ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

# Ο ΔΙΑΛΟΓΟΣ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΛΛΗΛΟΥΧΙΑ ΕΡΩΤΗΣΗ – ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΩΣ ΜΟΡΦΗ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ ΚΑΙ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

**ΑΘΗΝΑ 2006** **ΧΑΤΖΗΓΟΥΛΑ ΑΓΟΡΙΤΣΑ**

**Επιβλέπων: Αναπληρωτής Καθηγητής ΔΠΘ**

**Χαράλαμπος Σακονίδης**

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

**Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης**

που απονέμει το

**Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών**

**«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»**

Εγκρίθηκε την ………………………από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

| Ονοματεπώνυμο | Βαθμίδα | Υπογραφή |
| --- | --- | --- |
| 1) Σακονίδης Χαράλαμπος(επιβλέπων Καθηγητής) | Αναπληρωτής Καθηγητής | ………… |
| 2) Πόταρη Δέσποινα | Αναπληρώτρια Καθηγήτρια | ………… |
| 3) Σπύρου Παναγιώτης | Επίκουρος Καθηγητής | ………… |

*Στο σύντροφό μου, Σωτήρη*
*και στα παιδιά μου,*
*Φίλιππο και Χρήστο*

# Περιεχόμενα

# Περίληψη

Η παρούσα εργασία εξετάζει το διάλογο που λαμβάνει χώρα στην τάξη των μαθηματικών, ο οποίος δομείται με βάση την αλληλουχία του δίπολου ερώτηση – απάντηση. Σύμφωνα με τη σχετική βιβλιογραφία, ο διάλογος αποτελεί μια διαδικασία αναζήτησης, διερεύνησης, ανάληψης ρίσκου, συντήρησης και διατήρησης της ισότητας των μελών που συμμετέχουν σ' αυτόν. Βασικό εργαλείο ενεργοποίησης αυτής της διαδικασίας αποτελεί η ερώτηση, που, ωστόσο δεν κατορθώνει να ικανοποιήσει παρά σε πολύ περιορισμένο βαθμό τους όρους ενός πραγματικού διαλόγου στη σημερινή τάξη των μαθηματικών, καθώς αποτελεί αποκλειστικό προνόμιο του εκπαιδευτικού και αξιοποιείται με τρόπους που δεν ενθαρρύνουν τη διερευνητική προσέγγιση στη μαθηματική γνώση από το μαθητή, εμποδίζοντάς τον έτσι να την οικοδομήσει με ενεργό τρόπο.

Τα δεδομένα προέρχονται από ηχογραφημένες διδασκαλίες δυο μαθηματικών εκπαιδευτικών, οι οποίες αναλύθηκαν σε τρία επίπεδα. Το πρώτο αφορά στο πόσες ερωτήσεις διατυπώνονται, ποιος ρωτά και ποιος απαντά, το δεύτερο επικεντρώνεται στο μαθηματικό περιεχόμενο των ερωτήσεων και το γνωστικό και μεταγνωστικό έργο που ζητούν να επιτελέσουν οι μαθητές και το τρίτο επίπεδο εστιάζεται στον τρόπο που αξιοποιείται από τον εκπαιδευτικό το δίπολο ερώτηση – απάντηση, για να κατασκευαστεί η μαθηματική γνώση από τους μαθητές στην τάξη.

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης δείχνουν ότι οι ερωτήσεις προέρχονται σχεδόν όλες από τον εκπαιδευτικό, ο αριθμός τους ανά διδακτική ώρα είναι υπερβολικά μεγάλος αλλά το νοητικό έργο που καλούν το μαθητή να επιτελέσει είναι, γενικά, χαμηλού επιπέδου. Ο τρόπος προσέγγισης και διαχείρισης της διδασκαλίας από τους δυο εκπαιδευτικούς, παρότι διαφορετικός, δεν φαίνεται να λειτουργεί υπέρ των μαθητών σε καμία από τις δύο περιπτώσεις. Συγκεκριμένα, και οι δύο εκπαιδευτικοί επιχειρούν να οδηγήσουν τους μαθητές να προσαρμοστούν στην επιστημονική πρόθεσή τους, η οποία δεν είναι αυτή της κατασκευής ή συν-κατασκευής της μαθηματικής γνώσης από τους μαθητές αλλά της διατύπωσης εκ μέρους τους μιας συγκεκριμένης μαθηματικής απάντησης. Προς αυτήν την κατεύθυνση, ο εκπαιδευτικός διατηρεί ο ίδιος τον έλεγχο τόσο του μαθηματικού περιεχομένου όσο και της οργάνωσης της επικοινωνίας και της αλληλεπίδρασης. Η διαχείριση της μαθηματικής γνώσης γίνεται αποκλειστικά από τον εκπαιδευτικό και δεν πληρούνται στοιχειωδώς οι προϋποθέσεις ενός πραγματικού διαλόγου.

# Εισαγωγή

Οι έρευνες που έχουν επικεντρωθεί στην αίθουσα διδασκαλίας των μαθηματικών τα τελευταία χρόνια υποδεικνύουν τους διάφορους τρόπους με τους οποίους η διδασκαλία μπορεί να διευρύνει ή να περιορίσει την ατομική προσπάθεια και την ευκαιρία για μάθηση. Τα σχετικά ευρήματα αποκαλύπτουν ότι η προσέγγιση που ακολουθείται για την μελέτη της μαθηματικής γνώσης στην τάξη εξαρτάται πρωτίστως από τις πεποιθήσεις του εκπαιδευτικού σχετικά με τα μαθηματικά, τη μάθηση και τη διδασκαλία τους. Ποια θα είναι η στάση του απέναντι στους μαθητές του και ποιος ο τρόπος, με τον οποίο θα παρέμβει στη διαδικασία μάθησης, εξαρτώνται, κυρίως, από τις στάσεις και τις αντιλήψεις που έχει συγκροτήσει ο ίδιος έναντι των μαθηματικών και της μαθηματικής εκπαίδευσης. Οι Φιλίππου και Χρήστου (1997) επισημαίνουν ότι οι στάσεις και οι πεποιθήσεις προς τα μαθηματικά διαμορφώνονται βιωματικά, με βάση τις υποκειμενικές εμπειρίες του ατόμου και τις αντιλήψεις και προσδοκίες του στενού του περιβάλλοντος. Οι σχετικές πεποιθήσεις του εκπαιδευτικού καθορίζουν και τις διδακτικές πρακτικές που ακολουθεί. Οι Pehkonen et al. (2001) ισχυρίζονται ότι «οι πεποιθήσεις ενός ατόμου διαμορφώνουν ένα εσωτερικό ρυθμιστικό σύστημα, με το οποίο το άτομο χρησιμοποιεί και εκμεταλλεύεται το προσωπικό του σύστημα γνώσεων». Κατά τον Schoenfeld (1992), η σχέση που υπάρχει ανάμεσα στις πεποιθήσεις και την πρακτική είναι μια σχέση «αιτίου-αιτιατού». Συγκεκριμένα, υποστηρίζει ότι «η αίσθηση που έχει ο δάσκαλος για το μαθηματικό σύστημα καθορίζει τη φύση του σχολικού περιβάλλοντος που δημιουργεί ο ίδιος. Αυτό το περιβάλλον, στη συνέχεια, διαμορφώνει τις πεποιθήσεις των μαθητών για τη φύση των μαθηματικών».

Στο χώρο της Διδακτικής των Μαθηματικών είναι πλέον αποδεκτό ότι η γνώση που πραγματεύεται στη σχολική τάξη δεν μεταφέρεται αλλά δημιουργείται. Η ανάγκη για πιο αποτελεσματική διδασκαλία αποτελεί σοβαρό μέλημα των σχετικών ερευνών. Το Εθνικό Συμβούλιο των Δασκάλων των Μαθηματικών των ΗΠΑ (NCTM, 1991) τονίζει ότι τα μαθηματικά είναι ανάγκη να διδαχθούν ως ένα δυναμικό εργαλείο της σκέψης και όχι μόνο ως ένα σύνολο διαδικασιών προς μάθηση. Ταυτόχρονα, εμφανίζει ως αναγκαία συνθήκη μάθησης την παροχή κατάλληλων ευκαιριών στους μαθητές, για να ανταλλάσσουν μαθηματικές ιδέες και να λύνουν προβλήματα σε συνεργασία με άλλους. Να ασχολούνται με τις μαθηματικές δραστηριότητες, με αυτοπεποίθηση και ενθουσιασμό. Συγχρόνως, υποστηρίζεται ότι είναι αναγκαίο οι δάσκαλοι να χρησιμοποιούν τρόπους αξιολόγησης που να εστιάζονται στην κατανόηση, παρά στις σωστές απαντήσεις. Σε αυτό το πλαίσιο, οι εκπαιδευτικοί ενθαρρύνονται να αξιολογούν και να επιβραβεύουν τις προσπάθειες και την επιμονή των μαθητών και να τους παρέχουν ελευθερία βούλησης σε ό,τι αφορά στον τρόπο προσέγγισης ενός μαθηματικού προβλήματος. Ακόμα, να τους ενθαρρύνουν να χρησιμοποιούν ποικιλία προσεγγίσεων στις μαθηματικές δραστηριότητες. Προς αυτήν την κατεύθυνση, ο διάλογος έρχεται να διαδραματίσει σημαντικότατο ρόλο στη σχολική τάξη των μαθηματικών.

Ο διάλογος αποτελεί μια φυσική ανάγκη για τον άνθρωπο, η οποία είναι τόσο σημαντική για το πνεύμα όσο είναι η αναπνοή για το σώμα. Το «διαλέγεσθαι», όπως ανακάλυψαν κορυφαίοι σοφοί της αρχαιότητας, είναι αρχή του σύμπαντος, θεμελιωμένη στη σύσταση του κόσμου. Ταυτόχρονα, συνιστά νόμο του πνεύματος που καθρεφτίζει τη δομή του. Στη φύση τα αντίθετα, όπως το πλήρες και το κενό, η κίνηση και η ακινησία, το φως και το σκοτάδι, το πεπερασμένο και το άπειρο και ούτω καθεξής αναζητούνται και έλκονται αμοιβαία, για να σμίξουν και να διαχωριστούν πάλι και να συγκρουστούν. Αυτός ο δυναμικός διχασμός, που τείνει προς τη συναίρεση και, όταν τη φτάσει, την εγκαταλείπει, για να συνεχιστεί η δημιουργική διαμάχη, είναι και η εικόνα της δομής του πνεύματος.

