

Πρώτη απόδειξη: Έστω (y_n) οποιαδήποτε ακολουθία στο $f(M)$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η (y_n) έχει υποακολουθία η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του $f(M)$. Για κάθε $n \in \mathbf{N}$ υπάρχει $x_n \in M$ ώστε $f(x_n) = y_n$. Αφού το M είναι συμπαγές υποσύνολο του (X,d), υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του M, δηλαδή, $x_{n_k} \to x$ για κάποιο $x \in M$. Αφού η f είναι συνεχής στο M, $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x) \in f(M)$.

Δεύτερη απόδειξη: Έστω τυχούσα ανοικτή κάλυψη T του $f(M)$. Για κάθε $B \in T$ το $f^{-1}(B)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του (M,d) και, επομένως, υπάρχει A_B ανοικτό υποσύνολο του (X,d) ώστε $f^{-1}(B) = A_B \cap M$. Επίσης, επειδή $f(M) \subseteq \bigcup_{B \in T} B$, συνεπάγεται $M \subseteq \bigcup_{B \in T} f^{-1}(B) \subseteq \bigcup_{B \in T} A_B$. Επομένως, η συλλογή $\Sigma = \{A_B : B \in T\}$ είναι ανοικτή κάλυψη του M. Επειδή το M είναι συμπαγές υποσύνολο του (X,d), υπάρχουν $B_1, \ldots, B_n \in T$ ώστε $M \subseteq A_{B_1} \cup \cdots \cup A_{B_n}$. Συνεπάγεται εύκολα ότι $M \subseteq f^{-1}(B_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(B_n)$, οπότε $f(M) \subseteq B_1 \cup \cdots \cup B_n$. Άρα, η $\{B_1, \ldots, B_n\}$ είναι πεπερασμένη κάλυψη του $f(M)$ μικρότερη ή ίση από την T. Ο.Ε.Δ.

Άσκηση 31: Έστω μετρικοί χώροι (X,d) και (Y,ρ), $M \subseteq X$, $N \subseteq Y$ και $f : M \to N$ η οποία είναι ένα-προς-ένα και επί. Αν η f είναι συνεχής στο M και το M είναι συμπαγές υποσύνολο του (X,d), αποδείξτε ότι η αντίστροφη $f^{-1} : N \to M$ είναι συνεχής στο N.

Άσκηση 32: Έστω $A \subseteq \mathbf{R}$ και $f : A \to \mathbf{R}$. Το $G_f = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subseteq \mathbf{R}^2$ ονομάζεται **γράφημα** της f.
1. Έστω ότι η f είναι φραγμένη. Αποδείξτε ότι, αν το G_f είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}^2$, η f είναι συνεχής στο A.
2. Έστω ότι το A είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}$. Αποδείξτε ότι, αν η f είναι συνεχής στο A, το G_f είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbf{R}^2$.
3. Έστω ότι το A είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbf{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο A αν και μόνον αν το G_f είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbf{R}^2$.

Θεώρημα 5.7 *Έστω μετρικός χώρος (X, d), $M \subseteq X$ και $f : M \to \mathbf{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο M και το M είναι συμπαγές υποσύνολο του (X, d), η f είναι φραγμένη και έχει μέγιστη τιμή και ελάχιστη τιμή.*

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 5.6 συνεπάγεται ότι το $f(M)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbf{R}$. Άρα, σύμφωνα με την Πρόταση 5.5, το $f(M)$ είναι φραγμένο και έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο. Ο.Ε.Δ.

Άσκηση 33: Η συνάρτηση $f(x^{(1)}, x^{(2)}) = e^{x^{(1)}+x^{(2)}}$, ορισμένη στο σύνολο $\{(x^{(1)}, x^{(2)}) \in \mathbf{R}^2 : (x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2 \leq 1\}$ έχει, σύμφωνα με το Θεώρημα 5.7, μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Μπορείτε να τις υπολογίσετε;

Άσκηση 34: Έστω $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ με $f(x) = f(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \to 0$ καθώς $d_{n,2}(x, 0) = \sqrt{(x^{(1)})^2 + \cdots + (x^{(n)})^2} \to +\infty$. Αυτό σημαίνει, εξ ορισμού, ότι: για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $R = R(\epsilon) > 0$ ώστε $|f(x)| < \epsilon$ για κάθε $x \in \mathbf{R}^n$ με $d_{n,2}(x, 0) > R$.
1. Αν υπάρχει $x_0 \in \mathbf{R}^n$ ώστε $f(x_0) > 0$, αποδείξτε ότι η f έχει μέγιστη τιμή. (Υπόδειξη: Πάρτε $\epsilon = f(x_0)$ και το αντίστοιχο R. Εφαρμόστε το Θεώρημα 5.7 στο σύνολο $\overline{N_0}(R)$.)
2. Αν υπάρχει $x_0 \in \mathbf{R}^n$ ώστε $f(x_0) < 0$, αποδείξτε ότι η f έχει ελάχιστη τιμή.

Άσκηση 35: Εφαρμόστε το αποτέλεσμα της άσκησης 34 για να αποδείξετε ότι η $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ με τύπο $f(x^{(1)}, x^{(2)}) = x^{(1)} e^{-(x^{(1)})^2 - (x^{(2)})^2}$ έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $\mathbf{R}^2$ και, κατόπιν, υπολογίστε τις τιμές αυτές καθώς και τα αντίστοιχα $x = (x^{(1)}, x^{(2)})$.

Τέλος, θα δούμε την γενίκευση του ορισμού της ομοιόμορφης συνέχειας.

Ορισμός 5.9 *Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $A \subseteq X$ και $f : A \to Y$. Η f ονομάζεται **ομοιόμορφα συνεχής στο** A, αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ ώστε:*

$$x, y \in A,\ d(x, y) < \delta \quad \Rightarrow \quad \rho(f(x), f(y)) < \epsilon\,.$$

Άσκηση 36: Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $B \subseteq A \subseteq X$ και $f : A \to Y$. Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A, αποδείξτε ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής και στο B.

Άσκηση 37: Έστω μετρικοί χώροι (X, d), (Y, ρ) και (Z, τ), $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$,

$f : A \to B$ και $g : B \to Z$. Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A και η g ομοιόμορφα συνεχης στο B, αποδείξτε ότι η $g \circ f : A \to Z$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.

Θεώρημα 5.8 *Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $M \subseteq X$ και $f : M \to Y$. Αν η f είναι συνεχής στο M και το M είναι συμπαγές υποσύνολο του (X, d), η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο M.*

Πρώτη απόδειξη: Έστω ότι η f *δεν* είναι ομοιόμορφα συνεχής στο M. Τότε υπάρχει $\epsilon_0 > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν x, y στο M για τα οποία ισχύει $d(x, y) < \delta$ και $\rho(f(x), f(y)) \geq \epsilon_0$. Άρα, για κάθε $n \in \mathbf{N}$ υπάρχουν $x_n, y_n \in M$ ώστε $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ και $\rho(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon_0$. Το M είναι συμπαγές, οπότε η (x_n) έχει υποακολουθία (x_{n_k}) η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του M, δηλαδή, $x_{n_k} \to x_0$ για κάποιο $x_0 \in M$. Τότε, όμως, $d(y_{n_k}, x_0) \leq d(y_{n_k}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) < \frac{1}{n_k} + d(x_{n_k}, x_0) \to 0$ και, επομένως, $y_{n_k} \to x_0$. Λόγω συνέχειας της f στο x_0, συνεπάγεται $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$ και $f(y_{n_k}) \to f(x_0)$. Άρα $\rho\big(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})\big) \leq \rho\big(f(x_{n_k}), f(x_0)\big) + \rho\big(f(x_0), f(y_{n_k})\big) \to 0$. Το τελευταίο αντιφάσκει με το ότι $\rho\big(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})\big) \geq \epsilon_0$ για κάθε k.

Δεύτερη απόδειξη: Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο M, για κάθε $x \in M$ υπάρχει $\delta(x) > 0$ ώστε: $x' \in M$, $d(x', x) < \delta(x) \;\Rightarrow\; \rho(f(x'), f(x)) < \frac{\epsilon}{2}$. Τώρα, η συλλογή $\{N_x(\frac{\delta(x)}{2}) : x \in M\}$ είναι ανοικτή κάλυψη του M και, επειδή το M είναι συμπαγές υποσύνολο του (X, d), υπάρχουν $x_1, \ldots, x_n \in M$ ώστε $M \subseteq N_{x_1}(\frac{\delta(x_1)}{2}) \cup \cdots \cup N_{x_n}(\frac{\delta(x_n)}{2})$. Θέτουμε $\delta = \min(\frac{\delta(x_1)}{2}, \ldots, \frac{\delta(x_n)}{2})$ και παίρνουμε οποιαδήποτε $x, y \in M$ με $d(x, y) < \delta$. Το x ανήκει στο M, οπότε υπάρχει κάποιο $k = 1, \ldots, n$ ώστε $x \in N_{x_k}(\frac{\delta(x_k)}{2})$ και, επομένως, $d(x, x_k) < \frac{\delta(x_k)}{2} < \delta(x_k)$. Επίσης, $d(y, x_k) \leq d(y, x) + d(x, x_k) < \delta + \frac{\delta(x_k)}{2} \leq \delta(x_k)$. Από τις δύο αυτές ανισότητες συνεπάγεται $d(f(x), f(x_k)) < \frac{\epsilon}{2}$ και $d(f(y), f(x_k)) < \frac{\epsilon}{2}$. Άρα, $d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f(x_k)) + d(f(y), f(x_k)) < \epsilon$. Ο.Ε.Δ.

Τα δύο Θεωρήματα 5.7 και 5.8 γενικεύουν γνωστά αποτελέσματα του Απειροστικού Λογισμού, όπου έχουμε συναρτήσεις $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ συνεχείς στο $[a, b]$.

Άσκηση 38: Έστω μετρικός χώρος (X, d), $A \subseteq X$ και $f : A \to \mathbf{R}$. Υποθέτουμε ότι το $\overline{A}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του (X, d) και ότι η f είναι συνεχής στο A. Αποδείξτε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:
1. Υπάρχει συνεχής επέκταση της f στο $\overline{A}$, δηλαδή $F : \overline{A} \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $\overline{A}$ ώστε $F(x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$.
2. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.
(Υπόδειξη: Για το $[1 \Rightarrow 2]$ εφαρμόζουμε το Θεώρημα 5.8 και το αποτέλεσμα της άσκησης 36. Για το $[2 \Rightarrow 1]$ θεωρήστε τυχόν $x \in \overline{A}$ και οποιαδήποτε (x_n) στο A με $x_n \to x$ στον (X, d). Αποδείξτε ότι η $(f(x_n))$ είναι ακολουθία Cauchy στο $\mathbf{R}$, οπότε συγκλίνει στο $\mathbf{R}$. Αποδείξτε ότι το όριο της $(f(x_n))$ δεν εξαρτάται από την (x_n) αλλά μονάχα από το x και ορίσατε $F(x) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n)$. Αυτό γίνεται για κάθε $x \in \overline{A}$ και αποδείξτε ότι $F(x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$ και ότι η οριζόμενη $F : \overline{A} \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής στο $\overline{A}$.)

Κεφάλαιο 6

Γενικευμένα ολοκληρώματα.

6.1 Γενικά.

Στα πρώτα μαθήματα της Μαθηματικής Ανάλυσης εξετάζουμε πότε μία φραγμένη συνάρτηση

$$f : [a, b] \to \mathbf{R}\,,$$

ορισμένη σε ένα φραγμένο κλειστό διάστημα, είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Θυμόμαστε ότι δύο τέτοιες κατηγορίες Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων είναι οι κατά τμήματα συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$ και οι κατά τμήματα μονότονες συναρτήσεις στο $[a, b]$. Από τον ορισμό των Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων *δεν* καλύπτονται δύο σημαντικές κατηγορίες συναρτήσεων:
1. συναρτήσεις που δεν είναι φραγμένες και
2. συναρτήσεις που ορίζονται στα μη φραγμένα διαστήματα $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$ και $(-\infty, +\infty)$ ή στα μη κλειστά διαστήματα (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $(a, +\infty)$ και $(-\infty, b)$.

Περίπτωση 1. Έστω πραγματική συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα $[a, b)$, όπου $a \in \mathbf{R}$ και $b \in \mathbf{R}$ ή $b = +\infty$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι για κάθε c με $a \leq c < b$ η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a, c]$. Αν το όριο του $\int_a^c f(x)\,dx$ καθώς $c \to b-$ υπάρχει, λέμε ότι η f έχει **γενικευμένο ολοκλήρωμα στο** $[a, b)$. Η τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος είναι το $\lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)\,dx$ και συμβολίζεται $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$. Δηλαδή,

$$\int_a^{\to b} f(x)\,dx = \lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)\,dx\,.$$

Αν το όριο αυτό είναι πραγματικός αριθμός, λέμε ότι **το γενικευμένο ολοκλήρωμα** $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ **συγκλίνει**.

Αν το παραπάνω όριο δεν υπάρχει ή δεν είναι πραγματικός αριθμός, λέμε ότι το $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ **αποκλίνει**. Ειδικότερα, αν το όριο είναι $+\infty$ ή $-\infty$, λέμε ότι το $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ **αποκλίνει στο** $+\infty$ ή **αποκλίνει στο** $-\infty$, αντιστοίχως, και γράφουμε: $\int_a^{\to b} f(x)\,dx = +\infty$ ή $\int_a^{\to b} f(x)\,dx = -\infty$, αντιστοίχως.

Παραδείγματα
1. Έστω $f : [1,+\infty) \to \mathbf{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[1,c]$ για κάθε $c \geq 1$, και $\int_1^c \frac{1}{x^2}\,dx = 1 - \frac{1}{c}$. Άρα, $\int_1^{\to+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{c\to+\infty}(1-\frac{1}{c}) = 1$.
2. Έστω $f : [1,+\infty) \to \mathbf{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{1}{x}$. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[1,c]$ για κάθε $c \geq 1$ και $\int_1^c \frac{1}{x}\,dx = \log c$. Άρα, $\int_1^{\to+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\log c = +\infty$.
3. Έστω $f : [0,1) \to \mathbf{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{1}{x-1}$. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,c]$ για κάθε c με $0 \leq c < 1$ και $\int_0^c \frac{1}{x-1}\,dx = \log(1-c)$. Άρα, $\int_0^{\to1} \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{c\to1-}\log(1-c) = -\infty$.
4. Έστω $f : [0,1) \to \mathbf{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,c]$ για κάθε c με $0 \leq c < 1$ και $\int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = 2 - 2\sqrt{1-c}$. Άρα, $\int_0^{\to1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{c\to1-}\left(2-2\sqrt{1-c}\right) = 2$.