Όταν ψάχνουμε ένα ζήτημα και προσπαθούμε να εισχωρήσουμε στο βάθος του, μιλάμε με τον εαυτό μας, αναλύοντας ένα-ένα τα ευρήματά μας, και πότε στεκόμαστε σε μια ερμηνεία, πότε την αποσύρουμε, για να την αντικαταστήσουμε με μια άλλη καλύτερη, πληρέστερη, ισχυρότερη.

Αν ο διάλογος γίνεται ανάμεσα σε ομότεχνους με ίδια ενδιαφέροντα και ίδια επιμονή να 'βρεθεί η άκρη του θέματος' που διαπραγματεύεται, τότε έχει τεράστια αξία και οδηγεί πιο γρήγορα και με μεγαλύτερη ασφάλεια στο επιθυμητό αποτέλεσμα, στο οποίο κανείς ατομικά μπορεί και να μην έφτανε ποτέ ή να κατέληγε πολύ αργά.

Στις επιστήμες, η προσπέλαση της αλήθειας μεθοδεύεται με τον πολλαπλασιασμό, την ανάφλεξη των αποριών και τη συνεχή ανανέωση του προβλήματος. Παρατηρώντας προσεκτικά τα όσα έχουν επιτευχθεί έως σήμερα στο χώρο των επιστημών, θα διαπιστώσουμε ότι δεν υπάρχουν τελικές λύσεις για το 'εν γρηγόρσει' πνεύμα, παρά μόνο προσωρινές αναπαύσεις, μικρά διαλείμματα σε μια πορεία που προχωράει όχι ευθύγραμμα και ομαλά, αλλά περίπλοκα και ανώμαλα, με «θέσεις» και «αντιθέσεις», «καταφάσεις» και «αρνήσεις», «παραδοχές» και «απορρίψεις», προς ένα ιδεατό τέρμα, απομακρυσμένο όσο το πλησιάζουμε, σαν τις ψευδαισθητικές παραστάσεις των οδοιπόρων της ερήμου (Παπανούτσος).

Χαρακτηριστικό του γνήσιου διαλόγου είναι ο αντίλογος, ο οποίος προωθεί το νου προς νέα ευρήματα, κρατώντας τον σε συνεχή επαγρύπνηση και αναζήτηση. Είναι μια ειρηνική προστριβή περιορισμένη από μερικούς θετούς κανόνες. Εμφανίζεται ως μέσο να φτάσει κανείς κάπου, όπως σε μια συνεννόηση των ανθρώπων μεταξύ τους, ή, πολύ περισσότερο, στην από *κοινού* ανακάλυψη κάποιας αλήθειας.

Ένας κανόνας, για να μπορεί να γίνει πραγματικός διάλογος, είναι η ισότητα μεταξύ αυτών που τον ασκούν και η κοινή γλώσσα που αποτελεί και προϋπόθεση. Πρέπει να έχουμε παραδεχτεί και να χρησιμοποιούμε την ίδια «συμβολική» δηλαδή, να δίνουμε στις λέξεις το ίδιο περιεχόμενο και νόημα, για να καταλαβαίνει ο ένας τον άλλο, ώστε να έχει έννοια η αναζήτηση συμφωνιών ή διαφωνιών που προκύπτουν με βάση έναν ίδιο λογικό κώδικα.

Αυτά τα στοιχεία φαίνεται να επηρεάζουν καθοριστικά τα πλεονεκτήματα της μάθησης. Όσοι εμπλέκονται ενεργούν ο ένας προς τον άλλον. Σε σχέση με το διάλογο ανάμεσα στο δάσκαλο και στους μαθητές ή μεταξύ μαθητών αναγνωρίζονται διαφορετικές διαλογικές πράξεις, οι οποίες δεν λαμβάνουν χώρα με μια συγκεκριμένη σειρά. Υπάρχει επαφή, τοποθέτηση, αναγνώριση, υποστήριξη, το να σκέφτεται κανείς δυνατά, αναδιάρθρωση σκέψης, πρόκληση ή αμφισβήτηση και τέλος αξιολόγηση.

Διάλογος σημαίνει θέληση να ελέγξουμε τις γνώσεις του καθενός και να εξετάσουμε τι είναι το καινούργιο και το διαφορετικό αλλά, επίσης, τι είναι αυτό που θεωρείται γνώση ήδη κατακτημένη. Η μάθηση μέσω διαλόγου είναι πλούσια σε τέτοιες διαλογικές πράξεις. Το να εισέλθει κανείς σ’ ένα διάλογο σημαίνει ότι πρέπει να αναλάβει τη δική του ευθύνη. Δεν έχει προκαθορισμένη κατεύθυνση ούτε αποτέλεσμα. Λαμβάνει χώρα στο πεδίο μεταξύ αυτών που είναι ήδη γνωστά και αυτών που πρόκειται ίσως να μάθει κάποιος. Μπορεί, όμως, να διακοπεί από διαφωνίες, στέρεες οπτικές γωνίες, στρατηγικές πειθούς, έλλειψη αμφισβήτησης και άλλα στοιχεία. Πρόκειται για μια εύθραυστη διαδικασία.

Ο διάλογος ανάμεσα στο δάσκαλο και στο μαθητή χαρακτηρίζεται από προφανή «ανισορροπία» στην αλληλεπίδραση, από τη στιγμή που ο δάσκαλος γνωρίζει καλύτερα και είναι πιο έμπειρος (Ackerman, 1992). Έτσι, τίθεται το ερώτημα πώς να αποφύγει κανείς τη χειραγώγηση και πώς να χρησιμοποιήσει κανείς την ανισότητα, ώστε να ανοίξουν δυνατότητες και για τους δύο παίκτες; Πώς να μεταχειριστεί την ανισότητα, χωρίς να στερήσει από τον μαθητή την κοσμοθεωρία που ήδη έχει; Σ' ένα εκπαιδευτικό περιβάλλον είναι φανερή η πρόθεση του δασκάλου να βοηθήσει με κατάλληλο τρόπο τον μαθητή να προχωρήσει. Ωστόσο, αυτό μπορεί να αποτύχει, αν ο εκπαιδευτικός, αντί να καλλιεργεί την απεξάρτηση και την αυτοεκτίμηση του μαθητή, δημιουργεί εξαρτήσεις και ανασφάλειες.

Στη σχολική τάξη των μαθηματικών ο διάλογος, συνήθως, πραγματοποιείται με βάση το μοτίβο ερώτηση – απάντηση. Η ερώτηση σε όλες τις εποχές κατείχε κεντρική θέση στην επικοινωνία και την αλληλεπίδραση ανάμεσα σε δάσκαλο και μαθητή ή μαθητή με μαθητή. Έρευνες δείχνουν ότι αποτελεί καθιερωμένο διδακτικό εργαλείο και ως τέτοιο έχει γίνει αντικείμενο μελέτης αρκετών ερευνητών (Kawanaka & Stigler,1999, Smith,1986, Anley,1989).

Η παρούσα εργασία έχει ως στόχο να εξετάσει το διάλογο στη σχολική τάξη των μαθηματικών. Ειδικότερα, έρχεται να μελετήσει το διάλογο με αναφορά στις ερωτήσεις που τον διέπουν και ειδικότερα το πλήθος και το είδος των ερωτήσεων που χρησιμοποιεί ο δάσκαλος και τον τρόπο με τον οποίο αυτές χρησιμοποιούνται κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας.

Αποτελείται από πέντε κεφάλαια. Το πρώτο κεφάλαιο περιλαμβάνει στοιχεία από τη τρέχουσα βιβλιογραφία σχετικά με τη μάθηση των μαθηματικών, τα διδακτικά περιβάλλοντα, το ρόλο του εκπαιδευτικού μέσα σ' αυτά, τις αλληλεπιδράσεις, το διάλογο και τις ερωτήσεις στη σχολική τάξη των μαθηματικών. Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται η μεθοδολογία της έρευνας που υιοθετήθηκε και στο τρίτο κεφάλαιο η ανάλυση των δεδομένων, η οποία στηρίχθηκε σε τρεις απομαγνητοφωνημένες διδασκαλίες από καθέναν από δύο έμπειρους εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που συμμετείχαν στην έρευνα. Το τέταρτο και το πέμπτο κεφάλαιο επικεντρώνονται στη συζήτηση και στα συμπεράσματα της μελέτης αντιστοίχως.

# Κεφάλαιο Πρώτο

# Βιβλιογραφικό πλαίσιο

## 1.1. Τα μαθηματικά και η μάθηση των μαθηματικών

Τα μαθηματικά δημιουργήθηκαν από τον άνθρωπο στην προσπάθειά του να ερμηνεύσει και να διευκολύνει τον τρόπο ζωής του. Η μαθηματική γνώση είναι αχώριστη από τον γνώστη. Είναι ένα προϊόν της ανθρώπινης δραστηριότητας και όχι κάτι που υπάρχει σε μια άλλη εξωτερική πραγματικότητα. Δεν θα μπορούσε κανείς να υποστηρίξει ότι όσοι γνωρίζουν μαθηματικά ξέρουν τα ίδια πράγματα. Θα μπορούσε, όμως, να ισχυριστεί ότι οι γνώσεις τους είναι συμβατές.

Ο Vygotsky υποστήριξε ότι υπάρχουν δύο τύποι εννοιών, οι αυθόρμητες ή καθημερινές και οι επιστημονικές. Οι πρώτες αναπτύσσονται μέσω της αλληλεπίδρασης με το περιβάλλον. Κάθε άτομο αφομοιώνει τις οπτικές του περιβάλλοντός του και τις συγχωνεύει στα υπάρχοντα συμπεράσματα. Αυτό σημαίνει ότι το επίπεδο της κατανόησης του καθενός συμβάλλει στη διεύρυνση ή στον περιορισμό της ερμηνείας που θα δώσει στις διάφορες απόψεις του περιβάλλοντός του. Οι δεύτερες αναπτύσσονται κατά τη διάρκεια της εκπαίδευσης, όπου η μάθηση των μαθηματικών επιτυγχάνεται με κατανόηση, που αποτελεί προϊόν της ενεργούς, λεκτικής ή άλλης, συμμετοχής του σε δραστηριότητες, οι οποίες ενσωματώνουν σημαντική μαθηματική γνώση (Fennema & Franke 1992). Αυτή η θεώρηση οριοθετεί καθοριστικά τη στάση του εκπαιδευτικού μέσα στη σχολική τάξη των μαθηματικών. Ο εκπαιδευτικός είναι εκείνος που θα δημιουργήσει τις κατάλληλες διδακτικές καταστάσεις, με στόχο να οδηγηθούν οι μαθητές του στη μάθηση. Η Lampert (2001) υποστηρίζει πως ένα χρήσιμο εργαλείο για τη παραγωγή μάθησης αποτελεί ο διάλογος. Η σημασία το διαλόγου τονίζεται και από το Εθνικό Συμβούλιο των Δασκάλων των Μαθηματικών των ΗΠΑ (NCTM 1991), το οποίο διατύπωσε την άποψη ότι «οι δάσκαλοι πρέπει να ενθαρρύνονται να θέτουν θέματα ώστε να εμπλέξουν τους μαθητές σε διάλογο».

Κατά τους Heinz, Kinzel, Simon & Tzur (2000), ένας παράγοντας – κλειδί της μάθησης είναι η αμφισβήτηση μιας ιδέας και τα αποτελέσματά της. Αποτελεί έναν τρόπο να συνοψίζουν οι μαθητές με ακρίβεια τα πορίσματα που προκύπτουν, δημιουργώντας έτσι πρότυπα. Τα πρότυπα αυτά αποτελούν τις βάσεις για νέα ή τροποποιημένα συμπεράσματα. Οι ερευνητές χρησιμοποιούν τον όρο «προοπτική βασισμένη στην κατανόηση», για να διακρίνουν τις προοπτικές της μάθησης των μαθηματικών με τη βοήθεια τριών κυρίων χαρακτηριστικών:

- Τα μαθηματικά δημιουργήθηκαν για τις ανθρώπινες ανάγκες
- Ό,τι βλέπουμε, καταλαβαίνουμε και μαθαίνουμε μας δεσμεύει και μας παρέχεται από κάτι που ήδη ξέρουμε και έχουμε αφομοιώσει.
- Η μελέτη των μαθηματικών είναι μια διαδικασία διαμόρφωσης της πνευματικής μας σύνθεσης.

Στο παραπάνω πλαίσιο, εκχωρείται, πλέον, στο μαθητή ένας ειδικός ρόλος. Καθίσταται συνυπεύθυνος στη μάθηση. Ο Papert (1990) υποστηρίζει σχετικά πως οι άνθρωποι μαθαίνουν καλύτερα μέσα από το να κατασκευάζουν προσωπικά τη γνώση και, καλύτερα απ' όλα, με το να σκέφτονται και να μιλούν γι' αυτό που κάνουν.

### 1.2. Διδακτικό περιβάλλον

Κατά τη δεκαετία του '70, μία μεγάλη έρευνα στις ΗΠΑ οδηγήθηκε στην ενδιαφέρουσα διαπίστωση ότι «σε όλες τις μαθηματικές τάξεις…, γίνονται πάντα τα ίδια πράγματα, με την ίδια σειρά. Πρώτα εξετάζεται το μάθημα της προηγούμενης μέρας και δίνονται οι απαντήσεις. Τα πιο δύσκολα προβλήματα τα λύνει ο δάσκαλος ή κάποιος μαθητής με τη βοήθειά του στον πίνακα. Λίγος σχετικά χρόνος αφιερώνεται στην παρουσίαση του νέου θέματος και ορίζονται τα προβλήματα που πρέπει να προετοιμάσουν οι μαθητές για την επόμενη μέρα. Αν μείνει κάποιος χρόνος, οι μαθητές αρχίζουν να δουλεύουν πάνω σ' αυτά τα προβλήματα μέσα στην τάξη, ενώ ο δάσκαλος τριγυρίζει στην αίθουσα απαντώντας σε απορίες» (Welch 1978, στο NCTM 1991).

Οικείο σκηνικό σε παγκόσμιο επίπεδο, μέχρι και σήμερα, το οποίο δεν είναι παρά η φυσική συνέπεια μιας αντίληψης γύρω από τη διαδικασία απόκτησης της μαθηματικής γνώσης, η οποία συνοψίζεται σε τρία βασικά σημεία :

- Στην αντίληψη της μαθηματικής γνώσης ως ένα σώμα γενικά παραδεκτών γεγονότων και τεχνικών, ιεραρχικά οργανωμένων, ανεξαρτήτως πλαισίου (context – free) και αξιών (value –free) και, επομένως, επιδεκτικών διάσπασης και τμηματικής μετάδοσης από τους «ειδικούς».

- Στην αντίληψη της μάθησης ως διαδοχή συσσώρευσης απομονωμένων τμημάτων πληροφορίας και τεχνικών, τα οποία οικειοποιούνται οι μαθητές μέσω ακουσμάτων, παρατήρησης, απομνημόνευσης και πρακτικής εφαρμογής.
- Στην αντίληψη της διδασκαλίας ως άμεσης μετάδοσης γνώσης, που μπορεί να αποκτηθεί αποτελεσματικά, υπό την προϋπόθεση ότι ο δάσκαλος προσφέρει σαφείς εξηγήσεις, τις οποίες οι μαθητές ακολουθούν πιστά (αφού πρώτα τις απομνημονεύσουν) και τις εφαρμόσουν στην πράξη (Κολέζα, 2000). Σχηματικά αυτή η αντίληψη θα μπορούσε να αναπαρασταθεί ως εξής :

Καθηγητής → μετάδοση γνώσης → μαθητής

Αυτό το «μοντέλο μετάδοσης γνώσης» κυριαρχεί στις τάξεις των μαθηματικών και έχει ως στόχο οι μαθητές να εκτελούν μαθηματικές τεχνικές, όπως αριθμητικούς υπολογισμούς και χειρισμούς συμβόλων (Bishop, 1988).

Στον αντίποδα αυτού του διδακτικού περιβάλλοντος βρίσκονται οι μαθηματικές τάξεις, όπου πρωτεύοντα ρόλο έρχεται να παίξει η σκέψη του μαθητή, η γνώση της οποίας, όπως υποδεικνύουν όλο και περισσότερα ερευνητικά δεδομένα, μεταβάλλει τις πεποιθήσεις των δασκάλων για τα μαθηματικά και τον τρόπο διδασκαλίας τους. Σε αυτές τις τάξεις ο εκπαιδευτικός δεν είναι πια αυτός που μεταφέρει τη γνώση, αλλά αυτός που βοηθάει τους μαθητές να την κατασκευάσουν μέσω των διδακτικών αλληλεπιδράσεων. Επιπλέον, «όχι μόνο ο δάσκαλος αλλά και οι μαθητές συμβάλλουν στα δρώμενα των τάξεων» (Bauersfeld, 1988). Οι δάσκαλοι δεν λένε πλέον στους μαθητές τι να κάνουν, αλλά τους βοηθούν να το ανακαλύψουν μόνοι τους. Σχετικά με το τελευταίο, η Ackermann (1992) σημειώνει χαρακτηριστικά σε άρθρο της τα λόγια της Spivey: «Το να βοηθάς άλλους να βοηθήσουν τους εαυτούς τους είναι πολύ πιο δύσκολο από το να τους λες τι να κάνουν». Στο ίδιο άρθρο η Ackermann επισημαίνει πως η μετατροπή μιας σχολικής τάξης σε μια παιδοκεντρικά προσανατολισμένη κουλτούρα μάθησης μοιάζει ο μόνος τρόπος, για να καταστήσουμε τους μαθητές ικανούς να χτίσουν πάνω στις δικές τους γνώσεις, χωρίς να τους αναγκάσουμε να συμμορφωθούν με εξωτερικές απαιτήσεις. Να χρησιμοποιήσουν τη δική τους κρίση ως ένα τρόπο να ανακαλύψουν τα όρια της σκέψης τους και να νιώσουν αρκετά σίγουροι, για να αναζητήσουν ευκαιρίες που επιτρέπουν τη προσωπική εξέλιξη μέσα από συλλογικές εμπειρίες εκμάθησης. Ένα εκπαιδευτικό περιβάλλον, για να μη δρα περιοριστικά, θα πρέπει να παρέχει στους μαθητές τη δυνατότητα να ανταλλάξουν ιδέες και πρακτικές. Να οικοδομήσουν αμοιβαία κατανόηση και αποδοχή, επιχειρηματολογώντας, εξηγώντας και, ενδεχομένως, πείθοντας.

Ένας δάσκαλος που επεξηγεί με σαφήνεια τα πάντα ή λέει υπερβολικά πολλά αποτρέπει κυριολεκτικά το συνομιλητή του από το να σκεφτεί. Οι σύγχρονες έρευνες στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης, πλέον, στοχεύουν στο να περιγράψουν και να προσφέρουν περιβάλλοντα που μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να οικοδομήσουν πάνω στη γνώση που έχουν ήδη κατακτήσει, μ’ έναν τρόπο που να έχει νόημα γι’ αυτούς. Βέβαια, η μάθηση μέσω της άμεσης εμπειρίας δεν είναι πάντοτε δυνατή ή επιθυμητή. Υπάρχουν καταστάσεις στις οποίες είναι ξεκάθαρο πλεονέκτημα το να μεταδίδεται η εμπειρία κάποιου είτε δρώντας σ’ ένα προσομοιωμένο κόσμο είτε λειτουργώντας πνευματικά. Ακόμα, υπάρχουν φορές που είναι επιθυμητό να μας πουν οι άλλοι τι να κάνουμε. Ωστόσο, ένα ιδανικό περιβάλλον για την εποικοδομητική εκμάθηση είναι αυτό που καθιστά τους μαθητές ικανούς να αποφασίζουν πότε χρειάζονται καθοδήγηση ή εναλλακτικές απόψεις και πότε προτιμούν την ελευθερία να εξερευνήσουν (Ackermann ,1992).