Η επόμενη Πρόταση 6.1 αποδεικνύει ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα είναι γενίκευση του ολοκληρώματος Riemann.

Πρόταση 6.1 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ μια Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[a,b]$. Τότε η f έχει γενικευμένο ολοκλήρωμα στο $[a,b)$ και $\int_a^{\to b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.*

Απόδειξη: Αφού η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, είναι και φραγμένη. Δηλαδή, υπάρχει κάποιο $M \in \mathbf{R}$ ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$. Ακόμη, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη σε κάθε υποδιάστημα του $[a,b]$ και, επομένως, σε κάθε $[a,c]$ με $a \leq c < b$. Μένει να αποδείξουμε ότι $\lim_{c\to b-}\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$. Αφού $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\lim_{c\to b-}\int_c^b f(x)\,dx = 0$. Όμως,

$$\Big|\int_c^b f(x)\,dx\Big| \leq \int_c^b |f(x)|\,dx \leq M(b-c)\,,$$

οπότε $\lim_{c\to b-}\int_c^b f(x)\,dx = 0$. Ο.Ε.Δ.

Περίπτωση 2. Ακριβώς τα ανάλογα, όπως στην περίπτωση 1, ισχύουν σχετικά με το αριστερό άκρο του διαστήματος ολοκλήρωσης. Δηλαδή, έστω $f : (a,b] \to \mathbf{R}$, όπου $a \in \mathbf{R}$ ή $a = -\infty$, και για κάθε c με $a < c \leq b$ η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[c,b]$. Ορίζουμε το **γενικευμένο ολοκλήρωμα της f στο** $(a,b]$ ως το

$$\int_{a\leftarrow}^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a+}\int_c^b f(x)\,dx\,,$$

αν υπάρχει το όριο αυτό κλπ. κλπ.

Παραδείγματα:
1. Έστω $f(0,2] \to \mathbf{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Αν $0 < c \leq 2$, τότε $\int_c^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{c}$. Άρα, $\int_{0\leftarrow}^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{2}$.
2. Έστω $f : (0,2] \to \mathbf{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{1}{x}$. Άν $0 < c \leq 2$, $\int_c^2 \frac{1}{x}\, dx = \log\left(\frac{2}{c}\right)$. Άρα, $\int_{0\leftarrow}^2 \frac{1}{x}\, dx = +\infty$.
3. Έστω $f : (-\infty, 0] \to \mathbf{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$. Αν $c \leq 0$, $\int_c^0 \frac{1}{(x-1)^2}\, dx = 1 - \frac{1}{1-c}$. Άρα, $\int_{-\infty\leftarrow}^0 \frac{1}{(x-1)^2}\, dx = 1$.

Ισχύει, επίσης, η Πρόταση 6.1 προσαρμοσμένη κατάλληλα.

Πρόταση 6.2 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ μια Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[a,b]$. Τότε η f έχει γενικευμένο ολοκλήρωμα στο $(a,b]$ και $\int_{a\leftarrow}^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$.*

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη της Πρότασης 6.1. Χρησιμοποιώντας την $\left|\int_a^c f(x)\, dx\right| \leq \int_a^c |f(x)|\, dx \leq M(c-a)$, αποδεικνύουμε ότι $\lim_{c\to a+} \int_a^c f(x)\, dx = 0$. Τέλος, από την $\int_c^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^c f(x)\, dx$, παίρνοντας όρια καθώς $c \to a+$, βρίσκουμε $\int_{a\leftarrow}^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$. Ο.Ε.Δ.

Περίπτωση 3. Αν $f : (a,b) \to \mathbf{R}$, όπου $a \in \mathbf{R}$ ή $a = -\infty$ και $b \in \mathbf{R}$ ή $b = +\infty$, χωρίζουμε το (a,b) με οποιοδήποτε ενδιάμεσο σημείο d $(a < d < b)$. Αν το $\int_d^{\to b} f(x)\, dx$ συγκλίνει και το $\int_{a\leftarrow}^d f(x)\, dx$ συγκλίνει, λέμε ότι η f **έχει γενικευμένο ολοκλήρωμα στο** (a,b)

$$\int_{a\leftarrow}^{\to b} f(x)\, dx = \int_{a\leftarrow}^{d} f(x)\, dx + \int_d^{\to b} f(x)\, dx$$

ή ότι **το** $\int_{a\leftarrow}^{\to b} f(x)\, dx$ **συγκλίνει**. Αν τουλάχιστον ένα από τα $\int_{a\leftarrow}^d f(x)\, dx$ και $\int_d^{\to b} f(x)\, dx$ αποκλίνει, λέμε ότι **το** $\int_{a\leftarrow}^{\to b} f(x)\, dx$ **αποκλίνει**. Αν και τα δύο όρια υπάρχουν και τουλάχιστον ένα είναι $+\infty$ ή $-\infty$, λέμε ότι το $\int_{a\leftarrow}^{\to b} f(x)\, dx$ αποκλίνει στο $+\infty$ ή $-\infty$, αντιστοίχως, αρκεί να μην έχουμε τις περιπτώσεις $(+\infty)+(-\infty)$ ή $(-\infty)+(+\infty)$. Εύκολα βλέπει κανείς ότι η επιλογή του ενδιάμεσου d δεν επηρεάζει τη σύγκλιση ή την απόκλιση ή την τιμή του $\int_{a\leftarrow}^{\to b} f(x)\, dx$.

Λήμμα 6.1 *Έστω $f : (a,b) \to \mathbf{R}$, όπου $a \in \mathbf{R}$ ή $a = -\infty$ και $b \in \mathbf{R}$ ή $b = +\infty$, και $a < d < d' < b$. Αν υπάρχει το $\int_{a\leftarrow}^d f(x)\, dx + \int_d^{\to b} f(x)\, dx$, τότε υπάρχει και το $\int_{a\leftarrow}^{d'} f(x)\, dx + \int_{d'}^{\to b} f(x)\, dx$ και έχουν τις ίδιες τιμές.*

Απόδειξη: Έχουμε $\int_{d'}^c f(x)\, dx = \int_d^c f(x)\, dx + \int_{d'}^d f(x)\, dx$. Επομένως, επειδή υπάρχει το $\lim_{c\to b-} \int_d^c f(x)\, dx$, υπάρχει και το $\lim_{c\to b-} \int_{d'}^c f(x)\, dx$ και ισχύει $\lim_{c\to b-} \int_{d'}^c f(x)\, dx = \lim_{c\to b-} \int_d^c f(x)\, dx + \int_{d'}^d f(x)\, dx$. Δηλαδή, $\int_{d'}^{\to b} f(x)\, dx = \int_d^{\to b} f(x)\, dx + \int_{d'}^d f(x)\, dx$.

Ομοίως, έχουμε $\int_c^{d'} f(x)\,dx = \int_c^d f(x)\,dx - \int_{d'}^d f(x)\,dx$. Επομένως, επειδή υπάρχει το $\lim_{c\to a+}\int_c^d f(x)\,dx$, υπάρχει και το $\lim_{c\to a+}\int_c^{d'} f(x)\,dx$ και ισχύει $\lim_{c\to a+}\int_c^{d'} f(x)\,dx = \lim_{c\to a+}\int_c^d f(x)\,dx - \int_{d'}^d f(x)\,dx$. Δηλαδή, $\int_{a\leftarrow}^{d'} f(x)\,dx = \int_{a\leftarrow}^d f(x)\,dx - \int_{d'}^d f(x)\,dx$.

Επειδή το $\int_{d'}^d f(x)\,dx$ είναι πραγματικός αριθμός, προσθέτοντας τις δύο ισότητες, παίρνουμε $\int_{a\leftarrow}^{d'} f(x)\,dx + \int_{d'}^{\to b} f(x)\,dx = \int_{a\leftarrow}^d f(x)\,dx + \int_d^{\to b} f(x)\,dx$. Ο.Ε.Δ.

Η επόμενη είναι ανάλογη των Προτάσεων 6.1 και 6.2.

Πρόταση 6.3 *Έστω $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ μια Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[a,b]$. Τότε η f έχει γενικευμένο ολοκλήρωμα στο (a,b) και $\int_{a\leftarrow}^{\to b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.*

Απόδειξη: Παίρνουμε $d \in (a,b)$. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,d]$ και στο $[d,b]$. Από τις Προτάσεις 6.1 και 6.2 συνεπάγεται $\int_{a\leftarrow}^d f(x)\,dx = \int_a^d f(x)\,dx$ και $\int_d^{\to b} f(x)\,dx = \int_d^b f(x)\,dx$ και, προσθέτοντας, παίρνουμε $\int_{a\leftarrow}^{\to b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$. Ο.Ε.Δ

Παραδείγματα:

1. Έστω $f : (-\infty,+\infty) \to \mathbf{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Τότε $\int_0^{\to+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\int_0^c \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\frac{1}{2}\log(c^2+1) = +\infty$ και $\int_{-\infty\leftarrow}^0 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{c\to-\infty}\int_c^0 \frac{x}{x^2+1}\,dx = -\lim_{c\to-\infty}\frac{1}{2}\log(c^2+1) = -\infty$. Άρα το $\int_{-\infty\leftarrow}^{\to+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx$ αποκλίνει και δεν ορίζεται τιμή του.
2. Έστω $f : (-\infty,+\infty) \to \mathbf{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Τότε $\int_0^{\to+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\int_0^c \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\arctan c = \frac{\pi}{2}$ και, επίσης, $\int_{-\infty\leftarrow}^0 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{c\to-\infty}\int_c^0 \frac{1}{x^2+1}\,dx = -\lim_{c\to-\infty}\arctan c = \frac{\pi}{2}$. Άρα, $\int_{-\infty\leftarrow}^{\to+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \pi$.

Περίπτωση 4. Η περίπτωση αυτή συνδυάζει όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις. Θεωρούμε f η οποία είναι ορισμένη σε διάστημα (a,b) (όπου τα a,b μπορούν να είναι άπειρα) εκτός, ίσως, από πεπερασμένου πλήθους σημεία. Δηλαδή, μπορεί να υπάρχουν $\xi_1,\dots,\xi_n$ ώστε

$$f : (a,\xi_1)\cup(\xi_1,\xi_2)\cup\cdots\cup(\xi_{n-1},\xi_n)\cup(\xi_n,b) \to \mathbf{R}.$$

Αν όλα τα $\int_{a\leftarrow}^{\to\xi_1} f(x)\,dx$, $\int_{\xi_1\leftarrow}^{\to\xi_2} f(x)\,dx, \dots, \int_{\xi_{n-1}\leftarrow}^{\to\xi_n} f(x)\,dx$ και $\int_{\xi_n\leftarrow}^{\to b} f(x)\,dx$ συγκλίνουν, λέμε ότι **το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f στο (a,b) συγκλίνει** και η τιμή του είναι

$$\int_{a\leftarrow}^{\to\xi_1} f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n-1}\int_{\xi_k\leftarrow}^{\to\xi_{k+1}} f(x)\,dx + \int_{\xi_n\leftarrow}^{\to b} f(x)\,dx.$$

Αν όλα τα ολοκληρώματα υπάρχουν και ένα τουλάχιστον από τα ολοκληρώματα αποκλίνει στο $+\infty$ και κανένα δεν αποκλίνει στο $-\infty$, λέμε ότι **το γενικευμένο**

ολοκλήρωμα της f στο (a,b) αποκλίνει στο $+\infty$. Ομοίως, αν όλα τα ολοκληρώματα υπάρχουν και ένα τουλάχιστον από τα ολοκληρώματα αποκλίνει στο $-\infty$ και κανένα δεν αποκλίνει στο $+\infty$, λέμε ότι **το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f στο (a,b) αποκλίνει στο** $-\infty$. Σε κάθε άλλη περίπτωση το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f στο (a,b) *δεν* υπάρχει.

Συμβολισμός:
Στο εξής τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$, $\int_{a\leftarrow}^{b} f(x)\,dx$, $\int_{a\leftarrow}^{\to b} f(x)\,dx$ *καθώς και το γενικευμένο ολοκλήρωμα με τα διάφορα* $\xi_1,\dots,\xi_n$ *στο εσωτερικό του* (a,b) *θα τα συμβολίζουμε* $\int_a^b f(x)\,dx$.

Δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης με το ολοκλήρωμα Riemann $\int_a^b f(x)\,dx$, διότι, αν το ολοκλήρωμα Riemann της f στο $[a,b]$ υπάρχει, υπάρχει και το γενικευμένο ολοκλήρωμα και οι τιμές τους συμπίπτουν.

Υποτίθεται, βεβαίως, ότι, αναλόγως της συγκεκριμένης κάθε φορά f, μπορούμε να διακρίνουμε αν πρόκειται για γενικευμένο ή για συνηθισμένο ολοκλήρωμα Riemann.

Άσκηση 1: Διακρίνατε τα $\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$, $\int_1^3 \frac{2}{x-2}\,dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$, $\int_{-1}^7 \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$, $\int_2^7 \log\left(\frac{x}{x-1}\right)dx$ και $\int_0^{+\infty} \log x\,dx$ σε γενικευμένα και σε συνηθισμένα ολοκληρώματα Riemann.

Άσκηση 2: Γιατί τα $\int_0^1 x\log x\,dx$, $\int_0^5 \frac{\sin x}{x}\,dx$, $\int_{-1}^1 \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$, $\int_1^5 \frac{\log x}{x-1}\,dx$ και $\int_0^1 \log x \log(1+x)\,dx$ θεωρούνται συνηθισμένα ολοκληρώματα Riemann?

Άσκηση 3: Μπορούν τα παρακάτω ολοκληρώματα να θεωρηθούν συνηθισμένα ολοκληρώματα Riemann ή, έστω, γενικευμένα ολοκληρώματα; $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sin x}\,dx$, $\int_0^{+\infty} \log(\cos^2 x)\,dx$ και $\int_0^1 \frac{1}{\sin(\frac{1}{x})}\,dx$.

ΠΑΡΑΔΟΧΗ: Στη θεωρητική μας συζήτηση από εδώ και πέρα θα περιοριστούμε στην περίπτωση 1. Δηλαδή, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ θα είναι το $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$. Αυτό σημαίνει ότι η f θα είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,c]$ για κάθε c $(a \le c < b)$ και $\int_a^b f(x)\,dx$ $= \int_a^{\to b} f(x)\,dx = \lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)\,dx$. Σε κάθε άλλη περίπτωση τα αποτελέσματα είναι ανάλογα και αποδεικνύονται με ανάλογο τρόπο.

Πρόταση 6.4 ***Προσθετικότητα ως προς υποδιαστήματα.*** *Έστω $a<d<b$ και η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,c]$ για κάθε $c\in[a,b)$. Τότε: το $\int_a^b f(x)\,dx$ υπάρχει αν και μόνον αν το $\int_d^b f(x)\,dx$ υπάρχει. Επίσης, αν τα δύο αυτά ολοκληρώματα υπάρχουν,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx\,.$$

Απόδειξη Έστω $a<d<c<b$. Από την προσθετικότητα του ολοκληρώμα-

τος Riemann: $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^d f(x)\,dx + \int_d^c f(x)\,dx$. Επειδή το $\int_a^d f(x)\,dx$ είναι πραγματικός αριθμός, το $\lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)\,dx$ υπάρχει αν και μόνον αν το $\lim_{c\to b-} \int_d^c f(x)\,dx$ υπάρχει. Αυτό, φυσικά, σημαίνει ότι: το $\int_a^b f(x)\,dx$ υπάρχει αν και μόνον αν το $\int_d^b f(x)\,dx$ υπάρχει.

Τέλος, παίρνοντας όριο στην $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^d f(x)\,dx + \int_d^c f(x)\,dx$, έχουμε $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 6.5 *Αν το $\int_a^b f(x)\,dx$ συγκλίνει, τότε $\lim_{c\to b-} \int_c^b f(x)\,dx = 0$. Δηλαδή, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $c_0 = c_0(\epsilon) \in [a,b)$ ώστε:*

$$c_0 \le c < b \quad \Rightarrow \quad \Big| \int_c^b f(x)\,dx \Big| < \epsilon\,.$$

Αν το $\int_a^b f(x)\,dx$ συγκλίνει, τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 6.4, τα $\int_a^b f(x)\,dx$ και $\int_c^b f(x)\,dx$ είναι πραγματικοί αριθμοί για κάθε $c \in (a,b)$ και $\lim_{c\to b-} \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b-} \big(\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx\big) = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = 0$. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 6.6 ***Γραμμικότητα ως προς τη συνάρτηση.*** *1. Αν τα $\int_a^b f(x)\,dx$ και $\int_a^b g(x)\,dx$ υπάρχουν και δεν είναι $+\infty$ και $-\infty$ ή $-\infty$ και $+\infty$, τότε το $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx$ υπάρχει και*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

2. Αν $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$, και υπάρχει το $\int_a^b f(x)\,dx$, το $\int_a^b (\lambda f(x))\,dx$ υπάρχει και

$$\int_a^b (\lambda f(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Αν $\lambda = 0$, η ισότητα ισχύει κατά προφανή τρόπο εκτός αν $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$ ή $-\infty$, οπότε η αριστερή πλευρά είναι ίση με 0 και η δεξιά είναι απροσδιόριστη μορφή.

Απόδειξη: 1. Στην $\int_a^c (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_a^c g(x)\,dx$ παίρνουμε όριο καθώς $c \to b-$.
2. Ομοίως, στην $\int_a^c (\lambda f(x))\,dx = \lambda \int_a^c f(x)\,dx$ παίρνουμε όριο καθώς $c \to b-$. Ο.Ε.Δ.

Άσκηση 4: Υπολογίστε τα $\int_1^{+\infty} \big(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}\big)\,dx$ και $\int_1^{+\infty} \big(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\big)\,dx$.

Πρόταση 6.7 ***Σύγκριση ολοκληρωμάτων, Ι.*** *Έστω ότι το $\int_a^b f(x)\,dx$ και το $\int_a^b g(x)\,dx$ υπάρχουν και $f(x) \le g(x)$ για κάθε $x \in [a,b)$. Τότε*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Απόδειξη: Για οποιοδήποτε $c \in [a,b)$ έχουμε $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a,c]$, οπότε $\int_a^c f(x)\,dx \leq \int_a^c g(x)\,dx$. Παίρνοντας όρια καθώς $c \to b-$, συμπεραίνουμε ότι $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

Πρόταση 6.8 ***Σύγκριση ολοκληρωμάτων, ΙΙ.*** *Έστω $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a,b)$.*
1. Αν $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$ και η g είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,c]$ για κάθε $c \in [a,b)$, τότε $\int_a^b g(x)\,dx = +\infty$.
2. Αν $\int_a^b g(x)\,dx = -\infty$ και η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,c]$ για κάθε $c \in [a,b)$, τότε $\int_a^b f(x)\,dx = -\infty$.

Απόδειξη: 1. Για οποιοδήποτε $c \in [a,b)$ έχουμε $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a,c]$, οπότε $\int_a^c f(x)\,dx \leq \int_a^c g(x)\,dx$. Επειδή $\int_a^c f(x)\,dx \to +\infty$ καθώς $c \to b-$, συνεπάγεται ότι $\int_a^c g(x)\,dx \to +\infty$ καθώς $c \to b-$.
2. Όπως στο μέρος 1.

Θεώρημα 6.1 ***Κριτήριο του Cauchy.*** *Έστω ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,c]$ για κάθε $c \in [a,b)$. Τότε το $\int_a^b f(x)\,dx$ συγκλίνει αν και μόνον αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $c_0 = c_0(\epsilon) \in [a,b)$ ώστε:*

$$c_0 \leq c_1 < c_2 < b \quad \Rightarrow \quad \Big| \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx \Big| < \epsilon\,.$$

Απόδειξη: Έστω ότι το $\int_a^b f(x)\,dx$ συγκλίνει. Τότε, για $\epsilon > 0$ υπάρχει $c_0 = c_0(\epsilon)$ ώστε: $c_0 \leq c < b \Rightarrow \big| \int_a^c f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \big| < \frac{\epsilon}{2}$. Όμως, τότε: $c_0 \leq c_1 < c_2 < b \Rightarrow \big| \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx \big| = \big| \int_a^{c_2} f(x)\,dx - \int_a^{c_1} f(x)\,dx \big| \leq \big| \int_a^{c_2} f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \big| + \big| \int_a^{c_1} f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \big| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Αντιστρόφως, έστω οποιαδήποτε ακολουθία (c_n) στο $[a,b)$ ώστε $c_n \to b$. Παίρνουμε $\epsilon > 0$, οπότε υπάρχει το $c_0 = c_0(\epsilon)$ με τις ιδιότητες της υπόθεσης. Αφού $c_n \to b$, υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε: $n \geq n_0 \Rightarrow c_0 \leq c_n < b$. Άρα: $n_0 \leq m < n \Rightarrow \big| \int_{c_m}^{c_n} f(x)\,dx \big| < \epsilon$ ή, ισοδύναμα, $\big| \int_a^{c_n} f(x)\,dx - \int_a^{c_m} f(x)\,dx \big| < \epsilon$. Άρα, η $\big(\int_a^{c_n} f(x)\,dx \big)$ είναι ακολουθία Cauchy. Άρα, υπάρχει αριθμός s ώστε $\int_a^{c_n} f(x)\,dx \to s$. Άν πάρουμε μία άλλη ακολουθία (c_n') με $c_n' \to b$, τότε η μικτή ακολουθία $c_1, c_1', c_2, c_2', c_3, c_3', \ldots$ συγκλίνει και αυτή στο b και, σύμφωνα με τα παραπάνω, η $\int_a^{c_1} f(x)\,dx$, $\int_a^{c_1'} f(x)\,dx$, $\int_a^{c_2} f(x)\,dx$, $\int_a^{c_2'} f(x)\,dx$,... συγκλίνει σε κάποιο όριο. Αφού, όμως, $\int_a^{c_n} f(x)\,dx \to s$, το όριο αυτό είναι, οπωσδήποτε, το s. Άρα $\int_a^{c_n'} f(x)\,dx \to s$.

Υπάρχει, λοιπόν, *ακριβώς ένας* αριθμός s ώστε *για κάθε* ακολουθία (c_n) στο $[a,b)$ με $c_n \to b$ να ισχύει $\int_a^{c_n} f(x)\,dx \to s$. Αυτό, όμως, σημαίνει ότι $\lim_{c \to b-} \int_a^c f(x)\,dx = s$ και, επομένως, το $\int_a^b f(x)\,dx$ συγκλίνει. Ο.Ε.Δ.

Τα δύο αποτελέσματα της επόμενης Πρότασης 6.9 είναι πολύ χρήσιμα. Ο ρόλος τους είναι ο ίδιος με τον ρόλο των ανάλογων αποτελεσμάτων για τα συνήθη ολοκληρώματα Riemann: χρησιμεύουν για υπολογισμούς ολοκληρωμάτων.

Πρόταση 6.9 *1.* ***Ολοκλήρωση κατά μέρη****. Έστω ότι οι f και g έχουν συνεχή παράγωγο στο $[a,b)$ και ότι το $\lim_{c\to b-} f(c)g(c)$ είναι πραγματικός αριθμός. Τότε το $\int_a^b f'(x)g(x)\,dx$ υπάρχει αν και μόνον αν το $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx$ υπάρχει. Επίσης, στην περίπτωση που τα δύο ολοκληρώματα υπάρχουν,*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \lim_{c\to b-} f(c)g(c) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx\,.$$

2. ***Αλλαγή μεταβλητής****. Αν η $\phi : [A,B) \to [a,b)$ είναι γνησίως αύξουσα και επί του $[a,b)$ και έχει συνεχή παράγωγο στο $[A,B)$, τότε*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_A^B f(\phi(X))\phi'(X)\,dX\,.$$

Εννοείται ότι η ύπαρξη ενός από τα δύο ολοκληρώματα συνεπάγεται την ύπαρξη και του άλλου.

Απόδειξη: 1. Για κάθε $c \in [a,b)$, ισχύει $\int_a^c f'(x)g(x)\,dx = f(c)g(c) - f(a)g(a) - \int_a^c f(x)g'(x)\,dx$. Επειδή το $\lim_{c\to b-} f(c)g(c)$ είναι πραγματικός αριθμός, η ύπαρξη του ενός από τα $\lim_{c\to b-}\int_a^b f'(x)g(x)\,dx$ και $\lim_{c\to b-}\int_a^b f(x)g'(x)\,dx$ συνεπάγεται την ύπαρξη και του άλλου. Στην περίπτωση ύπαρξης των δύο αυτών ορίων, παίρνοντας όριο στην $\int_a^c f'(x)g(x)\,dx = f(c)g(c)-f(a)g(a)-\int_a^c f(x)g'(x)\,dx$, καταλήγουμε στην $\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \lim_{c\to b-} f(c)g(c)-f(a)g(a)-\int_a^b f(x)g'(x)\,dx$.
2. Επειδή η $\phi : [A,B) \to [a,b)$ είναι γνησίως αύξουσα, συνεχής στο $[A,B)$ και επί του $[a,b)$, συνεπάγεται ότι $\lim_{C\to B-}\phi(C) = b$. Επίσης, υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $\psi : [a,b) \to [A,B)$ και είναι κι αυτή γνησίως αύξουσα, συνεχής στο $[a,b)$ και επί του $[A,B)$. Άρα, $\lim_{c\to b-}\psi(c) = B$. Θέτουμε, τώρα, $c = \phi(C)$ ή, ισοδύναμα, $C = \psi(c)$. Ισχύει, επομένως, η ισοδυναμία: $c \to b- \;\Leftrightarrow\; C \to B-$. Από τη γνωστή σχέση $\int_a^c f(x)\,dx = \int_A^C f(\phi(X))\phi'(X)\,dX$, παίρνοντας όριο καθώς $c \to b-$ ή, ισοδύναμα, καθώς $C \to B-$, συμπεραίνουμε ότι $\int_a^b f(x)\,dx = \int_A^B f(\phi(X))\phi'(X)\,dX$. Ο.Ε.Δ.

Άσκηση 5: Έστω $a > 0$. Υπολογίστε τα $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+a^2}\,dx$ και $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+a^2}\,dx$.

Άσκηση 6: Αποδείξτε ότι $\int_0^1 x^p \log x\,dx = -\frac{1}{(p+1)^2}$ για κάθε $p > -1$.

Άσκηση 7: Αποδείξτε ότι $\int_1^{+\infty} x^p \log x\,dx = \frac{1}{(p+1)^2}$ για κάθε $p < -1$.

Άσκηση 8: Αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{n+m}}\,dx = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!}$ για κάθε $n, m \in \mathbf{N}$.

Άσκηση 9: Χρησιμοποιήστε την $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ χωρίς απόδειξη.
1. Αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x\cos x}{x}\,dx = \frac{\pi}{4}$. (Υπόδειξη: $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$.)
2. Αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$. (Υπόδειξη: Ολοκλήρωση κατά μέρη στην ισότητα του μέρους 1.)

3. Αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}$. (Υπόδειξη: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.)
4. Αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4}\, dx = \frac{\pi}{3}$.

Άσκηση 10: Έστω ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a, b]$ με $0 < a \le b < \infty$ και έστω $0 < A \le B < +\infty$,
1. Ορίζουμε τη συνάρτηση με τύπο $g(x) = \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\, dt$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και έστω ότι το όριο $L = \lim_{x\to+\infty} g(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Αποδείξτε ότι
(i) $\int_A^B \frac{f(x)}{x}\, dx = g(B) - g(A) + \int_A^B \frac{g(x)}{x}\, dx$,
(ii) $\lim_{T\to+\infty} \int_{AT}^{BT} \frac{f(x)}{x}\, dx = L \log\left(\frac{B}{A}\right)$ και
(iii) $\int_1^{+\infty} \frac{f(Ax)-f(Bx)}{x}\, dx = -L \log\left(\frac{B}{A}\right) + \int_A^B \frac{f(x)}{x}\, dx$.
2. Ορίζουμε τη συνάρτηση $h(x) = x\int_x^1 \frac{f(t)}{t^2}\, dt$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και έστω ότι το όριο $l = \lim_{x\to0+} h(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Αποδείξτε ότι
(i) $\int_A^B \frac{f(x)}{x}\, dx = h(A) - h(B) + \int_A^B \frac{h(x)}{x}\, dx$,
(ii) $\lim_{t\to0+} \int_{At}^{Bt} \frac{f(x)}{x}\, dx = l \log\left(\frac{B}{A}\right)$ και
(iii) $\int_0^1 \frac{f(Ax)-f(Bx)}{x}\, dx = l \log\left(\frac{B}{A}\right) - \int_A^B \frac{f(x)}{x}\, dx$.
3. Με τις υποθέσεις των 1 και 2: $\int_0^{+\infty} \frac{f(Ax)-f(Bx)}{x}\, dx = (L - l) \log\left(\frac{A}{B}\right)$.
4. Αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(Ax)-\cos(Bx)}{x}\, dx = \log\left(\frac{B}{A}\right)$ και $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-Ax}-e^{-Bx}}{x}\, dx = \log\left(\frac{B}{A}\right)$.