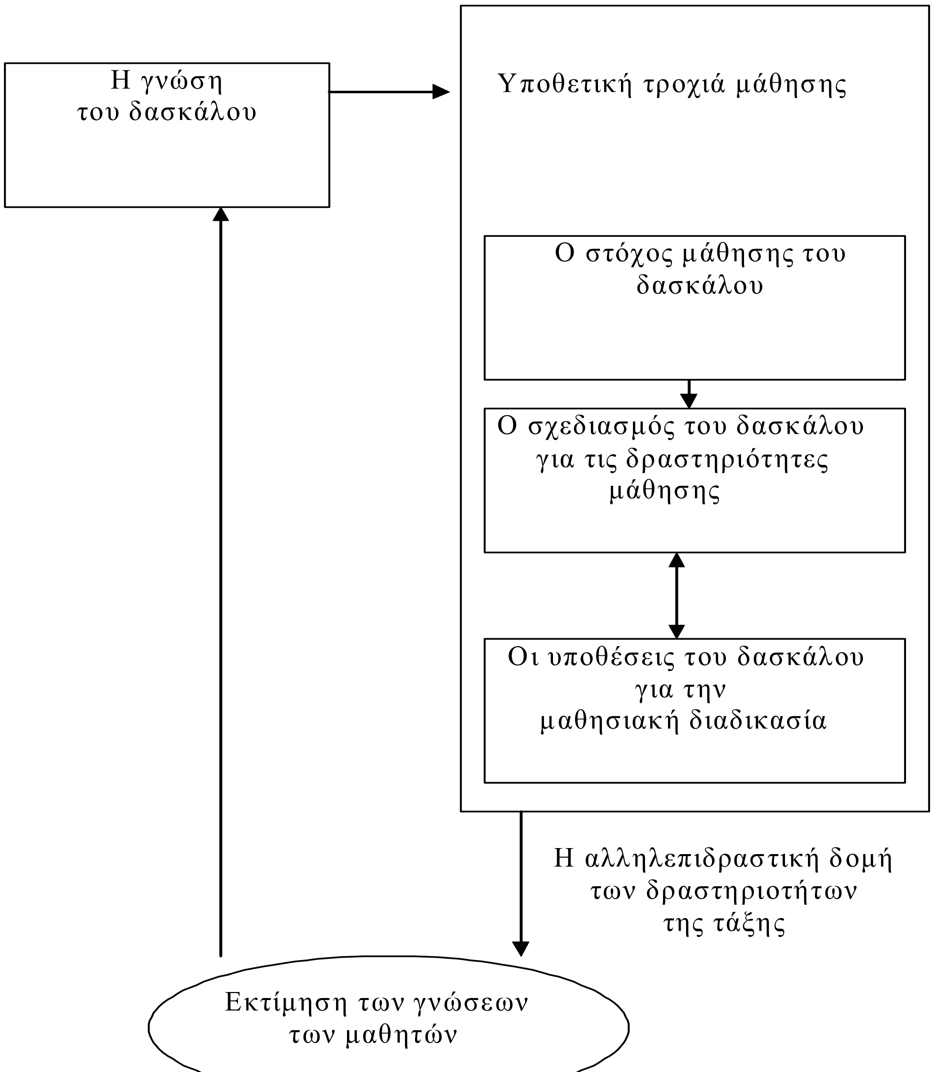
Κανένα μαθησιακό περιβάλλον δεν μπορεί να ευχαριστεί συνεχώς όλους τους μαθητές. Είναι προφανές ότι διαφορετικοί άνθρωποι χρειάζονται διαφορετικού τύπου υποστήριξη σε διαφορετικές φάσεις και διαφορετικές χρονικές στιγμές, διότι θα είναι περισσότερο ή λιγότερο «αναπτυγμένοι» από άλλους σε κάποιο πεδίο. Έτσι, μέσα στο ίδιο μαθησιακό περιβάλλον μπορούν να αναπτύξουν διαφορετικές δεξιότητες. Οι «καλοί» εκπαιδευτικοί θα πρέπει να αναζητούν την ισορροπία ανάμεσα στην ελευθερία και την καθοδήγηση που είναι κατάλληλη για έναν μαθητή τη δεδομένη στιγμή. Εγκαταλείπουν τον προσωπικό έλεγχο, δημιουργώντας μια κοινότητα γύρω από τον εαυτό τους και τους μαθητές τους, μέσα στην οποία όλοι να μπορούν να νιώθουν άνετα.

### 1.3. Ο ρόλος του δασκάλου

Είναι φανερό πως ο δάσκαλος διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο στη διαμόρφωση του μαθησιακού περιβάλλοντος και κατά συνέπεια στη διαδικασία της μάθησης.

Σύμφωνα με το μοντέλο διδασκαλίας του Simon (1995), ένας δάσκαλος οφείλει να χρησιμοποιεί τις γνώσεις του στα μαθηματικά, τη διδακτική και τη μελέτη, καθώς και τις προσωπικές του υποθέσεις για την αντίληψη των μαθητών, για να δημιουργήσει στόχους και τρόπους, με τους οποίους θα προάγει τη γνώση. Κατά την προετοιμασία του μαθήματος, ο δάσκαλος είναι αναγκαίο να κάνει υποθέσεις για την αντίληψη και την ανταπόκριση των μαθητών, καθώς και για τα ζητήματα που ενδεχομένως προκύψουν, ξεκινώντας από εκεί που βρίσκεται ο μαθητής. Κατά τη διάρκεια του μαθήματος, ο εκπαιδευτικός επιβάλλεται να δίνει ευκαιρίες στους μαθητές αλλά και στον εαυτό του για καλύτερη κατανόηση των μαθηματικών. Να είναι σε θέση να διαμορφώνει κάθε φορά τους στόχους του κατά τη διάρκεια και μετά το μάθημα. Οι Heinz, Kinzel, Simon & Tzur (2000) ονομάζουν αυτό το μοντέλο διδασκαλίας «κυκλικό» και το αναπαριστούν όπως εμφανίζεται στο σχεδιάγραμμα 1.1 παρακάτω.

**Σχεδιάγραμμα 1.1.** Κυκλικό μοντέλο διδασκαλίας (Heinz, et al. 2000).



Μια καίρια διάσταση της διδασκαλίας, η διαχείριση της οποίας αποτελεί αποκλειστικότητα του εκπαιδευτικού, είναι αυτή που συνδέεται με θέματα επικοινωνίας και αλληλεπίδρασης στην τάξη. Ο δάσκαλος πρέπει να είναι σε θέση να κάνει πίσω και να αφήνει χώρο ώστε οι μαθητές να συζητήσουν, να αντικρούσουν και να δικαιολογήσουν ο ένας τη δουλειά του άλλου (Lampert, 1990, Schoenfeld, 1987). Είναι σημαντικό να μπορεί να δημιουργεί ερεθίσματα που προκαλούν ανταλλαγή απόψεων. Ο μαθητής θα πρέπει να ενθαρρύνεται να αναπτύξει το συλλογισμό του με όποιο τρόπο μπορεί, χωρίς να διακόπτεται από το δάσκαλο, πρακτική που χαρακτηρίζεται από την Jaworski(1998) ως σημείο ένδειξης ευαισθησίας εκ μέρους του δασκάλου προς τους μαθητές.

Οι Πόταρη και Jaworski (2002) περιγράφουν τον εκπαιδευτικό ως διευκολυντή της γνώσης, ο οποίος έχει ως βάση για τη διδασκαλία του τη διδακτική τριάδα (teaching triad). Η διδακτική τριάδα αποτελείται από τρία βασικά χαρακτηριστικά. Το πρώτο είναι η διαχείριση της μάθησης, που αφορά στο μαθησιακό περιβάλλον το οποίο διαμορφώνει ο εκπαιδευτικός. Το δεύτερο είναι η μαθηματική πρόκληση που αναφέρεται στις προκλήσεις που προσφέρει ο εκπαιδευτικός στους μαθητές του, προκειμένου να αναπτύξουν μαθηματική σκέψη. Το τρίτο είναι η ευαισθησία στους μαθητές που συνδέεται με το βαθμό στον οποίο ο εκπαιδευτικός ενδιαφέρεται για τις ανάγκες των μαθητών του.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, στα δρώμενα μέσα στη σχολική τάξη συμβάλλουν από κοινού ο δάσκαλος και οι μαθητές. Ο πρώτος ως διευκολυντής της μάθησης οφείλει να αναζητήσει τρόπους παρέμβασης που θα οδηγήσουν τους μαθητές στην οικοδόμηση της γνώσης. Έχοντας καλή γνώση των παρανοήσεων των μαθητών, ο έμπειρος εκπαιδευτικός είναι δυνατόν να τους προκαλέσει και να τους οδηγήσει στη μάθηση μέσα από τους δρόμους που ο ίδιος ανακαλύπτει, παρεμβαίνοντας έτσι εποικοδομητικά στην επίτευξή της.

Ωστόσο, σχετικά με τις παρεμβάσεις του δασκάλου υπάρχουν ζητήματα που χρήζουν ιδιαίτερης προσοχής. Οι Σακονίδης κ.ά. (2003), κατόπιν έρευνας που πραγματοποίησαν, εντόπισαν τρεις κατηγορίες παρεμβάσεων του εκπαιδευτικού κατά τη διάρκεια της εργασίας των μαθητών στην τάξη των μαθηματικών: την επανα-διατύπωση της προβληματικής κατάστασης, την παροχή ενδείξεων και βοήθειας για την επίλυσή της και την επιβολή της λύσης / απάντησης. Στις δύο τελευταίες περιπτώσεις, οι εκπαιδευτικοί υιοθετούν μια σειρά από πρακτικές, όπως ο περιορισμός της γενικότητας με τη παροχή συγκεκριμένων παραδειγμάτων, η επισήμανση αλγοριθμικών διαδικασιών, η απλούστευση του προβλήματος με τη διάσπασή του σε υποπροβλήματα, η συνεχής καθοδήγηση μέσω ερωτήσεων και οδηγιών και, τέλος, η παρουσίαση της λύσης του προβλήματος. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι οι εκπαιδευτικοί παρεμβαίνουν με εκπληκτική ευκολία σε ό,τι ξεφεύγει από τη δική τους οπτική. Αυτό έχει ως συνέπεια να διαμορφώνονται στους μαθητές αντιλήψεις όπως ότι δεν μπορούν να αντιμετωπίσουν μόνοι τους τα μαθηματικά, η γνώση των μαθηματικών ανήκει στους εκπαιδευτικούς και, γενικότερα, ότι, εν τέλει, τα μαθηματικά είναι κάτι απρόσιτο που προσεγγίζεται μόνο από λίγους.