Ορισμός 6.1 *Έστω συνάρτηση $f : [a, b) \cup (b, d] \to \mathbf{R}$, η οποία είναι Riemann ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a, c]$ $(a \le c < b)$ και σε κάθε διάστημα $[c, d]$ $(b < c \le d)$. Ονομάζουμε* ***πρωτεύουσα τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος*** *$\int_a^d f(x)\, dx$ το όριο (αν υπάρχει) $\lim_{\epsilon\to0+} \left(\int_a^{b-\epsilon} f(x)\, dx + \int_{b+\epsilon}^d f(x)\, dx\right)$ και τη συμβολίζουμε P.V. $\int_a^d f(x)\, dx$. Δηλαδή,*

$$\text{P.V.} \int_a^d f(x)\, dx = \lim_{\epsilon\to0+} \Big(\int_a^{b-\epsilon} f(x)\, dx + \int_{b+\epsilon}^d f(x)\, dx \Big) .$$

Υπάρχουν παραδείγματα, όπου δεν υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα ενώ υπάρχει η πρωτεύουσα τιμή του.

Παράδειγμα:
Έστω $f(x) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$.

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\, dx$ δεν υπάρχει, διότι $\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx = +\infty$, $\int_{-1}^0 \frac{1}{x}\, dx = -\infty$ και το $\int_{-1}^0 \frac{1}{x}\, dx + \int_0^1 \frac{1}{x}\, dx = (-\infty) + (+\infty)$ είναι απροσδιόριστη μορφή. Όμως, P.V. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\, dx = \lim_{\epsilon\to0+} \left(\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{1}{x}\, dx + \int_\epsilon^1 \frac{1}{x}\, dx\right) = \lim_{\epsilon\to0+} 0 = 0$.

Πρόταση 6.10 *Έστω $f : [a, b) \cup (b, d] \to \mathbf{R}$, η οποία είναι Riemann ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a, c]$ $(a \le c < b)$ και σε κάθε διάστημα $[c, d]$ $(b < c \le d)$. Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^d f(x)\, dx$ υπάρχει, τότε υπάρχει και η πρωτεύουσα τιμή του και είναι ίσα.*

Απόδειξη: Αν το $\int_a^d f(x)\,dx$ υπάρχει, τα $\int_a^b f(x)\,dx$ και $\int_b^d f(x)\,dx$ υπάρχουν εξ ορισμού. Άρα, $\lim_{\epsilon\to 0+}\int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ και $\lim_{\epsilon\to 0+}\int_{b+\epsilon}^d f(x)\,dx = \int_b^d f(x)\,dx$. Επίσης, τα $\int_a^b f(x)\,dx$ και $\int_b^d f(x)\,dx$ δεν είναι $+\infty$ και $-\infty$ ή $-\infty$ και $+\infty$. Άρα, $P.V.\int_a^d f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+}\big(\int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx + \int_{b+\epsilon}^d f(x)\,dx\big) = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^d f(x) = \int_a^d f(x)\,dx$. Ο.Ε.Δ.

6.2 Μη αρνητικές συναρτήσεις.

Θεώρημα 6.2 *Έστω ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,c]$ για κάθε $c\in[a,b)$ και ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,b)$.*
1. Αν το $\int_a^c f(x)\,dx$ είναι φραγμένο ως συνάρτηση του c στο $[a,b)$, δηλαδή, αν υπάρχει $M\in\mathbf{R}$ ώστε $0\leq\int_a^c f(x)\,dx\leq M$ για κάθε $c\in[a,b)$, τότε το $\int_a^b f(x)\,dx$ συγκλίνει.
2. Αν το $\int_a^c f(x)\,dx$ δεν είναι φραγμένο ως συνάρτηση του c στο $[a,b)$, τότε $\int_a^b f(x)\,dx=+\infty$.

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι το $\int_a^c f(x)\,dx$ είναι αύξουσα συνάρτηση του c, αφού, αν $a\leq c_1<c_2<b$, συνεπάγεται $\int_a^{c_2} f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx \geq \int_a^{c_1} f(x)\,dx$. Επομένως, αν το $\int_a^c f(x)\,dx$ είναι άνω φραγμένο ως συνάρτηση του c στο $[a,b)$, τότε το $\lim_{c\to b-}\int_a^c f(x)\,dx$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός ενώ, αν το $\int_a^b f(x)\,dx$ δεν είναι άνω φραγμένο, τότε το $\lim_{c\to b-}\int_a^b f(x)\,dx$ υπάρχει, αλλά είναι $+\infty$. Ο.Ε.Δ.

Είναι άμεση συνέπεια της προηγούμενης πρότασης ότι *το γενικευμένο ολοκλήρωμα μη αρνητικών συναρτήσεων πάντοτε υπάρχει και είναι είτε πραγματικός αριθμός είτε* $+\infty$. Μάλιστα, επειδή $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,b)$, συνεπάγεται $\int_a^b f(x)\,dx\geq\int_a^b 0\,dx=0$. Άρα,

$$0\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq+\infty\,.$$

Μπορούμε, λοιπόν, να πούμε ότι η σύγκλιση του γενικευμένου ολοκληρώματος ισοδυναμεί με τη συνθήκη $\int_a^b f(x)\,dx<+\infty$ ενώ η απόκλισή του ισοδυναμεί με τη συνθήκη $\int_a^b f(x)\,dx=+\infty$.

Αξίζει να τονισθεί ότι, για γενική συνάρτηση f, η ανισότητα $\int_a^b f(x)\,dx\leq+\infty$ ισχύει κατά προφανή τρόπο, *αρκεί, όμως, το $\int_a^b f(x)\,dx$ να υπάρχει, δηλαδή, να έχει υπόσταση ως στοιχείο του $\mathbf{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.* Αν η συνάρτηση έχει όλες τις τιμές της μη αρνητικές, η προϋπόθεση αυτή είναι εγγυημένη από το Θεώρημα 6.2.

Πρόταση 6.11 ***Σύγκριση ολοκληρωμάτων, ΙΙΙ.*** *Έστω ότι οι f και g είναι Riemann ολοκληρώσιμες στο $[a,c]$ για κάθε $c\in[a,b)$ και ότι $0\leq f(x)\leq g(x)$ για κάθε $x\in[a,b)$. Τότε*

1. $0 \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$ *και*
2. αν το $\int_a^b g(x)\,dx$ *συγκλίνει, τότε και το* $\int_a^b f(x)\,dx$ *συγκλίνει.*

Απόδειξη: 1. Επειδή οι f και g είναι μη αρνητικές, τα $\int_a^b f(x)\,dx$ και $\int_a^b g(x)\,dx$ υπάρχουν. Από την Πρόταση 6.7 συνεπάγεται $0 \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$.
2. Επειδή $\int_a^b g(x)\,dx < +\infty$, συνεπάγεται $\int_a^b f(x)\,dx < +\infty$.

Ας δούμε, τώρα, μερικά παραδείγματα συναρτήσεων οι οποίες χρησιμοποιούνται συχνότατα ως *συναρτήσεις σύγκρισης* εφαρμόζοντας είτε την Πρόταση 6.11 είτε, αργότερα, το Θεώρημα 6.3.

Παραδείγματα:
1. Έστω $g(x) = \frac{1}{x^p}$ $(a \le x < +\infty)$, όπου $a > 0$ και $p \in \mathbf{R}$.
Τότε $\int_a^c \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \log c - \log a\,, & p = 1, \\ \frac{c^{1-p} - a^{1-p}}{1-p}\,, & p \ne 1 \end{cases}$ και, επομένως,

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} +\infty, & p \le 1, \\ \frac{a^{1-p}}{p-1}\,, & 1 < p\,. \end{cases}$$

2. Έστω $g(x) = \frac{1}{x^p}$ $(0 < x \le a)$, όπου $a > 0$ και $p \in \mathbf{R}$.
Τότε $\int_c^a \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \log a - \log c\,, & p = 1, \\ \frac{a^{1-p} - c^{1-p}}{1-p}\,, & p \ne 1. \end{cases}$ Άρα,

$$\int_0^a \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} +\infty, & 1 \le p\,, \\ \frac{a^{1-p}}{1-p}\,, & p < 1. \end{cases}$$

3. Έστω $g(x) = x^r e^{-Ax^b}$ $(a \le x < +\infty)$, όπου $a > 0$, $r \in \mathbf{R}$, $A > 0$ και $b > 0$.
Διαλέγουμε $m \in \mathbf{N}$, ώστε $m > \frac{r+1}{b}$. Για κάθε $x \ge 0$ έχουμε $e^x \ge \frac{x^m}{m!}$ και, αντικαθιστώντας το x με το Ax^b, $e^{Ax^b} \ge \frac{A^m}{m!} x^{bm}$. Άρα, $g(x) = x^r e^{-Ax^b} \le \frac{m!}{A^m} \frac{1}{x^{bm-r}}$ για κάθε $x > 0$. Επειδή $bm - r > 1$, το $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^{bm-r}}\,dx$ συγκλίνει. Το $\int_a^{+\infty} x^r e^{-Ax^b}\,dx$ υπάρχει, επειδή είναι γενικευμένο ολοκλήρωμα μη αρνητικής συνάρτησης. Σύμφωνα με την Πρόταση 6.11, το $\int_a^{+\infty} x^r e^{-Ax^b}\,dx$ συγκλίνει σε μη αρνητικό πραγματικό αριθμό:

$$0 \le \int_a^{+\infty} x^r e^{-Ax^b}\,dx < +\infty\,.$$

Άσκηση 11: Αποδείξτε ότι $\int_1^{+\infty} \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)dx \le 1$. (Υπόδειξη: $|\sin t| \le |t|$.)

Άσκηση 12: Αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx \le 2$. (Υπόδειξη: $\sin x \le x$ για $0 \le x \le 1$ και $|\sin x| \le 1$ για $x \ge 1$.)

Άσκηση 13: Αποδείξτε ότι το $\int_0^1 x^p (1-x)^q\,dx$ συγκλίνει αν και μόνον αν $p > -1$ και $q > -1$.

Άσκηση 14: Αποδείξτε ότι το $\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^q}\,dx$ συγκλίνει αν και μόνον αν $0 < p+1 < q$.

Άσκηση 15: Αποδείξτε ότι τα $\int_0^{+\infty} e^{-(x+x^{-1})}\,dx$ και $\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$ συγκλίνουν.

Άσκηση 16: Αποδείξτε ότι το $\int_0^{+\infty} x^x e^{-x^p}\,dx$ συγκλίνει αν και μόνον αν $p > 0$.

Άσκηση 17: Αποδείξτε ότι το $\int_2^{+\infty} x^p \log^q x\,dt$ συγκλίνει αν και μόνον αν $p < -1$ ή $p = -1$ και $q < -1$. (Υπόδειξη: Αλλαγή μεταβλητής $x = e^X$.)

Άσκηση 18: Αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^8 \sin^2 x}\,dx < +\infty$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^4\sin^2 x}\,dx < +\infty$, $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^8\sin^2 x}\,dx = +\infty$ και $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2\sin^2 x}\,dx = +\infty$.

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι, ουσιαστικά, το ίδιο με το αποτέλεσμα της Πρότασης 1.9, αφού το $\lim_{x\to+\infty}\int_1^x f(t)\,dt$ που εμφανίζεται στην Πρόταση 1.9 το συμβολίζουμε τώρα $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

Πρόταση 6.12 ***Ολοκληρωτικό κριτήριο σύγκλισης σειράς.*** *Υποθέτουμε ότι η $f : [1,+\infty) \to \mathbf{R}$ είναι φθίνουσα προς το 0. Δηλαδή,*
(i) $f(x_1) \geq f(x_2)$ για κάθε x_1, x_2 με $1 \leq x_1 < x_2 < +\infty$ και
(ii) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Το συμπέρασμα είναι:
1. αν το $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει, η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$ συγκλίνει και
2. αν $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$, τότε $\sum_{k=1}^{+\infty} f(k) = +\infty$.
Επίσης, σε κάθε περίπτωση

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{+\infty} f(k) \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx\,.$$

Απόδειξη: Κατ' αρχήν, επειδή η f είναι μονότονη, είναι Riemann ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a,b] \subseteq [1,+\infty)$.

Αφού η f είναι φθίνουσα, $f(m+1) \leq \int_m^{m+1} f(x)\,dx \leq f(m)$ για κάθε $m \in \mathbf{N}$. Προσθέτοντας τις αριστερές ανισότητες για $m = 1,\ldots,n-1$ παίρνουμε $f(2) + \cdots + f(n) \leq \int_1^n f(x)\,dx$. Προσθέτοντας τις δεξιές ανισότητες για $m = 1,\ldots,n$ παίρνουμε $\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq f(1) + \cdots + f(n)$. Άρα

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq f(1) + \cdots + f(n) \leq f(1) + \int_1^n f(x)\,dx\,.$$

Από αυτές τις ανισότητες είναι φανερό ότι τα μερικά αθροίσματα $f(1) + \cdots + f(n)$ είναι άνω φραγμένα αν και μόνον αν το $\int_1^c f(x)\,dx$ είναι άνω φραγμένο ως συνάρτηση του c. Άρα, σύμφωνα με τα Θεωρήματα 1.2 και 6.2, το $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει αν και μόνον αν η σειρά $\int_{k=1}^{+\infty} f(k)$ συγκλίνει.

Επιπλέον, από την ίδια σχέση, παίρνοντας όριο καθώς $n \to +\infty$, βρίσκουμε $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{+\infty} f(k) \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$. Ο.Ε.Δ.

Παρατήρηση: Η Πρόταση 6.12 χρησιμοποιείται περισσότερο για να εξετασθεί η σύγκλιση μίας σειράς παρά η σύγκλιση ενός γενικευμένου ολοκληρώματος. Αυτό συμβαίνει διότι, συνήθως, είναι πιο δύσκολος ο χειρισμός σειρών και πιο εύκολος ο χειρισμός ολοκληρωμάτων.

Παράδειγμα:
Θυμόμαστε το παράδειγμα της αρμονικής σειράς $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}$. Είναι εύκολο να αποδειχθεί η απόκλιση του αντίστοιχου ολοκληρώματος $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx$. Πράγματι: $\lim_{c\to+\infty}\int_1^c\frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\log c = +\infty$. Παρατηρήστε ότι είναι πολύ εύκολος ο υπολογισμός του $\int_1^c\frac{1}{x}\,dx$ ενώ ο υπολογισμός του αντίστοιχου $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ είναι αδύνατος. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την δυσκολία εύρεσης του ορίου $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

6.3 Απόλυτη σύγκλιση.

Ορισμός 6.2 *Έστω ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,c]$ για κάθε $c\in[a,b)$. Λέμε ότι το $\int_a^b f(x)\,dx$ **συγκλίνει απολύτως**, αν το $\int_a^b|f(x)|\,dx$ συγκλίνει. Λέμε ότι το $\int_a^b f(x)\,dx$ **συγκλίνει υπό συνθήκη**, αν το $\int_a^b f(x)\,dx$ συγκλίνει αλλά δε συγκλίνει απολύτως.*

Πρόταση 6.13 *Έστω ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,c]$ για κάθε $c\in[a,b)$. Αν το $\int_a^b f(x)\,dx$ συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει. Επίσης,*

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big| \le \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το κριτήριο Cauchy. Έστω $\epsilon>0$. Αφού το $\int_a^b|f(x)|\,dx$ συγκλίνει, υπάρχει $c_0=c_0(\epsilon)$ με $a\le c_0<b$ ώστε: $c_0\le c_1<c_2<b \Rightarrow \int_{c_1}^{c_2}|f(x)|\,dx<\epsilon \Rightarrow \big|\int_{c_1}^{c_2}f(x)\,dx\big|\le\int_{c_1}^{c_2}|f(x)|\,dx<\epsilon$. Άρα, σύμφωνα με το κριτήριο Cauchy, το $\int_a^b f(x)\,dx$ συγκλίνει.

Τέλος, επειδή για κάθε $c\in[a,b)$ ισχύει $\big|\int_a^c f(x)\,dx\big|\le\int_a^c|f(x)|\,dx$, παίρνοντας όρια καθώς $c\to b-$, καταλήγουμε στην $\big|\int_a^b f(x)\,dx\big|\le\int_a^b|f(x)|\,dx$. Ο.Ε.Δ.

Παρατηρήσεις: 1. Ο ρόλος της Πρότασης 6.13 είναι ότι εξασφαλίζει την ύπαρξη του $\int_a^b f(x)\,dx$ στην περίπτωση που $\int_a^b|f(x)|\,dx<+\infty$.
2. *Αν γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι το $\int_a^b f(x)\,dx$ υπάρχει*, η ανισότητα $\big|\int_a^b f(x)\,dx\big|\le\int_a^b|f(x)|\,dx$ ισχύει αυτομάτως. Πράγματι, αν $\int_a^b|f(x)|\,dx<+\infty$, η ανισότητα είναι αποτέλεσμα της Πρότασης 6.13. Αν $\int_a^b|f(x)|\,dx=+\infty$, η αριστερή πλευρά της ανισότητας είναι στοιχείο του $[0,+\infty]$, διότι το $\int_a^b f(x)\,dx$ είναι στοιχείο του $\mathbf{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, και η ανισότητα ισχύει κατά προφανή τρόπο διότι η δεξιά πλευρά είναι $+\infty$.

Παραδείγματα:
1. Το $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ συγκλίνει απολύτως.

Έχουμε ότι $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x \geq 1$. Από την Πρόταση 6.11 συνεπάγεται $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$. Άρα, το $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx$ συγκλίνει.

2. Το $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ συγκλίνει υπό συνθήκην.

Για κάθε $c \geq \pi$, ολοκληρώνοντας κατά μέρη, $\int_\pi^c \frac{\sin x}{x}\,dx = -\int_\pi^c \frac{1}{x}(\cos x)'\,dx = \frac{\cos\pi}{\pi} - \frac{\cos c}{c} - \int_\pi^c \frac{\cos x}{x^2}\,dx$. Προφανώς, $\lim_{c\to+\infty} \frac{\cos c}{c} = 0$. Το $\lim_{c\to+\infty} \int_\pi^c \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ υπάρχει στο $\mathbf{R}$, σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα. Άρα, υπάρχει και το $\lim_{c\to+\infty} \int_\pi^c \frac{\sin x}{x}\,dx$ στο $\mathbf{R}$ και, επομένως, το $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ συγκλίνει. Απομένει, τώρα, να αποδείξουμε ότι $\int_\pi^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = +\infty$.

Έχουμε $\int_\pi^{n\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^\pi \frac{|\sin(x+k\pi)|}{x+k\pi}\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x+k\pi}\,dx = \int_0^\pi \sin x\big(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{x+k\pi}\big)\,dx \geq \int_0^\pi \sin x\big(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\pi+k\pi}\big)\,dx = \frac{1}{\pi}\big(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\big)\int_0^\pi \sin x\,dx = \frac{2}{\pi}\big(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\big) \to +\infty$. Άρα, το $\int_\pi^c \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ δεν είναι φραγμένο ως συνάρτηση του c και, επομένως, $\int_\pi^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = +\infty$.

Άσκηση 19: Έστω $f : [0,+\infty) \to \mathbf{R}$ με τύπο $f(t) = \frac{(-1)^n}{n}$ για $n-1 \leq t < n$ και για $n \in \mathbf{N}$. Αποδείξτε ότι το $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ συγκλίνει υπό συνθήκη.

Θεώρημα 6.3 ***Σύγκριση ολοκληρωμάτων, IV.*** *Έστω ότι οι f και g είναι Riemann ολοκληρώσιμες στο $[a,c]$ για κάθε $c \in [a,b)$, ότι $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b)$ και ότι υπάρχει $M \in \mathbf{R}$ ώστε $|f(x)| \leq Mg(x)$ για κάθε $x \in [a,b)$. Αν το $\int_a^b g(x)\,dx$ συγκλίνει, το $\int_a^b f(x)\,dx$ συγκλίνει απολύτως.*

Απόδειξη: Το $\int_a^b (Mg(x))\,dx$ συγκλίνει διότι $\int_a^b (Mg(x))\,dx = M\int_a^b g(x)\,dx < +\infty$. Από την Πρόταση 6.11 συνεπάγεται ότι το $\int_a^b |f(x)|\,dx$ συγκλίνει. Ο.Ε.Δ.

Παράδειγμα:
Το $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ συγκλίνει απολύτως, επειδή $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x \in [1,+\infty)$ και το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ συγκλίνει.

Άσκηση 20: Αποδείξτε ότι τα ολοκληρώματα $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$, $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\,dx$ και $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$ συγκλίνουν απολύτως.

Άσκηση 21: Αποδείξτε ότι, αν $p > 1$, το $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,dx$ συγκλίνει απολύτως ενώ, αν $0 < p \leq 1$, το ίδιο ολοκλήρωμα συγκλίνει υπό συνθήκη. (Υπόδειξη: Μιμηθείτε το παράδειγμα 2 πριν από το Θεώρημα 6.3 με $r = 1$.)

Άσκηση 22: Για $1 < x < +\infty$ ορίζουμε $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$. (Δείτε την άσκηση 14 στο κεφάλαιο 3 και την άσκηση 17 στο κεφάλαιο 1.)
1. Αποδείξτε ότι $\zeta(x) = x\int_1^{+\infty} \frac{[t]}{t^{x+1}}\,dt$ για κάθε $x > 1$. Επίσης, αποδείξτε ότι $\frac{1}{x-1} \leq x\int_1^{+\infty} \frac{[t]}{t^{x+1}}\,dt \leq \frac{x}{x-1}$ για κάθε $x > 1$, βρίσκοντας με δεύτερο τρόπο τις ανισότητες της άσκησης 17 στο κεφάλαιο 1.
2. Αποδείξτε ότι $\zeta(x) = \frac{x}{x-1} - x\int_1^{+\infty} \frac{t-[t]}{t^{x+1}}\,dt$ για κάθε $x > 1$. Αποδείξτε ότι το

ολοκλήρωμα συγκλίνει για κάθε $x > 0$. Επομένως, η συνάρτηση ζ επεκτείνεται, μέσω του τύπου αυτού, και στο διάστημα $(0, 1)$.

Άσκηση 23: Έστω ότι η $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και ότι $f(0) = 0$ και η $f'(0)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Αποδείξτε ότι το $\int_0^1 f(x)x^{-\frac{3}{2}}\,dx$ συγκλίνει απολύτως. (Υπόδειξη: $\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$. Άρα, η $\frac{f(x)}{x}$ ορίζεται στο $[0, 1]$ και είναι συνεχής στο $[0, 1]$. Άρα είναι φραγμένη. Συγκρίνατε με το $\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx$.)

Άσκηση 24: Βρείτε τις τιμές των p, q για τις οποίες τα παρακάτω ολοκληρώματα συγκλίνουν είτε απολύτως είτε υπό συνθήκη: $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{x-1}\,dx$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^p)}{x^q}\,dx$.

6.4 Σύγκλιση υπό συνθήκη.

Όλα τα αποτελέσματα στις δύο τελευταίες ενότητες και, φυσικά, το Θεώρημα 6.3 αποδεικνύουν (με τις κατάλληλες υποθέσεις) την *απόλυτη σύγκλιση* γενικευμένων ολοκληρωμάτων. Με άλλα λόγια, δεν είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν αυτά τα αποτελέσματα για να αποδειχθεί σύγκλιση υπό συνθήκη. Θα δούμε, τώρα, ένα σημαντικό αποτέλεσμα το οποίο (με τις κατάλληλες υποθέσεις) αποδεικνύει σύγκλιση ολοκληρωμάτων χωρίς να χρειάζεται αυτά να συγκλίνουν απολύτως.

Θεώρημα 6.4 *Έστω $f, g : [a, b) \to \mathbf{R}$ με τις εξής ιδιότητες:*
(i) η g έχει συνεχή παράγωγο στο $[a, b)$ και είναι φθίνουσα προς το 0, δηλαδή, $g'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [a, b)$ και $\lim_{x\to b-} g(x) = 0$,
(ii) η f είναι συνεχής στο $[a, b)$ και υπάρχει αριθμός M ώστε $\left|\int_a^c f(x)\,dx\right| \leq M$ για κάθε $c \in [a, b)$.
Τότε το $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ συγκλίνει.

Απόδειξη: Ορίζουμε $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ για κάθε $x \in [a, b)$, οπότε $|F(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a, b)$. Επειδή η f είναι συνεχής, συνεπάγεται $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, b)$.

Τώρα, $\int_a^c f(x)g(x)\,dx = \int_a^c F'(x)g(x)\,dx = F(c)g(c) - \int_a^c F(x)g'(x)\,dx$ για κάθε $c \in [a, b)$.

Το $\int_a^b F(x)g'(x)\,dx$ συγκλίνει απολύτως, αφού έχουμε $\int_a^b |F(x)g'(x)|\,dx \leq M\int_a^b |g'(x)|\,dx = -M\int_a^b g'(x)\,dx = Mg(a) < +\infty$. Η τελευταία ισότητα ισχύει διότι $\int_a^b g'(x)\,dx = \lim_{c\to b-} \int_a^c g'(x)\,dx = \lim_{c\to b-}(g(c)-g(a)) = -g(a)$. Άρα, το $\int_a^b F(x)g'(x)\,dx$ συγκλίνει, οπότε το $\lim_{c\to b-} \int_a^c F(x)g'(x)\,dx$ είναι πραγματικός αριθμός.

Επίσης, $|F(c)g(c)| \leq Mg(c)$ και, επομένως, $\lim_{c\to b-} F(c)g(c) = 0$.

Από την $\int_a^c f(x)g(x)\,dx = F(c)g(c) - \int_a^c F(x)g'(x)\,dx$ συνεπάγεται, λοιπόν, ότι το $\lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)g(x)\,dx$ είναι πραγματικός αριθμός, οπότε το $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ συγκλίνει.

Παράδειγμα:
Θα ξαναδούμε το $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 6.4.

Η συνάρτηση με τύπο $\frac{1}{x}$ είναι φθίνουσα και έχει συνεχή παράγωγο στο $[\pi, +\infty)$ και $\left|\int_\pi^c \sin x\, dx\right| = |\cos\pi - \cos c| \leq 2$ για κάθε $c \geq \pi$. Άρα, το ολοκλήρωμα συγκλίνει.

Άσκηση 25: Έστω $a > 0$. Αποδείξτε ότι τα $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\, dx$ και $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}\, dx$ συγκλίνουν για κάθε $p > 0$.

Άσκηση 26: Αποδείξτε ότι το $\int_1^{+\infty} \frac{x-[x]-\frac{1}{2}}{x^p}\, dx$ συγκλίνει για κάθε $p > 0$.

6.5 Ολοκληρώματα με παράμετρο.

Θεωρούμε ένα διάστημα $[a,b)$, όπου $a \in \mathbf{R}$ και $b \in \mathbf{R}$ ή $b = +\infty$ και ένα άλλο διάστημα I καθώς και μία συνάρτηση

$$f : [a,b) \times I \to \mathbf{R}\,.$$

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f ως προς τη μεταβλητή $x \in [a,b)$ ενώ το $t \in I$ θα παίζει το ρόλο μιας παραμέτρου:

$$\int_a^b f(x,t)\, dx\,, \qquad t \in I\,.$$

Αν για κάθε $t \in I$ το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει, ορίζεται μία συνάρτηση $g : I \to \mathbf{R}$ με τύπο

$$g(t) = \int_a^b f(x,t)\, dx\,, \qquad t \in I\,.$$

Σκοπεύουμε να δούμε υπό ποιες υποθέσεις η g είναι συνεχής ή παραγωγίσιμη στο διάστημα I.

Παραδείγματα:
1. $\int_0^{+\infty} e^{-tx}\, dx \quad (t \in \mathbf{R})$.