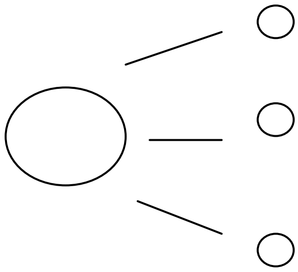
Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι είναι απολύτως αναγκαίο ο ρόλος του εκπαιδευτικού να διαφοροποιηθεί με τέτοιο τρόπο ώστε να μην αποτελεί τον κύριο φορέα της μαθηματικής γνώσης αλλά να εκχωρεί τη μαθηματική γνώση και τον έλεγχό της στους μαθητές. Να προετοιμάζει το έδαφος για τη διαμόρφωση του νοήματος, σχεδιάζοντας περιθώρια τελειοποίησης που να είναι ασφαλή αλλά και να επιτρέπουν την εξερεύνηση, την έκφραση, την ανταλλαγή ιδεών, σχεδίων και προϊόντων. Μια τάξη αναπτύσσει αληθινή κουλτούρα μάθησης, μόνον όταν παρέχει σε κάθε συμμετέχοντα κάποια δυνατότητα να συνεισφέρει στην πρόοδό του.

### 1.4. Αλληλεπίδραση στη σχολική τάξη των μαθηματικών

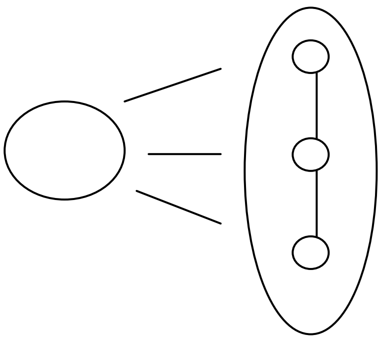
Ο Vygotsky υποστήριξε ότι τα άτομα δομούνται μέσω της αλληλεπίδρασής τους με τους άλλους. Με βάση αυτή τη θεώρηση, οι αλληλεπιδράσεις λαμβάνουν κεντρική θέση στη διαμόρφωση των γνώσεων. Η κοινωνική διαμεσολάβηση επιτρέπει τη μετάβαση από μία ενδο-ατομική (inter-individual) ψυχική λειτουργία σε μια διατομική (intra-individual). Οι γνώσεις δεν εκλαμβάνονται ως ατομική ιδιοκτησία αλλά ως αντικείμενο κοινής κτήσης που διανέμεται. Οι προτάσεις δεν καθίστανται γνώσεις παρά μόνο αν αναγνωρίζονται ως τέτοιες από τους συμμετέχοντες στην αμοιβαία ανταλλαγή. Ο μαθητής δεν νοείται ως σύστημα απομονωμένο αλλά ως άτομο που χρησιμοποιεί πηγές, τις συγκρίνει, τις αξιολογεί, τις κριτικάρει. Η γνώση εκλαμβάνεται ως σχέση ανάμεσα σε πρόσωπα και προτάσεις, οι οποίες αντιμετωπίζονται ως αληθινές όσο συμφωνούν με τις κοινές συμβάσεις αναφορικά με τον τρόπο αντίληψης των καταστάσεων (Carre et al., 2003).

Οι Σακονίδης κ.α. (2001), σε έρευνα που διεξήγαγαν παρατήρησαν δύο τύπους αλληλεπίδρασης στην τάξη των μαθηματικών. Ο εκπαιδευτικός είτε απευθύνει ερωτήσεις σε συγκεκριμένους μαθητές (α), τους οποίους επιλέγει και οι οποίοι εναλλάσσονται, είτε στο σύνολο της τάξης (β). Δεν παρατηρήθηκε επικοινωνία που στηρίζεται σε αλληλεπιδράσεις και μεταξύ μαθητών (γ) (σχεδιάγραμμα 3.2).

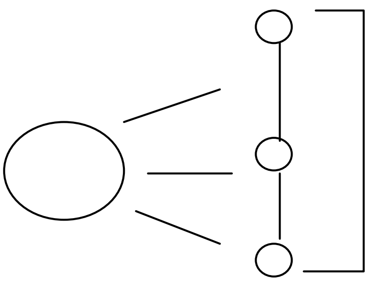
**(α)** Αλληλεπίδραση εκπαιδευτικού με συγκεκριμένους μαθητές



**(β)** Αλληλεπίδραση εκπαιδευτικού με όλη την τάξη



**(γ)** Αλληλεπίδραση μαθητών με τον εκπαιδευτικό και μεταξύ τους



**Σχεδιάγραμμα 3.2.** Τρόποι αλληλεπίδρασης στην τάξη των μαθηματικών

Με βάση τα ευρήματά τους, οι ερευνητές υποστηρίζουν ότι οι ερωτήσεις και παρεμβάσεις του δασκάλου καθοδηγούν τους μαθητές, κατακερματίζουν τη μαθηματική δραστηριότητα, ελαχιστοποιούν την ανταλλαγή και αντιπαράθεση απόψεων από τους μαθητές και δεν ενισχύουν την ανάπτυξη συλλογισμών και επιχειρηματολογίας. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει ουσιαστική επικοινωνία, εφόσον κάθε μαθητής απαντάει χωριστά και σχεδόν αποκλειστικά στο δάσκαλο. Από τη παραπάνω έρευνα γίνεται σαφές, ότι ο διαχειριστής της μαθηματικής γνώσης είναι ο δάσκαλος.

Η αλληλεπίδραση δασκάλου και μαθητών πρέπει να είναι τέτοια ώστε οι μαθητές να ενθαρρύνονται στην εξερεύνηση, ανακάλυψη και κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Έτσι, οι μαθητές κοινωνικοποιούνται, γεγονός που διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο στη μάθησή τους. Οι Artzt & Thomas (1999) σημειώνουν ότι ο εκπαιδευτικός οφείλει να επικοινωνεί με τους μαθητές του, ενθαρρύνοντας τη συμμετοχή κάθε μαθητή. Παρόμοια άποψη εκφράζουν και οι Artigue(1996) και Sierpinska (1994), οι οποίες τονίζουν ότι, για να οδηγηθούν οι μαθητές στη γνώση, πρέπει να τους δίνεται η ευκαιρία να συμμετέχουν ενεργά στα δρώμενα της τάξης και αυτό αποτελεί ευθύνη του εκπαιδευτικού, ο οποίος καλείται να αναγνωρίσει και να αξιοποιήσει το γεγονός ότι «ο δάσκαλος και οι μαθητές αποτελούν από κοινού την πραγματικότητα της τάξης» (Bauersfeld,1988).

### 1.5. Διάλογος στη τάξη των μαθηματικών

Η σημασία του διαλόγου στη σχολική τάξη έχει επισημανθεί από πολλούς ερευνητές, όπως έχει ήδη αναφερθεί. Οι Alro και Skovsmose (2002) όρισαν ως διάλογο μια συζήτηση που πληροί τρεις συνθήκες:

- Είναι μια διαδικασία αναζήτησης, διερεύνησης, με σκοπό να δώσει νέες απόψεις.
- Περιλαμβάνει ανάληψη ρίσκου
- Συντηρεί και διατηρεί την ισότητα

Αυτές οι τρεις συνθήκες αποτελούν *το πρώτο χαρακτηριστικό του διαλόγου.*

*Περί διερεύνησης*

Διερευνώ σημαίνει ότι μετακινούμαι από τη βεβαιότητα στην περιέργεια. Ο Isaacs (1994) περιγράφει το διάλογο ως μια συλλογική έρευνα στην καθημερινή εμπειρία και σ' αυτό που εκλαμβάνουμε ως δεδομένο. Αυτό σημαίνει, επίσης, ότι δίνουμε στο διάλογο τη σημασία της συζήτησης στην έρευνα. Οι συμμετέχοντες θέλουν να ανακαλύψουν κάτι και να κερδίσουν γνώση και καινούργια εμπειρία. Η διαδικασία του διαλόγου ενθαρρύνει τους ανθρώπους να αναπτύξουν μια κοινή αντίληψη για τη διερεύνηση.

Ο Lindfors (1999) εισάγει τον όρο της συλλογικής διερεύνησης, που αναφέρεται στην ενεργοποίηση του συλλογικού αναστοχασμού, όπου οι συμμετέχοντες, μέσα από μια κοινή διαδικασία πρόβας, προσπαθούν να φτάσουν σε νέα γνώση. Η είσοδος ενός ατόμου σε μια συλλογική διαδικασία διερεύνησης σημαίνει, κατ' αρχήν, την κατοχή του ελέγχου των δικών του δραστηριοτήτων. Οι συμμετέχοντες στη διερεύνηση έχουν την ευθύνη των δραστηριοτήτων τους, της ανάπτυξής τους αλλά και της μάθησης που θα επιτύχουν μέσα από αυτές.

Στο διάλογο είναι σημαντικό οι συμμετέχοντες να είναι διατιθέμενοι να αλλάξουν τις απόψεις τους και να μπορούν να οικοδομήσουν νέες. Μια τέτοια διαδικασία δεν μπορεί να έχει οποιαδήποτε σχέση με μετάδοση της γνώσης. Οι συμμετέχοντες χρησιμοποιούν μια συνεργατική διαδικασία αναζήτησης, κατά την οποία έχει σοβαρή αξία να εκφραστούν με λόγια οι απόψεις που υπάρχουν. Αυτό είναι σημαντικό γιατί κάνει προσιτή την επικοινωνία μεταξύ των συμμετεχόντων, με αποτέλεσμα ο καθένας να μπορεί να οδηγηθεί στο να αντιμετωπίσει ένα πρόβλημα από νέα οπτική γωνία. Η διατύπωση μιας άποψης δεν εκλαμβάνεται ως απόδειξη κατοχής της απόλυτης αλήθειας αλλά ως κατάθεση μιας οπτικής για διερεύνησης.

Στη σχολική τάξη, ο διάλογος μπορεί να αποτελέσει μια σημαντική ευκαιρία για το δάσκαλο να εξερευνήσει τις απόψεις των μαθητών και να τους βοηθήσει να εκφράσουν τις όποιες γνώσεις τους. Με βάση όσα προηγήθηκαν, η εισαγωγή του διαλόγου στη τάξη από το δάσκαλο σηματοδοτεί μια συγκεκριμένη θεώρηση της μάθησης, δηλαδή, ότι *ο δάσκαλος δεν έχει έτοιμες απαντήσεις για τη λύση των προβλημάτων που δίνει στους μαθητές του.* Στο πλαίσιο αυτής της θεώρησης, το όφελος του δασκάλου είναι ότι μέσα από τη συγκεκριμένη συλλογική διαδικασία, με την παρατήρηση, τον αναστοχασμό και την έκφραση των γνώσεων και απόψεών του είναι δυνατό να επιτύχει να αλλάξει και να φτάσει στη γνώση μέσα από ένα νέο δρόμο. Για τους μαθητές, η αξία της εμπλοκής σε διαδικασίες διαλόγου βρίσκεται στο ότι ασκούνται να είναι έτοιμοι να διερευνήσουν τις γνώσεις τους, εισερχόμενοι σε μια διαδικασία στιγμιαίας αβεβαιότητας και να δέχονται ότι δεν υπάρχουν αυθεντικά διαμορφωμένες απαντήσεις.

*Περί ρίσκου*

Κατά την είσοδο σε μία διερευνητική διαδικασία υπάρχουν σοβαρές πιθανότητες να αλλάξουν οι διαμορφωμένες αντιλήψεις και να οδηγηθεί κανείς σε απρόβλεπτες καταστάσεις, γεγονός που σημαίνει ότι αναλαμβάνουμε ένα ρίσκο και δοκιμάζουμε την πρόκληση ως νέα δυνατότητα

Η ανάληψη ρίσκου σ' ένα διάλογο έχει τόσο επιστημολογικό όσο και συναισθηματικό χαρακτήρα. Αυτό συμβαίνει γιατί, σε ένα διάλογο, όπου οι συμμετέχοντες μοιράζονται σκέψεις και συναισθήματα, επενδύουν κατά έναν τρόπο ένα μέρος του εαυτού τους σ' αυτόν. «Η διαδικασία του διαλόγου περιλαμβάνει ανθρώπους που σκέφτονται μαζί. Άρα ζητάει αφοσίωση, εστίαση, προσοχή και τη διάθεση να διακινδυνεύει κανείς τις ιδέες του, όταν εξηγεί και περιγράφει αυτό που πιστεύει» (Stewart, 1999). Αυτά τα στοιχεία κάνουν τους συμμετέχοντες να ανοιχτούν στη διερεύνηση και στη μάθηση αλλά, ταυτόχρονα, τους κάνει ευάλωτους.

Συχνά το ρίσκο προκαλεί συναισθηματική αναταραχή. Εμφανίζονται αρνητικά συναισθήματα, όταν οι προτάσεις ενός συμμετέχοντος αμφισβητούνται ή διερευνώνται από τους υπόλοιπους, και θετικά συναισθήματα όταν απόψεις που στην αρχή δεν φαίνεται να έχουν κάποιο βάρος, στη συνέχεια μπορούν να διαδραματίσουν ουσιαστικό ρόλο στη περαιτέρω αναζήτηση.

Στη σημερινή σχολική τάξη οι μαθητές μερικές φορές μοιάζει να βαδίζουν στα τυφλά, λαμβάνοντας υπόψη τον τρόπο που σκέφτονται ή ενεργούν. Σε μια τέτοια τάξη, με βάση όσα υποστηρίχτηκαν παραπάνω, ο ουσιαστική αξιοποίηση του διαλόγου θα μπορούσε να λειτουργήσει καταλυτικά. Όμως, μια διερευνητική διαδικασία, που περιλαμβάνει ρίσκο, μπορεί να προκαλέσει σοβαρή αναστάτωση. Είναι πολύ σημαντικό η όποια αναστάτωση να μην βιωθεί ως υπερβολική. Μια υπερβολή που ξεπερνάει κατά πολύ την υπάρχουσα ισορροπία μπορεί να προκαλέσει τόσο άγχος ώστε να οδηγήσει τους μαθητές στην εγκατάλειψη. Είναι σημαντικό ο δάσκαλος να μην ανακινεί το θέμα του ρίσκου στο πλαίσιο του διαλόγου και να δημιουργεί ένα περιβάλλον μάθησης που θα χαρακτηρίζεται από σεβασμό και από ατμόσφαιρα αμοιβαίας εμπιστοσύνης, που, όμως, είναι πιθανό να περιλαμβάνει και στιγμές αβεβαιότητας (Alro & Kristiansen,1998). Με το διάλογο γίνεται μετακίνηση από μία κατάσταση ασφάλειας σε μια κατάσταση ρίσκου, η οποία δε μπορεί να λειτουργήσει σε οποιεσδήποτε συνθήκες φόβου ή πίεσης (Isaacs,1994).

Προς αυτήν την κατεύθυνση, ένα βασικό ερώτημα που τίθεται είναι πώς ο δάσκαλος μπορεί να λειτουργήσει ως επόπτης, μη επιτρέποντας τους μαθητές να χάνονται, όταν αντιλαμβάνονται το ρίσκο αλλά ούτε και σπεύδοντας να τους «σώσει», περιορίζοντας το ρίσκο.

Αυτό που μπορεί να συμβεί στη σχολική τάξη, όπου αξιοποιείται ουσιαστικά ο διάλογος, φαίνεται απρόβλεπτο. Ωστόσο, αυτό δεν θα πρέπει να αποθαρρύνει τον εκπαιδευτικό, οδηγώντας τον πίσω στο «ασφαλές» αλλά περιορισμένης εμβέλειας περιβάλλον της παραδοσιακής τάξης, αλλά να τον ενεργοποιεί ώστε να χρησιμοποιεί τις δυνατότητες για μάθηση που είναι διαθέσιμες στο περιβάλλον του ρίσκου. Εργαζόμενοι σ' ένα τέτοιο περιβάλλον, οι συμμετέχοντες αντιλαμβάνονται, μέσα από τη διαδικασία της ανάπτυξης του διαλόγου, ότι το κλίμα στην ομάδα αλλάζει εξαιτίας της απόκτησης της γνώσης μέσα από τη συλλογική διαδικασία.

*Περί Ισότητας*

Ο διάλογος βασίζεται στην αρχή της ισότητας. Στο διάλογο δεν υπάρχει επίδειξη ισχύος και κανείς δε προσπαθεί να νικήσει (Bohm,1996). Κανείς από τους συμμετέχοντες δεν μπορεί να είναι ανώτερος από τον άλλο. Ο διάλογος προοδεύει σύμφωνα με τη δυναμική που ασκεί η ίδια η έρευνα και δεν προδιαγράφεται το αποτέλεσμα, ώστε να προκύψουν συγκεκριμένα συμπεράσματα. Η διαδικασία του διαλόγου δεν αλλοιώνεται από τους ρόλους των προσώπων που συμμετέχουν σ' αυτόν και την πιθανή πίεση που συνδέεται μ' αυτούς του ρόλους.

Το ερώτημα που προβάλλει εδώ είναι πώς μπορούν να λειτουργήσουν τα παραπάνω στοιχεία μέσα στη σχολική τάξη, καθώς οι διαδικασίες της διδασκαλίας και της μάθησης σχετίζονται πολύ στενά με τους ρόλους του δασκάλου και του μαθητή σε μια σχέση που δεν είναι συμμετρική; Ο δάσκαλος και οι μαθητές φυσικά είναι άνισοι επιστημονικά. Σε αντίθετη περίπτωση δεν θα υπήρχε λόγος διδασκαλίας. Μπορούν, ωστόσο, να διατηρήσουν την ισότητα σ' ένα διαπροσωπικό επίπεδο επικοινωνίας και σχέσης.

Είναι αυτονόητο ότι η συμμετοχή σε ένα διάλογο δε μπορεί να προκύψει κατόπιν πίεσης από οποιονδήποτε. Στη σχολική τάξη ο δάσκαλος μπορεί να προκαλέσει τους μαθητές σ' ένα διάλογο έρευνας, αλλά, για να ενεργοποιηθεί αυτός ο διάλογος, πρέπει να γίνει αποδεκτή η πρόσκληση από τους μαθητές. Η έννοια της πρόσκλησης συνδέεται άμεσα με την έννοια της ισότητας. Στην περίπτωση που οι μαθητές πιεστούν να δεχτούν την πρόκληση του εκπαιδευτικού σε διάλογο, παραβιάζεται η αρχή της αξίας της ισότητας και, κατά συνέπεια, τίθεται σε αμφισβήτηση η αποτελεσματικότητά του.

Αναφερόμενη στη μάθηση των μαθηματικών, η Mellin-Olsen (1993) περιγράφει το διάλογο ως «μια μέθοδο αντιμετώπισης και διερεύνησης της διαφωνίας σε φιλικά και συλλογικά πλαίσια». Ωστόσο, είναι σημαντικό να επισημανθεί ότι η ύπαρξη ισότητας δεν σημαίνει και ύπαρξη συμφωνίας. Σκοπός του διαλόγου είναι η εξέλιξη της επιστήμης και στην περίπτωση του σχολείου η μάθηση του μαθητή. Στην τελευταία περίπτωση, είναι ιδιαίτερα σημαντικό ο διάλογος να διέπεται από εκείνα τα χαρακτηριστικά, τα οποία εξασφαλίζουν την ισότητα στην επιστημονικά άνιση σχέση δασκάλου και μαθητών.