Για κάθε $c \geq 0$ έχουμε $\int_0^c e^{-tx}\, dx = \begin{cases} -\frac{e^{-ct}-1}{t}, & t \neq 0, \\ c, & t = 0 \end{cases}$ και, επομένως, $\int_0^{+\infty} e^{-tx}\, dx = \begin{cases} +\infty, & t \leq 0, \\ \frac{1}{t}, & 0 < t. \end{cases}$
Άρα, αν το t είναι στο διάστημα $I = (0,+\infty)$, τότε $g(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\, dx = \frac{1}{t}$. Παρατηρούμε ότι η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο I.
2. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x}\, dx \quad (t \in \mathbf{R})$.

Κατ' αρχήν, αν $t = 0$, το ολοκλήρωμα έχει την τιμή 0. Έστω, τώρα, ότι $t > 0$. Η συνάρτηση $\phi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ με τύπο $x = \phi(X) = \frac{X}{t}$ είναι γνησίως αύξουσα, επί του $[0,+\infty)$ και έχει συνεχή παράγωγο στο $[0,+\infty)$. Άρα, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin X}{\frac{X}{t}} \frac{1}{t}\, dX = \int_0^{+\infty} \frac{\sin X}{X}\, dX$. Έχουμε αποδείξει ότι το $\int_0^{+\infty} \frac{\sin X}{X}\, dX$ συγκλίνει και έστω A η τιμή του. Άρα, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x}\, dx =$

A για κάθε $t > 0$. Αν $t < 0$, τότε $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(-x|t|)}{x}\, dx = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x|t|)}{x}\, dx = -A$.

Άρα, $g(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x}\, dx = \begin{cases} A, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \\ -A, & t < 0. \end{cases}$

Θα δούμε ότι ο αριθμός A είναι θετικός, οπότε η g δεν είναι συνεχής στο 0 ενώ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Με ολοκλήρωση κατά μέρη, $A = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{(1-\cos x)'}{x}\, dx = \lim_{c \to +\infty} \frac{1-\cos c}{c} + \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx + \int_{\frac{7\pi}{4}}^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx \geq 0 + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx + 0 \geq \frac{12(2-\sqrt{2})}{7\pi} > 0$ διότι $1 - \cos x \geq 1 - \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ για κάθε $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$ και $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{24}{7\pi}$. Η τιμή του A είναι ίση με $\frac{\pi}{2}$ αλλά αυτό είναι δύσκολο να αποδειχθεί.

Ορισμός 6.3 *Λέμε ότι το $\int_a^b f(x,t)\, dx$* ***συγκλίνει στην*** *$g(t)$* ***κατά σημείο στο διάστημα*** *I, αν για κάθε $t \in I$ η τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος είναι $g(t)$, δηλαδή, $\int_a^b f(x,t)\, dx = g(t)$ ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $c_0 = c_0(\epsilon, t)$ στο $[a,b)$ ώστε:*

$$c_0 \leq c < b \quad \Rightarrow \quad \Big| g(t) - \int_a^c f(x,t)\, dx \Big| \leq \epsilon\,.$$

Ορισμός 6.4 *Λέμε ότι το $\int_a^b f(x,t)\, dx$* ***συγκλίνει στην*** *$g(t)$* ***ομοιόμορφα στο διάστημα*** *I, αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $c_0 = c_0(\epsilon)$ στο $[a,b)$ ώστε:*

$$c_0 \leq c < b \quad \Rightarrow \quad \Big| g(t) - \int_a^c f(x,t)\, dx \Big| \leq \epsilon \quad \text{για κάθε } t \in I\,.$$

Ο Ορισμός 6.4 διατυπώνεται με ισοδύναμο τρόπο ως εξής: το $\int_a^b f(x,t)\, dx$ συγκλίνει στην $g(t)$ ομοιόμορφα στο διάστημα I, αν

$$\lim_{c \to b-} \sup_{t \in I} \Big| g(t) - \int_a^c f(x,t)\, dx \Big| = 0\,.$$

Αυτό ισχύει διότι: $\big| g(t) - \int_a^c f(x,t)\, dx \big| \leq \epsilon$ για κάθε $t \in I \ \Leftrightarrow\ \sup_{t \in I} \big| g(t) - \int_a^c f(x,t)\, dx \big| \leq \epsilon$.

Παρατήρηση: Στον ορισμό της ομοιόμορφης σύγκλισης η επιλογή του c_0 εξαρτάται μόνον από το ϵ και όχι από το t. Στον ορισμό της κατά σημείο σύγκλισης αυτό δεν ισχύει, δηλαδή, για το ίδιο ϵ, αλλάζοντας το t, αλλάζει, πιθανόν, και η επιλογή του c_0.

Πρόταση 6.14 *Αν το $\int_a^b f(x,t)\, dx$ συγκλίνει στην $g(t)$ ομοιόμορφα στο διάστημα I, τότε συγκλίνει στην $g(t)$ και κατά σημείο στο I.*

Απόδειξη: Έστω τυχόν $t_0 \in I$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και, επειδή το $\int_a^b f(x,t)\, dx$ συγκλίνει στην $g(t)$ ομοιόμορφα στο διάστημα I, βρίσκουμε $c_0 \in$

$[a,b)$ ώστε: $c_0 \leq c < b \;\Rightarrow\; \left|g(t) - \int_a^c f(x,t)\,dx\right| < \epsilon$ για κάθε $t \in I$. Από αυτό συνεπάγεται: $c_0 \leq c < b \;\Rightarrow\; \left|g(t_0) - \int_a^c f(x,t_0)\,dx\right| < \epsilon$. Επειδή αυτό ισχύει για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$, έχουμε $g(t_0) = \int_a^b f(x,t_0)\,dx$. Τέλος, επειδή αυτό ισχύει για τυχόν $t_0 \in I$, συμπεραίνουμε ότι το $\int_a^b f(x,t)\,dx$ συγκλίνει στην $g(t)$ κατά σημείο στο I. Ο.Ε.Δ.

Παράδειγμα:
Έχουμε ήδη αποδείξει ότι το $\int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dx$ συγκλίνει στην $\frac{1}{t}$ κατά σημείο στο $(0,+\infty)$.

Θα δούμε, τώρα, ότι η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο $(0,+\infty)$. Πράγματι: $\left|\frac{1}{t} - \int_0^c e^{-tx}\,dx\right| < \epsilon \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{t}e^{-ct} < \epsilon \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{t}\log\left(\frac{1}{\epsilon t}\right) < c$. Άρα, η επιλογή του $c_0 = c_0(\epsilon,t)$ στο $[0,+\infty)$ είναι $c_0(\epsilon,t) = \begin{cases} \frac{1}{t}\log\left(\frac{1}{\epsilon t}\right), & \text{αν } \epsilon t \leq 1, \\ 0, & \text{αν } \epsilon t > 1. \end{cases}$ Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι, $\lim_{t\to 0+} c_0(\epsilon,t) = +\infty$, οπότε η επιλογή του c_0 δεν είναι δυνατόν να μην εξαρτάται από το $t \in (0,+\infty)$.

Από την άλλη μεριά, θεωρώντας οποιοδήποτε $a > 0$, θα αποδείξουμε ότι το $\int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dx$ συγκλίνει στην $\frac{1}{t}$ ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$. Κατ' αρχήν έχουμε ότι $\left|\frac{1}{t} - \int_0^c e^{-tx}\,dx\right| = \frac{1}{t}e^{-ct} \leq \frac{1}{a}e^{-ca}$ για κάθε $t \in [a,+\infty)$. Τώρα, για κάθε $\epsilon > 0$ επιλέγουμε $c_0 = c_0(\epsilon) = \begin{cases} \frac{1}{a}\log\left(\frac{1}{\epsilon a}\right), & \text{αν } \frac{1}{a}\log\left(\frac{1}{\epsilon a}\right) \geq a, \\ a, & \text{αν } \frac{1}{a}\log\left(\frac{1}{\epsilon a}\right) < a. \end{cases}$ Με την επιλογή αυτή του c_0 έχουμε: $c_0 < c < +\infty \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{t} - \int_0^c e^{-tx}\,dx\right| \leq \frac{1}{a}e^{-ca} < \epsilon$ για κάθε $t \in [a,+\infty)$. Επειδή το c_0 δεν εξαρτάται από το $t \in [a,+\infty)$, συνεπάγεται η ομοιόμορφη σύγκλιση στο $[a,+\infty)$.

Η ίδια απόδειξη μπορεί να γίνει πιο κομψά: $\sup_{t\in[a,+\infty)} \left|\frac{1}{t} - \int_0^c e^{-tx}\,dx\right| = \sup_{t\in[a,+\infty)} \frac{1}{t}e^{-ct} = \frac{1}{a}e^{-ca} \to 0$ καθώς $c \to +\infty$.

Όμως, αν αντί για το διάστημα $[a,+\infty)$ θεωρήσουμε το $(0,+\infty)$, τότε έχουμε: $\sup_{t\in(0,+\infty)} \left|\frac{1}{t} - \int_0^c e^{-tx}\,dx\right| = \sup_{t\in(0,+\infty)} \frac{1}{t}e^{-ct} = +\infty \not\to 0$ καθώς $c \to +\infty$.

Ας θεωρήσουμε μία ακολουθία (c_n) στο $[a,b)$ ώστε $c_n \to b$. Ορίζουμε για κάθε $n \in \mathbf{N}$ τη συνάρτηση $g_n : I \to \mathbf{R}$ με τύπο

$$g_n(t) = \int_a^{c_n} f(x,t)\,dx\,, \qquad t \in I\,.$$

Παρατηρούμε ότι, σύμφωνα με τους ορισμούς, αν το $\int_a^b f(x,t)\,dx$ συγκλίνει στην $g(t)$ κατά σημείο ή ομοιόμορφα στο I, τότε $g_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} g$ ή $g_n \xrightarrow{\text{ομ}} g$, αντιστοίχως, στο I. Αυτή η παρατήρηση θα μας βοηθήσει να μελετήσουμε τις ιδιότητες συνέχειας ή παραγωγισιμότητας της g, διότι θα μας επιτρέψει να χρησιμοποιήσουμε τα σχετικά αποτελέσματα για ακολουθίες συναρτήσεων. Θα χρειαστούμε τα ακόλουθα δύο Λήμματα.

Λήμμα 6.2 *Έστω $a, c \in \mathbf{R}$ με $a < c$, διάστημα I και $f : [a,c] \times I \to \mathbf{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $[a,c] \times I$, η συνάρτηση $g : I \to \mathbf{R}$ με τύπο $g(t) = \int_a^c f(x,t)\,dx$ ($t \in I$) είναι συνεχής στο I.*

Απόδειξη: Θεωρούμε τυχόν $t_0 \in I$ και παίρνουμε κλειστό και φραγμένο διάστημα (όχι μονοσύνολο) $J \subseteq I$ έτσι ώστε: αν το t_0 είναι δεξιό ή αριστερό άκρο του I, το t_0 να είναι, ομοίως, δεξιό ή αριστερό άκρο του J και, αν το t_0 είναι εσωτερικό σημείο του I, το t_0 να είναι, ομοίως, εσωτερικό σημείο του J. Επομένως, για να αποδείξουμε τη συνέχεια της g στο t_0 αρκεί να αποδείξουμε ότι ο περιορισμός της g στο J είναι συνεχής στο t_0.

Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $[a,c]\times J$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbf{R}^2$, αφού είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbf{R}^2$. Τώρα, η f είναι συνεχής στο $[a,c]\times J$, οπότε είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,c]\times J$. Έστω $\epsilon>0$, οπότε υπάρχει $\delta>0$ ώστε: $x_1,x_2\in[a,c]$, $t_1,t_2\in J$, $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(t_1-t_2)^2}<\delta \Rightarrow |f(x_1,t_1)-f(x_2,t_2)|<\frac{\epsilon}{c-a+1}$. Συνεπάγεται ότι: $x\in[a,c]$, $t\in J$, $|t-t_0|<\delta \Rightarrow |f(x,t)-f(x,t_0)|<\frac{\epsilon}{c-a+1}$. Επομένως: $t\in J$, $|t-t_0|<\delta \Rightarrow |g(t)-g(t_0)| = \big|\int_a^c(f(x,t)-f(x,t_0))\,dx\big| \leq \int_a^c|f(x,t)-f(x,t_0)|\,dx \leq \int_a^c\frac{\epsilon}{c-a+1}\,dx = \frac{(c-a)\epsilon}{c-a+1}<\epsilon$. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η g είναι συνεχής στο τυχόν $t_0\in I$.

Λήμμα 6.3 *Έστω $a,c\in\mathbf{R}$ με $a<c$, διάστημα I και $f:[a,c]\times I\to\mathbf{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο $[a,c]\times I$ και η f_t είναι, επίσης, συνεχής στο $[a,c]\times I$, όπου η f_t ορίζεται με τον τύπο $f_t(x,t)=\frac{d}{dt}f(x,t)$ $(x\in[a,c],t\in I)$. Τότε η $g(t)=\int_a^c f(x,t)\,dx$ είναι παραγωγίσιμη στο I και $g'(t)=\int_a^c f_t(x,t)\,dx$ για κάθε $t\in I$. Δηλαδή,*

$$\frac{d}{dt}\int_a^c f(x,t)\,dx=\int_a^c\frac{d}{dt}f(x,t)\,dx\,,\qquad (x,t)\in[a,b]\times I\,.$$

Απόδειξη: Θεωρούμε τυχόν $t_0\in I$ και, όπως στην απόδειξη του Λήμματος 6.2, θεωρούμε το κλειστό και φραγμένο διάστημα $J\subseteq I$ που περιέχει το t_0 και αρκεί να αποδείξουμε ότι ο περιορισμός της g στο J έχει παράγωγο στο t_0 με $g'(t_0)=\int_a^c f_t(x,t_0)\,dx$.