Ο Rogers (1994) εστιάζεται σε τρία βασικά προσόντα που πρέπει να χαρακτηρίζουν ένα πρόσωπο, το οποίο θέλει να διευκολύνει ένα άλλο πρόσωπο κατά τη διάρκεια ενός διαλόγου. Αυτά τα προσόντα είναι *η καταλληλότητα, η κατανόηση και η θετική διάθεση*. Το να είναι κανείς κατάλληλος σημαίνει να είναι γνήσιος, αυθεντικός, χωρίς κανένα στοιχείο προσποίησης. Οι σκέψεις και τα συναισθήματα αυτού που διευκολύνει τη διαδικασία πρέπει να είναι σε συμφωνία με τον τρόπο που ενεργεί και αυτό να είναι εμφανές σε αυτόν που προσκαλείται σε διάλογο. Για παράδειγμα, ένας δάσκαλος σχολιάζει «δεν ξέρω ούτε εγώ», σηματοδοτώντας μια φιλική και ισότιμη σχέση, που ενθαρρύνει τους συμμετέχοντες να νιώσουν ανοιχτοί και ελεύθεροι στην αναζήτηση και διερεύνηση. Το δεύτερο προσόν ενός διευκολυντή διαλόγου, η κατανόηση αναφέρεται στην προσπάθειά του να καταλάβει τον κόσμο του άλλου προσώπου σαν να ήταν δικός του. Έτσι, μπορεί να βοηθήσει το άλλο πρόσωπο να ξεκαθαρίσει την άποψή του, έχοντας απόλυτη συναίσθηση της δικής του άποψης και, ταυτόχρονα, του κινδύνου που διατρέχει να την αλλάξει και ο ίδιος. Το τρίτο προσόν, η θετική διάθεση, συνδέεται με το γεγονός ότι, για να είναι κανείς ικανός να βοηθήσει ένα άλλο πρόσωπο, πρέπει να το αποδεχτεί και να το σεβαστεί πρώτα. *Είναι αναγκαίο να σεβαστεί κανείς την διαφορετικότητα του άλλου χωρίς να έχει πρόθεση να τον αλλάξει ως άτομο.* Τα τρία παραπάνω προσόντα, κατά τον Rogers (1994), μπορούν να εξασφαλίσουν τις συνθήκες που πρέπει να πληρούνται, για να διατηρηθεί η ισότητα ακόμα και σε μια σχέση επιστημονικά άνιση, όπως αυτή του δασκάλου με το μαθητή, επιτυγχάνοντας ποιότητα επαφής και επικοινωνίας που μπορεί να βελτιώσει τη διαδικασία της μάθησης.

Κανένας διάλογος δεν είναι δυνατό να διεξαχθεί με τρόπο καθορισμένο εκ των προτέρων. Μπορεί να εξελιχθεί μόνο με βάση τις δικές του δυναμικές πηγές, που είναι οι απόψεις, τα συναισθήματα, οι προθέσεις, οι αντιδράσεις και οι όποιες άλλες ενέργειες αυτών που συμμετέχουν, έχοντας ως βασική αρχή την ισότητα. Η αρχή της ισότητας υπήρξε καθοριστικό στοιχείο της παιδαγωγικής του Freire(1974), όπως, επίσης, και των εκπαιδευτικών μελετών για το διάλογο στην τάξη, που εμπνεύστηκε ο Habermas (Young 1992).

*Διαλογικές πράξεις*

Ο διάλογος μπορεί να ειδωθεί και ως μια διαδικασία που περιλαμβάνει πράξεις, οι οποίες οδηγούν σε επαφή, σε εντοπισμό, σε αναγνώριση, σε υποστήριξη, σε σκέψη που διατυπώνεται φωναχτά, σε διαμόρφωση, σε πρόκληση και σε εξέλιξη. Αυτή την οπτική, οι Alro και Skovsmose(2002), την όρισαν ως *δεύτερο χαρακτηριστικό του διαλόγου.* Σύμφωνα με αυτούς, το δεύτερο χαρακτηριστικό του διαλόγου μπορεί να ειδωθεί ως περαιτέρω εξειδίκευση, που σχετίζεται με εμπειρικές παρατηρήσεις, ενώ το πρώτο χαρακτηριστικό – η αναζήτηση, η ανάληψη ρίσκου, η ισότητα - αναφέρεται σε πλευρές του διαλόγου που παρουσιάζονται στη βιβλιογραφία και βασίζεται σε μια ιδανική αντίληψη του διαλόγου.

Στο βιβλίο του «Έρευνα μέσω διαλόγου», ο Gordon Wells (1999) κάνει την ακόλουθη τοποθέτηση: «συνοπτικά θα προτείνω ότι οι τάξεις θα πρέπει να γίνουν κοινότητες έρευνας, όπου το αναλυτικό πρόγραμμα θα αντιμετωπίζεται σα να δημιουργήθηκε από πολλά είδη συζήτησης, μέσω των οποίων οι δάσκαλοι και οι μαθητές δίνουν νόημα στα στοιχεία της ατομικής και της κοινωνικής σημασίας μέσω της δράσης, της γνώσης, της οικοδόμησης και του αναστοχασμού». Έχοντας κατά νου τη μαθηματική εκπαίδευση, η δήλωση του Wells φαίνεται να περιλαμβάνει μια πρόταση να ξεκινήσει κανείς από το παράδειγμα της άσκησης και να φτάσει στο πεδίο της έρευνας. Έτσι, ο διάλογος αναδεικνύεται σε μια πολύ σημαντική πλευρά της μαθησιακής διαδικασίας του συγκεκριμένου αντικείμενου.

Οι διαδικασίες μάθησης δεν μπορούν να παρατηρηθούν άμεσα. Μπορούν, ωστόσο, να παρατηρηθούν άμεσα η λεκτική αναζήτηση που αναπτύσσεται μεταξύ των μαθητών και οι εκφράσεις των αντιδράσεων και των ενεργειών τους, που, όμως, συνιστούν μόνο μια ματιά στη μαθησιακή διαδικασία. Ο Lindfors (1999) υποστηρίζει χαρακτηριστικά : «είναι ένα ατελές παράθυρο για να είναι κανείς σίγουρος αλλά είναι το μόνο που έχουμε». Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι το δεύτερο χαρακτηριστικό του διαλόγου δεν βασίζεται σε μια ανάλυση της επικοινωνιακής διαδικασίας. Είναι ένας εμπειρικός τρόπος διαλόγου, δηλαδή, μια διαλογική πράξη και βασίζεται στην παρουσίαση των παρατηρήσεων. Σ' αυτό το σημείο πρέπει να αναφερθεί ότι κάποια είδη μάθησης, όπως, για παράδειγμα, η πολύ έντονη εξάσκηση, παρόλο που μπορούν να προσφέρουν στη μάθηση, πολύ δύσκολα μπορεί να θεωρηθεί ότι συνιστούν πράξη διαλόγου.

*Διάλογος και μάθηση στη σχολική τάξη*

Μια διαλογική πράξη στη σχολική τάξη, επειδή περιλαμβάνει το δάσκαλο, έχει νόημα να λέγεται διαλογική διδασκαλία. Ο δάσκαλος είναι υπεύθυνος να διευθύνει τη τάξη, τις καταστάσεις που προκύπτουν και να προχωράει σε αποφάσεις, όταν κρίνει ότι αυτό είναι απαραίτητο. Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε ότι στο πλαίσιο της σχολικής τάξης υπάρχουν πολλά στοιχεία επικοινωνίας που δεν μπορούν να χαρακτηριστούν ως διαλογικά, όπως, για παράδειγμα, ερωτήσεις του τύπου «σωστό ή λάθος» ή «ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής». Γενικότερα, μπορούμε να πούμε ότι δύσκολα προσφέρονται στο σχολείο οι προϋποθέσεις να δράσει κανείς με διάλογο.

Οι Alro και Skovsmose (2002) διευκρινίζουν πως οι ίδιοι δεν θεωρούν το διάλογο ως απάντηση σε οποιοδήποτε πρόβλημα στην εκπαίδευση ή στη διδασκαλία. Μπορεί, για παράδειγμα, σε μια συζήτηση, ένας από τους συμμετέχοντες να μην έχει καμία γνώση πάνω στο προς συζήτηση θέμα. Μπορεί, ακόμα, να θέλουμε να ελέγξουμε, να εκτιμήσουμε, να αξιολογήσουμε κάποιες εξειδικευμένες γνώσεις σχετικές με κάποιο θέμα. Δεν είναι λίγες αυτές οι καταστάσεις στην εκπαίδευση. Οι πρακτικές που εφαρμόζονται σε αυτές της περιπτώσεις από τον εκπαιδευτικό θεωρούνται επαρκείς, παρόλο που δεν πρόκειται για πρακτικές διαλόγου. Ωστόσο, η σημασία του διαλόγου για την εκπαιδευτική διαδικασία είναι, κατά τους ίδιους, τεράστια.

Οι Skovsmose και Valero (2001) μελέτησαν τους τρόπους με τους οποίους ο διάλογος μπορεί να υποστηρίξει μια κριτική θεώρηση της διδασκαλίας των μαθηματικών, εντοπίζοντας πιθανές σχέσεις μεταξύ της μαθηματικής εκπαίδευσης και της δημοκρατίας. Η σχετική βιβλιογραφία τονίζει ότι, λόγω της 'καθαρής' φύσης των μαθηματικών, υπάρχει μια φυσική αντιστοίχηση ανάμεσα στη μαθηματική εκπαίδευση και στα δημοκρατικά ιδεώδη. Τα μαθηματικά, εξ αιτίας της λογικής τους δομής, αποτελούνται από επιχειρήματα που αποκλείουν οποιαδήποτε έννοια δογματισμού. Τα λογικά επιχειρήματα της μαθηματικής επιστήμης είναι αυτά που διέπουν τη μαθηματική σκέψη, προσφέροντας τη βάση για τον τύπο της λογικής και του διαλόγου που πρέπει να χαρακτηρίζουν μια δημοκρατία.