Επειδή το $[a,c]\times J$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbf{R}^2$ και η f_t είναι συνεχής στο $[a,c]\times J$, η f_t είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,c]\times J$. Έστω $\epsilon>0$, οπότε υπάρχει $\delta>0$ ώστε: $x_1,x_2\in[a,c]$, $t_1,t_2\in J$, $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(t_1-t_2)^2}<\delta \Rightarrow |f_t(x_1,t_1)-f_t(x_2,t_2)|<\frac{\epsilon}{c-a+1}$. Έστω, τώρα, $x\in[a,c]$ και $t\in J$ με $|t-t_0|<\delta$. Υπάρχει $t'=t'(x,t,t_0)$ ανάμεσα στα t και t_0 ώστε $\frac{f(x,t)-f(x,t_0)}{t-t_0}=f_t(x,t')$ και, επειδή $|t'-t_0|\leq|t-t_0|<\delta$, έχουμε $\big|\frac{f(x,t)-f(x,t_0)}{t-t_0}-f_t(x,t_0)\big|=|f_t(x,t')-f_t(x,t_0)|<\frac{\epsilon}{c-a+1}$. Άρα: $t\in J$, $|t-t_0|<\delta \Rightarrow \Big|\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}-\int_a^c f_t(x,t_0)\,dx\Big| = \Big|\int_a^c\big(\frac{f(x,t)-f(x,t_0)}{t-t_0}-f_t(x,t_0)\big)\,dx\Big| \leq \int_a^c\big|\frac{f(x,t)-f(x,t_0)}{t-t_0}-f_t(x,t_0)\big|\,dx \leq \frac{\epsilon(c-a)}{c-a+1}<\epsilon$. Από αυτό συνεπάγεται ότι $g'(t_0)=\int_a^c f_t(x,t_0)\,dx$.

Παρατήρηση: Το νόημα του τελευταίου λήμματος είναι ότι, με τις κατάλληλες προϋποθέσεις, η παράγωγος έξω από το ολοκλήρωμα *περνάει μέσα στο ολοκλήρωμα*.

Τα λήμματα 6.2 και 6.3 αναφέρονται σε συνηθισμένο ολοκλήρωμα Riemann σε κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a,c]$. Μένει να πάρουμε όριο καθώς $c\to b-$ για να αποδείξουμε ανάλογα αποτελέσματα για γενικευμένα ολοκληρώματα σε διάστημα $[a,b)$.

Θεώρημα 6.5 *Έστω $a \in \mathbf{R}$ και $a < b \leq +\infty$, διάστημα I και $f : [a, b) \times I \to \mathbf{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b) \times I$ και το $\int_a^b f(x, t)\, dx$ συγκλίνει στην $g(t)$ ομοιόμορφα στο I, η $g : I \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής στο I.*

Απόδειξη: Παίρνουμε οποιαδήποτε ακολουθία (c_n) στο $[a, b)$ ώστε $c_n \to b$. Κατόπιν, ορίζουμε τις συναρτήσεις $g_n : I \to \mathbf{R}$ με τύπους $g_n(t) = \int_a^{c_n} f(x, t) dx$ $(t \in I)$. Επειδή το $\int_a^b f(x, t)\, dx$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $g(t)$ στο I, συνεπάγεται ότι $g_n \xrightarrow{\text{ομ}} g$ στο I. Όμως, η f είναι συνεχής στο $[a, c_n] \times I$, αφού αυτό είναι υποσύνολο του $[a, b) \times I$, οπότε, σύμφωνα με το Λήμμα 6.2, κάθε g_n είναι συνεχής στο I. Άρα, λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης, η g είναι συνεχής στο I. Ο.Ε.Δ.

Άσκηση 27: Στην άσκηση 22 αποδείξτε ότι το ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{[t]}{t^{x+1}}\, dt$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[A, B]$, όπου $1 < A \leq B < +\infty$. Επίσης, αποδείξτε ότι το $\int_1^{+\infty} \frac{t-[t]}{t^{x+1}}\, dt$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[A, B]$, όπου $0 < A \leq B < +\infty$. Αποδείξτε τη συνέχεια της ζ στο $(1, +\infty)$ καθώς και τη συνέχεια της συνάρτησης με τύπο $(x-1)\zeta(x)$ στο $(0, +\infty)$.

Θεώρημα 6.6 *Έστω $a \in \mathbf{R}$ και $a < b \leq +\infty$, κλειστό και φραγμένο διάστημα I και $f : [a, b) \times I \to \mathbf{R}$. Υποθέτουμε ότι οι f και f_t είναι συνεχείς στο $[a, b) \times I$ και ότι*
(i) το $\int_a^b f_t(x, t)\, dx$ συγκλίνει σε μία συνάρτηση $h(t)$ ομοιόμορφα στο I και
(ii) το $\int_a^b f(x, t_0)\, dx$ συγκλίνει για τουλάχιστον ένα $t_0 \in I$.
Τότε το $\int_a^b f(x, t)\, dx$ συγκλίνει σε μία συνάρτηση $g(t)$ ομοιόμορφα στο I και η g είναι παραγωγίσιμη στο I και $g'(t) = h(t)$ για κάθε $t \in I$. Δηλαδή,

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t)\, dx = \int_a^b \frac{d}{dt} f(x, t)\, dx\,, \qquad t \in I\,.$$

Απόδειξη: Παίρνουμε οποιαδήποτε ακολουθία (c_n) στο $[a, b)$ ώστε $c_n \to b$ και ορίζουμε τις συναρτήσεις $g_n : I \to \mathbf{R}$ με τύπους $g_n(t) = \int_a^{c_n} f(x, t)\, dx$ $(t \in I)$. Σύμφωνα με το Λήμμα 6.3, $g_n'(t) = \int_a^{c_n} f_t(x, t)\, dx$ για κάθε $t \in I$. Λόγω της υπόθεσης (i), έχουμε $g_n' \xrightarrow{\text{ομ}} h$ στο I. Επίσης, λόγω της υπόθεσης (ii), η $(g_n(t_0))$ συγκλίνει. Από το Θεώρημα 2.4 συνεπάγεται ότι η (g_n) συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση g ομοιόμορφα στο I, ότι $g(t_0) = \lim_{n\to+\infty} g_n(t_0) = \lim_{n\to+\infty} \int_a^{c_n} f(x, t_0)\, dx = \int_a^b f(x, t_0)\, dx$, ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο I και ότι $g'(t) = h(t)$ για κάθε $t \in I$.

Προκύπτει, τώρα, το ερώτημα κατά πόσον η οριακή συνάρτηση g εξαρτάται από τη συγκεκριμένη ακολουθία (c_n) με την οποία ξεκινάμε. Ας θεωρήσουμε μία δεύτερη ακολουθία (c_n') στο $[a, b)$ ώστε $c_n' \to b$ και ας πάρουμε τη μικτή ακολουθία $c_1, c_1', c_2, c_2', \ldots$ η οποία έχει, επίσης, όριο b. Με την ίδια διαδικασία, συνεπάγεται ότι η $\int_a^{c_1} f(x, t)\, dx$, $\int_a^{c_1'} f(x, t)\, dx$, $\int_a^{c_2} f(x, t)\, dx$, $\int_a^{c_2'} f(x, t)\, dx, \ldots$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση, η οποία είναι, αναγκαστικά, η $g(t)$ λόγω της υποακολουθίας των όρων περιττής τάξης. Άρα, και η υποακολουθία των όρων άρτιας τάξης συγκλίνει στην $g(t)$.

Έχουμε, λοιπόν, αποδείξει ότι υπάρχει κάποια $g : I \to \mathbf{R}$ ώστε για κάθε $t \in I$ και για κάθε (c_n) στο $[a, b)$ με $c_n \to b$ να ισχύει $\int_a^{c_n} f(x,t)\,dx \to g(t)$. Αυτό συνεπάγεται ότι $\lim_{c\to b-} \int_a^c f(x,t)\,dx = g(t)$ για κάθε $t \in I$ ή, ισοδύναμα, ότι $\int_a^b f(x,t)\,dx = g(t)$ για κάθε $t \in I$. Τώρα, η σχέση $g'(t) = h(t)$ για κάθε $t \in I$ γράφεται $\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)\,dx = g'(t) = h(t) = \int_a^b \frac{d}{dt} f(x,t)\,dx$ για κάθε $t \in I$.

Απομένει να αποδείξουμε ότι το $\int_a^b f(x,t)\,dx$ συγκλίνει στην $g(t)$ *ομοιόμορφα* στο I. Έστω ότι αυτό δεν ισχύει, οπότε υπάρχει $\epsilon_0 > 0$ ώστε για κάθε $c_0 \in [a, b)$ υπάρχουν c με $c_0 \le c < b$ και $t \in I$ ώστε $\left|\int_a^c f(x,t)\,dx - g(t)\right| \ge \epsilon_0$. Επομένως, για κάθε $n \in \mathbf{N}$ υπάρχουν c_n με $b - \frac{1}{n} \le c_n < b$, αν $b < +\infty$, ή $n < c_n$, αν $b = +\infty$, και $t_n \in I$ ώστε $\left|\int_a^{c_n} f(x,t_n)\,dx - g(t_n)\right| \ge \epsilon_0$. Συνεπώς, $\sup_{t\in I}\left|\int_a^{c_n} f(x,t)\,dx - g(t)\right| \ge \left|\int_a^{c_n} f(x,t_n)\,dx - g(t_n)\right| \ge \epsilon_0$. Αυτό συνεπάγεται ότι οι συναρτήσεις $\int_a^{c_n} f(x,t)\,dx$ $(t \in I)$ *δεν* συγκλίνουν στην $g(t)$ ομοιόμορφα στο I. Επειδή $c_n \to b$, το τελευταίο είναι άτοπο, οπότε το $\int_a^b f(x,t)\,dx$ συγκλίνει στην $g(t)$ ομοιόμορφα στο I. Ο.Ε.Δ.

Είναι σαφές ότι για την εφαρμογή των Θεωρημάτων 6.5 και 6.6 χρειαζόμαστε ένα κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης γενικευμένων ολοκληρωμάτων. Θα δούμε, τώρα, ένα πολύ σημαντικό κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης γενικευμένων ολοκληρωμάτων, το οποίο μοιάζει πολύ με το κριτήριο Weierstrass για ομοιόμορφη σύγκλιση σειρών συναρτήσεων.

Θεώρημα 6.7 *Έστω* $f : [a, b) \times I$ *και* $F : [a, b) \to \mathbf{R}$ *ώστε*

$$|f(x,t)| \le F(x)\,, \qquad x \in [a, b), t \in I\,.$$

Αν το $\int_a^b F(x)\,dx$ *συγκλίνει, τότε το* $\int_a^b f(x,t)\,dx$ *συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση στο* I.

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 6.3 συμπεραίνουμε ότι το $\int_a^b f(x,t)\,dx$ συγκλίνει για κάθε $t \in I$. Ορίζεται, επομένως η συνάρτηση $g : I \to \mathbf{R}$ με τύπο

$$g(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx\,, \qquad t \in I\,.$$

Μένει να δούμε αν το $\int_a^b f(x,t)\,dx$ συγκλίνει στην $g(t)$ *ομοιόμορφα* στο I. Αφού το $\int_a^b F(x)\,dx$ συγκλίνει, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $c_0 = c_0(\epsilon)$ στο $[a, b)$ ώστε: $c_0 \le c < b \;\Rightarrow\; 0 \le \int_c^b F(x)\,dx < \epsilon$. Άρα: $c_0 \le c < b \;\Rightarrow\; \left|g(t) - \int_a^c f(x,t)\,dx\right| = \left|\int_a^b f(x,t)\,dx - \int_a^c f(x,t)\,dx\right| = \left|\int_c^b f(x,t)\,dx\right| \le \int_c^b |f(x,t)|\,dx \le \int_c^b F(x)\,dx < \epsilon$ για κάθε $t \in I$. Ο.Ε.Δ.

Παράδειγμα:
Θα μελετήσουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin(tx)\,dx$.

Παρατηρούμε ότι $|e^{-x}\sin(tx)| \le e^{-x}$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ και για κάθε $t \in \mathbf{R}$. Το $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ συγκλίνει, οπότε, σύμφωνα το Θεώρημα 6.7, το $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin(tx)\,dx$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $g(t)$ ομοιόμορφα στο $\mathbf{R}$. Η συνάρτηση $e^{-x}\sin(tx)$ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)\times\mathbf{R}$. Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα 6.5, η g είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$.

Υπολογίζουμε $\frac{d}{dt}(e^{-x}\sin(tx)) = xe^{-x}\cos(tx)$ και η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής στο $[0,+\infty)\times\mathbf{R}$. Επίσης, $|xe^{-x}\cos(tx)|\le xe^{-x}$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$ και κάθε $t\in\mathbf{R}$ και το $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$ συγκλίνει.

Θα αποδείξουμε, τώρα, ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και οτι $g'(t) = \int_0^{+\infty} xe^{-x}\cos(tx)\,dx$ για κάθε $t\in\mathbf{R}$. Το Θεώρημα 6.6 απαιτεί το I να είναι κλειστό και φραγμένο διάστημα. Η απαίτηση αυτή, αν και απαγορεύει την εφαρμογή του Θεωρήματος 6.6 με το διάστημα $I=\mathbf{R}$, δεν αποτελεί ουσιαστικό πρόβλημα. Πράγματι, διαλέγουμε τυχόν t_0 στο $\mathbf{R}$ και μετά διαλέγουμε οποιοδήποτε κλειστό φραγμένο διάστημα I το οποίο περιέχει το t_0 ως εσωτερικό του σημείο. Αφού το $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$ συγκλίνει, το $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\cos(tx)\,dx$ συγκλίνει σε μία συνάρτηση $h(t)$ ομοιόμορφα στο I. Έχουμε, επίσης, ήδη αποδείξει ότι το $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin(tx)\,dx$ συγκλίνει στην $g(t)$ στο I. Άρα, από το Θεώρημα 6.6, $g'(t) = h(t) = \int_0^{+\infty} xe^{-x}\cos(tx)\,dx$ για κάθε $t\in I$. Άρα, $g'(t_0) = \int_0^{+\infty} xe^{-x}\cos(xt_0)\,dx$, αφού το t_0 είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος I. Το t_0 ήταν αυθαίρετα επιλεγμένο από το $\mathbf{R}$, οπότε

$$\frac{d}{dt}\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin(tx)\,dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x}\cos(tx)\,dx\,, \qquad x\in\mathbf{R}\,.$$

Άσκηση 28: Έστω $f(t) = \big(\int_0^t e^{-x^2}\,dx\big)^2$ και $g(t) = \int_0^1 \frac{e^{-t^2(x^2+1)}}{x^2+1}\,dx$.
1. Αποδείξτε ότι $f'(t)+g'(t)=0$ για κάθε t και ότι $f(t)+g(t)=\frac{\pi}{4}$ για κάθε t. (Υπόδειξη: Υπολογίστε το $g(0)$. Εφαρμόστε στην g το Λήμμα 6.3.)
2. Χρησιμοποιώντας το 1, αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. (Υπόδειξη: $0\le g(t)\le \int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}e^{-t^2}\to 0$ καθώς $t\to+\infty$.)

Άσκηση 29: Έστω $F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(2tx)\,dx$ για κάθε $t\in\mathbf{R}$. Αποδείξτε ότι $F'(t)+2tF(t)=0$ για κάθε t. Κατόπιν, αποδείξτε ότι $F(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-t^2}$ για κάθε t. (Υπόδειξη: $F'(t)+2tF(t)=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(e^{t^2}F(t))=0 \Rightarrow e^{t^2}F(t) =$σταθερός αριθμός. Θέσατε $t=0$ και χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της άσκησης 28.)

Άσκηση 30: Έστω $F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx$ για κάθε $t\in(0,+\infty)$. Αποδείξτε ότι $F'(t) = -\frac{1}{1+t^2}$ για κάθε $t\in(0,+\infty)$. Από εδώ προκύπτει ότι $F(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan t$ για κάθε $t\in(0,+\infty)$. Μετά αποδείξτε ότι

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{t\to 0+}\int_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{t\to 0+}\Big(\frac{\pi}{2}-\arctan t\Big) = \frac{\pi}{2}\,.$$

(Υπόδειξη: Για το $F'(t)$ εφαρμόστε το Θεώρημα 6.6 και υπολογίστε το ολοκλήρωμα που προκύπτει με διπλή ολοκλήρωση κατά μέρη. Κατόπιν: $F(t)-F(a) = \int_a^t \frac{1}{1+x^2}\,dx = -\arctan t + \arctan a$. Αποδείξτε ότι $\lim_{a\to+\infty}F(a)=0$, χρησιμοποιώντας το ότι $\big|\int_0^{+\infty} e^{-xa}\frac{\sin x}{x}\,dx\big| \le \int_0^{+\infty} e^{-xa}\,dx\to 0$ καθώς $a\to+\infty$. Για το $\lim_{t\to 0+}\int_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx$ εφαρμόστε κριτήριο Cauchy και $-\sin x = \frac{d}{dx}\cos x$

για ολοκληρώση κατά μέρη για να αποδείξετε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$. Αφού κάθε $F_n(t) = \int_0^n e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx$ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, θα είναι και η $F(t)$.)

6.6 Η συνάρτηση Γ.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\times(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ με τύπο

$$f(x,t) = x^{t-1}e^{-x} \qquad 0<x<+\infty\,,\ 0<t<+\infty\,.$$

και σχηματίζουμε το αντίστοιχο γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}\,dx\,.$$

Πρόταση 6.15 *Τα* $\int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}\,dx$ *και* $\int_0^{+\infty} x^{t-1}(\log x)^n e^{-x}\,dx$ $(n\in\mathbf{N})$ *συγκλίνουν για κάθε* $t>0$*. Επί πλέον, τα γενικευμένα αυτά ολοκληρώματα συγκλίνουν σε αντίστοιχες συναρτήσεις ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα* I *της μορφής* $I=[A,B]$*, όπου* $0<A\le B<+\infty$*.*

Απόδειξη: Το πρώτο ολοκλήρωμα μπορεί να θεωρηθεί ως ειδική περίπτωση του δευτέρου με $n=0$. Το $\int_0^{+\infty} x^{t-1}(\log x)^n e^{-x}\,dx$ χωρίζεται σε δύο γενικευμένα ολοκληρώματα

$$\int_0^{1} x^{t-1}(\log x)^n e^{-x}\,dx\,, \qquad \int_1^{+\infty} x^{t-1}(\log x)^n e^{-x}\,dx\,.$$

Θεωρούμε A,B ώστε $0<A\le B<+\infty$ και $t\in[A,B]$. Αν $x\ge 1$, τότε $|x^{t-1}(\log x)^n e^{-x}| \le x^{n+t-1}e^{-x} \le x^{n+B-1}e^{-x}$. Επειδή το $\int_1^{+\infty} x^{n+B-1}e^{-x}\,dx$ συγκλίνει, το $\int_1^{+\infty} x^{t-1}(\log x)^n e^{-x}\,dx$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[A,B]$. Άν $0<x\le 1$, τότε $|x^{t-1}(\log x)^n e^{-x}| \le x^{A-1}|\log x|^n$. Αφού το $\int_0^1 x^{A-1}|\log x|^n\,dx$ συγκλίνει (γιατί;), το $\int_0^1 x^{t-1}(\log x)^n e^{-x}\,dx$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[A,B]$. Άρα, το $\int_0^{+\infty} x^{t-1}(\log x)^n e^{-x}\,dx$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[A,B]$.

Για να αποδείξουμε, τώρα, ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει για κάθε $t>0$, εφαρμόζουμε τη γνωστή διαδικασία. Δηλαδή, παίρνουμε τυχόν $t>0$ και, κατόπιν, διαλέγουμε διάστημα $[A,B]$ ώστε $0<A<t<B<+\infty$. Αφού έχουμε αποδείξει ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει (ομοιόμορφα) στο $[A,B]$, συμπεραίνουμε ότι συγκλίνει και στο t. Ο.Ε.Δ.

Ορισμός 6.5 *Η συνάρτηση που ορίζεται από το* $\int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}\,dx$ *συμβολίζεται* $\Gamma:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ *και ονομάζεται* ***συνάρτηση*** Γ. *Δηλαδή,*

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}\,dx\,, \qquad 0<t<+\infty\,.$$

Η συνάρτηση Γ είναι εξαιρετικά σημαντική για τη Μαθηματική Ανάλυση.

Θεώρημα 6.8 *Η συνάρτηση* Γ *είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο* $(0,+\infty)$ *και*

$$\Gamma^{(n)}(t)=\int_0^{+\infty} x^{t-1}(\log x)^n e^{-x}\,dx\,,\qquad 0<t<+\infty\,,\ n\in\mathbf{N}\,.$$

Απόδειξη: Έστω τυχόν $t\in(0,+\infty)$. Παίρνουμε $A,B\in\mathbf{R}$ ώστε $0<A<t<B<+\infty$ και παρατηρούμε ότι η $x^{t-1}e^{-x}$ και η $\frac{d}{dt}(x^{t-1}e^{-x})=x^{t-1}\log x\ e^{-x}$ είναι συνεχείς στο $(0,+\infty)\times[A,B]$ και η σύγκλιση των $\int_0^{+\infty}x^{t-1}e^{-x}\,dx$ και $\int_0^{+\infty}x^{t-1}\log x\ e^{-x}\,dx$ είναι ομοιόμορφη στο $[A,B]$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 6.6, έχουμε

$$\Gamma'(t)=\frac{d}{dt}\int_0^{+\infty}x^{t-1}e^{-x}\,dx=\int_0^{+\infty}x^{t-1}\log x\ e^{-x}\,dx\,.$$

Επαναλαμβάνουμε με τις συναρτήσεις $x^{t-1}\log x\ e^{-x}$ και $\frac{d}{dt}(x^{t-1}\log x\ e^{-x})=x^{t-1}(\log x)^2e^{-x}$, οι οποίες είναι συνεχείς στο $(0,+\infty)\times[A,B]$, και με τα ολοκληρώματα $\int_0^{+\infty}x^{t-1}\log x\ e^{-x}\,dx$ και $\int_0^{+\infty}x^{t-1}(\log x)^2e^{-x}\,dx$, τα οποία συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[A,B]$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 6.6,

$$\Gamma''(t)=\frac{d}{dt}\int_0^{+\infty}x^{t-1}\log x\ e^{-x}\,dx=\int_0^{+\infty}x^{t-1}(\log x)^2e^{-x}\,dx\,.$$

Η επαγωγική γενίκευση για παραγώγους ανώτερης τάξης είναι, τώρα, προφανής. Ο.Ε.Δ.

Θεώρημα 6.9 *Η συνάρτηση* Γ *έχει τις παρακάτω ιδιότητες:*
1. $\Gamma(t)>0$ *για κάθε* $t\in(0,+\infty)$.
2. $\lim_{t\to+\infty}\Gamma(t)=+\infty$ *και* $\lim_{t\to0+}\Gamma(t)=+\infty$.
3. $\Gamma(t+1)=t\Gamma(t)$ *για κάθε* $t\in(0,+\infty)$.
4. $\Gamma(1)=1$ *και* $\Gamma(n)=(n-1)!$ *για κάθε* $n\in\mathbf{N}$.
5. Η Γ *είναι κυρτή συνάρτηση στο* $(0,+\infty)$.

Απόδειξη: 1. Αφού $x^{t-1}e^{-x}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, συνεπάγεται ότι $\Gamma(t)=\int_0^{+\infty}x^{t-1}e^{-x}\,dx\geq0$. Για τη γνήσια ανισότητα, παρατηρούμε ότι η τιμή της $x^{t-1}e^{-x}$ για $x=1$ είναι $\frac{1}{e}>0$, οπότε, λόγω συνέχειας, υπάρχουν a,b με $0<a<1<b<+\infty$ ώστε $x^{t-1}e^{-x}\geq\frac{1}{2e}$ για κάθε $x\in[a,b]$. Συνεπάγεται $\Gamma(t)=\int_0^{+\infty}x^{t-1}e^{-x}\,dx=\int_0^a x^{t-1}e^{-x}\,dx+\int_a^b x^{t-1}e^{-x}\,dx+\int_b^{+\infty}x^{t-1}e^{-x}\,dx\geq 0+\int_a^b\frac{1}{2e}\,dx+0=\frac{b-a}{2e}>0$.
2. $\Gamma(t)\geq\int_0^1x^{t-1}e^{-x}\,dx\geq e^{-1}\int_0^1x^{t-1}\,dx=\frac{1}{et}$. Άρα, $\Gamma(t)\to+\infty$ καθώς $t\to0+$. Επίσης, για κάθε $t\geq1$ ισχύει $\Gamma(t)\geq\int_2^{+\infty}x^{t-1}e^{-x}\,dx\geq 2^{t-1}\int_2^{+\infty}e^{-x}\,dx=2^{t-1}e^{-2}$. Άρα, $\Gamma(t)\to+\infty$ καθώς $t\to+\infty$.
3. Με ολοκλήρωση κατά μέρη, έχουμε για κάθε $t\in(0,+\infty)$ ότι $\Gamma(t+1)=\int_0^{+\infty}x^te^{-x}\,dx=-\int_0^{+\infty}x^t\frac{d}{dx}e^{-x}\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{d}{dx}x^te^{-x}\,dx=t\int_0^{+\infty}x^{t-1}e^{-x}\,dx=t\Gamma(t)$.
4. $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}\,dx=1$. Από την $\Gamma(t+1)=t\Gamma(t)$, με επαγωγή, συμπεραίνουμε ότι $\Gamma(2)=1\cdot\Gamma(1)=1$, $\Gamma(3)=2\Gamma(2)=2\cdot1=2!$, $\Gamma(4)=3\Gamma(3)=3\cdot2!=3!$

και, γενικώτερα, $\Gamma(n) = (n-1)!$.
5. Για κάθε $t \in (0, +\infty)$ έχουμε $\Gamma''(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1}(\log x)^2 e^{-x}\, dx \geq 0$. Ο.Ε.Δ.

Είναι χαρακτηριστική ιδιότητα της συνάρτησης Γ ότι είναι ορισμένη σε ολόκληρη την ημιευθεία $(0, +\infty)$ και στα διακριτά σημεία του $\mathbf{N}$ ταυτίζεται με τη συνάρτηση *παραγοντικό*.

Άσκηση 31: Χρησιμοποιώντας ότι $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ και κάνοντας κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής αποδείξτε ότι $\Gamma\big(\frac{1}{2}\big) = \sqrt{\pi}$. Αποδείξτε ότι

$$\Gamma\Big(n + \frac{1}{2}\Big) = (2n)! \frac{\sqrt{\pi}}{4^n n!}\,, \qquad n \in \mathbf{N}_0\,.$$

Άσκηση 32: Θυμηθείτε την συνάρτηση $\zeta : (1, +\infty) \to \mathbf{R}$ η οποία ορίσθηκε στην άσκηση 14 του κεφαλαίου 3 και την οποία ξαναείδαμε στην άσκηση 22 αυτού του κεφαλαίου. Σε όλα τα παρακάτω υποθέτουμε ότι $t > 1$.
1. Αποδείξτε ότι για κάθε $a > 0$ η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-kx} x^{t-1}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση $\frac{x^{t-1}}{e^x - 1}$ στο διάστημα $[a, +\infty)$. (Υπόδειξη: Αν $n \geq \frac{t-1}{a}$, η $x^{t-1}e^{-nx}$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του x στο $[a, +\infty)$. Άρα, αν $n \geq \frac{t-1}{a}$, ισχύει $\big|\sum_{k=1}^{n} e^{-kx} x^{t-1} - \frac{x^{t-1}}{e^x - 1}\big| = \frac{x^{t-1}e^{-nx}}{e^x - 1} \leq \frac{a^{t-1}e^{-na}}{e^a - 1}$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$. Επομένως, $\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in [a, +\infty)} \big|\sum_{k=1}^{n} e^{-kx} x^{t-1} - \frac{x^{t-1}}{e^x - 1}\big| = \lim_{n \to +\infty} \frac{a^{t-1}e^{-na}}{e^a - 1} = 0$.)
2. Αποδείξτε ότι για κάθε a, b με $0 < a < b < +\infty$ ισχύει $\int_a^b \frac{x^{t-1}}{e^x - 1}\, dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^b e^{-kx} x^{t-1}\, dx \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-kx} x^{t-1}\, dx\,.$
3. Αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty} \frac{x^{t-1}}{e^x - 1}\, dx \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-kx} x^{t-1}\, dx\,.$
4. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbf{N}$ ισχύει $\sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} e^{-kx} x^{t-1}\, dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{x^{t-1}}{e^x - 1}\, dx\,.$ (Υπόδειξη: $\sum_{k=1}^{n} e^{-kx} x^{t-1} \leq \frac{x^{t-1}}{e^x - 1}\,.$)
5. Αποδείξτε ότι $\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-kx} x^{t-1}\, dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{x^{t-1}}{e^x - 1}\, dx\,.$

Από τα 3 και 5 συνεπάγεται αμέσως ότι

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-kx} x^{t-1}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{t-1}}{e^x - 1}\, dx \qquad (t > 1).$$

7. Για κάθε $k \in \mathbf{N}$ αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty} e^{-kx} x^{t-1}\, dx = \frac{\Gamma(t)}{k^t}\,.$
8. Αποδείξτε ότι

$$\zeta(t)\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{t-1}}{e^x - 1}\, dx \qquad (t > 1).$$