Σε αντίθεση με την παραπάνω οπτική, η μαθηματική εκπαίδευση στη σχολική μαθηματική παράδοση δείχνει βασικά αντιδημοκρατικά χαρακτηριστικά. Οι Borba και Skovsmose (1992) περιγράφουν μια ιδεολογία, που την ονομάζουν ιδεολογία της σιγουριάς, η οποία ασκεί το μαθητή να είναι πεπεισμένος ότι τα ερωτήματα στη τάξη των μαθηματικών έχουν μία και μόνο απάντηση. Αυτή η ιδεολογία ταιριάζει στο παραδοσιακό μαθηματικό σχολείο αλλά γίνεται πολύ προβληματική, όταν μετακινείται από αυτό το ειδικό, σχεδόν παθολογικό, πλαίσιο σε εφαρμογές της καθημερινής ζωής. Οι ερευνητές υποστηρίζουν ότι είναι αναγκαίο να αναθεωρήσουμε και να επανεξετάσουμε όλες τις πτυχές της μαθηματικής διδασκαλίας. Προς αυτήν την κατεύθυνση θεωρούν ότι έχει ιδιαίτερη αξία να μελετηθεί τι συμβαίνει στην τάξη, καθώς αυτή αποτελεί μια μικρογραφία της κοινωνίας. Επιπλέον, επιβάλλεται να αναθεωρήσουμε τις ιδιαίτερες σχέσεις μεταξύ δασκάλου και μαθητών, όπως και την ίδια τη φύση της ερευνητικής διαδικασίας.

Υιοθετώντας το παραπάνω πλαίσιο, ο Skovsmose (1994) υποστηρίζει ότι η μαθηματική ικανότητα περιλαμβάνει περισσότερα πράγματα από τη γνώση των αριθμών και των σχημάτων, καθώς και από μια ικανότητα του να χρησιμοποιεί κανείς αριθμούς και σχήματα σε διάφορες περιπτώσεις. Περιλαμβάνει, κυρίως, τη δυνατότητα του ατόμου να αναστοχάζεται και να αναθεωρεί τη σχέση των καταστάσεων και των εφαρμογών.

Τέλος, οι Alro και Skovsmose (2002), υιοθετώντας τις θέσεις του Rogers (1994), ο οποίος ισχυρίστηκε πως η ουσιαστική μάθηση υποστηρίζεται από το διάλογο και του Freire (1974), που υποστήριξε ότι η πολιτική μάθηση οριοθετείται από το διάλογο, έθεσαν ως στόχο της εργασίας τους στο πεδίο της μαθηματικής εκπαίδευσης την αναζήτηση των πηγών της ανάπτυξης της μαθηματικής ικανότητας στο διάλογο, η οποία συνοδεύει τη συλλογική αναζήτηση και διερεύνηση.

## 1.6. Η ερώτηση στη σχολική τάξη των μαθηματικών

Στη σχολική τάξη των μαθηματικών ο διάλογος συνήθως πραγματοποιείται με βάση το μοτίβο ερώτηση – απάντηση. Η ερώτηση αποτελεί σοβαρό και χρήσιμο εργαλείο για τη διδασκαλία, χωρίς ως τόσο να αποτελεί πανάκεια, όπως επισημαίνει η Ainley (1987). Αξίζει ίσως το κόπο να παραθέσουμε δύο σοβαρά αποκλίνουσες απόψεις σχετικά με το ρόλο της ερώτησης στη σχολική τάξη.

Ο γερμανός παιδαγωγός Hugo Gaudig (1860-1923) στο βιβλίο του «Η θεμελιώδης αρχή της ελεύθερης πνευματικής εργασίας,1923», χαρακτηρίζει την ερώτηση του δασκάλου προς το μαθητή ως «πνευματοκτόνο», αφού ο δάσκαλος-ερωτών παραμένει ο κυρίαρχος στην τάξη, εισάγει το αντικείμενο επεξεργασίας που εκείνος επιθυμεί, καθορίζει τους στόχους της μάθησης, αφήνει ελάχιστα περιθώρια αυτονομίας στο μαθητή, καταστρέφει τη παιδαγωγική σχέση παιδαγωγούμενου-παιδαγωγού και περιορίζει ασφυκτικά τα περιθώρια για δημιουργική δράση. Κατά την άποψή του, η ερώτηση, όπως τίθεται στη σχολική τάξη, δεν είναι φυσική. Στη καθημερινή ζωή δεν ρωτά αυτός που γνωρίζει, αλλά αυτός που αγνοεί και απαντά αυτός που γνωρίζει. «Υπάρχει, επομένως, τίποτε πιο ανόητο από την πλαστή διδακτική κατάσταση που δημιουργείται στη τάξη, όταν ο εκπαιδευτικός, προσποιούμενος άγνοια, ρωτά τους μαθητές του για πράγματα που αυτοί ποτέ δεν άκουσαν;» αναρωτιέται ο Gaudig και επισημαίνει πως η ερώτηση του δασκάλου θα έπρεπε να αντικατασταθεί από την ερώτηση του μαθητή.

Ο Aebli (1989), επίσης γερμανός παιδαγωγός και μαθητής του Piaget, στο βιβλίο του «Οι δώδεκα προϋποθέσεις για τη μάθηση», διατυπώνει έντονα την αντίδρασή του σχετικά με τις παραπάνω θέσεις του Gaudig. Θεωρεί πως στο μαθητή που ακροάται προσεκτικά συντελείται εσωτερική διαφοροποίηση, εφόσον πληρούνται οι «καλοί όροι της διήγησης». Η αρχή της ελεύθερης πνευματικής εργασίας και της αυτονομίας του μαθητή στη διδακτική διαδικασία δεν είναι εύκολο ή είναι αδύνατον να έχει εφαρμογή. Αλλά και αν ακόμα ήταν εφικτή μία τέτοια προσέγγιση, θα δημιουργούσε αξεπέραστα προβλήματα, τουλάχιστον στο μάθημα των μαθηματικών, με τις παρούσες συνθήκες. Η θέση του Gaudig, ότι ρωτά μόνο ο αγνοών δεν είναι παρά ένα «σόφισμα» τονίζει ο Aebli.

Τα είδη των ερωτήσεων που μπορεί να χρησιμοποιήσει ο δάσκαλος στη διδασκαλία είναι πολλά και οι απόψεις των ερευνητών που μελέτησαν αυτόν το τομέα αρκετές. Τι ερωτήσεις θέτει ο δάσκαλος και πως διαχειρίζεται την τάξη στη συνέχεια, χαρακτηρίζουν με καθοριστικό τρόπο τη διδακτική προσέγγιση που υιοθετεί.

Κατά τον Smith (1986), ο δάσκαλος πρέπει να ξεκινάει από εκεί που βρίσκονται οι μαθητές, προσπαθώντας να τους βοηθήσει να αναπτύξουν τα δικά τους μαθηματικά. Για το σκοπό αυτό, υποστηρίζει πως θα πρέπει «να ρωτάμε τους μαθητές συνεχώς και να μη τους λέμε τίποτα». Η θεώρηση αυτή ενθαρρύνει, μεταξύ άλλων, την αξιοποίηση ενός διαλόγου ερωταπαντήσεων που να περιέχει το στοιχείο της πρόκλησης, για να έχει κίνητρο ο μαθητής.

Το να ρωτάει κανείς χωρίς να λέει τίποτα βοηθάει και οδηγεί στη βελτίωση της τεχνικής των ερωτήσεων. Οι ερωτήσεις είναι σημαντικό να προκύπτουν μέσα από καταστάσεις που έχουν νόημα για τα παιδιά. Τέτοιου τύπου ερωτήσεις ελκύουν τους μαθητές για να κάνουν βήματα και να νιώσουν αυτοπεποίθηση σχετικά με το ότι μπορούν να προχωρήσουν. Ο μαθητής αντιμετωπίζεται μ' αυτό τον τρόπο ως ένα υποκείμενο, το οποίο δομεί τις γνώσεις του, ανταποκρινόμενο στις προβληματικές καταστάσεις που αντιμετωπίζει. Αυτό τον οδηγεί σε μια άλλη στάση απέναντι στα μαθηματικά. Ο μαθητής μέσα σε τέτοιες διαδικασίες νιώθει ότι εισακούεται και γίνεται σεβαστή η γνώμη του.

Βραχυπρόθεσμα, η παραπάνω διαδικασία μοιάζει, και ίσως να είναι, προβληματική. Αν όμως αναλογιστεί κανείς τα μακροπρόθεσμα οφέλη, πρέπει να προβληματιστεί σοβαρά για την πορεία της διδασκαλίας. Ερωτήσεις όπως οι παραπάνω έχουν χαρακτηριστεί ως *ερωτήσεις ανοιχτού τύπου ή γνήσιες ερωτήσεις* και παρέχουν πολλές δυνατότητες για συζήτηση, περιορίζοντας σημαντικά μια λαθεμένη πορεία, καθώς το όποιο λάθος ή αδιέξοδο διερευνάται από τους ίδιους τους μαθητές (Smith 1986). Οι τελευταίοι θέτουν ερωτήματα στους εαυτούς τους, στους συμμαθητές τους και στο δάσκαλό τους, γνωρίζοντας ότι παράλληλα έχουν τη βοήθειά του και ότι μ΄ αυτό το τρόπο οι απαντήσεις θα βρεθούν από τους ίδιους. Έτσι, ο ρόλος του δασκάλου ως προμηθευτή γνώσεων αποδυναμώνεται.

Τίθεται, όμως, το ερώτημα, αν η διαδικασία με την οποία το επιστημονικό ερώτημα θα καταστεί αναγνωρίσιμο από το μαθητή είναι τέτοια, ώστε στην πορεία να το κατανοήσει. Με άλλα λόγια, αν δοθούν προβλήματα ικανά να οδηγήσουν στη δόμηση νέας γνώσης, οι μαθητές, συνήθως, δεν μπορούν να τα αντιμετωπίσουν χωρίς βοήθεια και να συνδυάσουν τα αποτελέσματα με τη γνώση που πρέπει να δομηθεί. Ο δάσκαλος είναι εκείνος που μπορεί να γνωρίζει αν αυτό που προέκυψε είναι εκείνο που έπρεπε και αν το συμπέρασμα είναι νόμιμο. Αυτός είναι ο εγγυητής των ερωτήσεων που θέτει και, στη συνέχεια, της περιγραφής και της εξήγησης των αποτελεσμάτων που προκύπτουν.

Οι ερωτήσεις, είτε είναι κλειστές είτε είναι ανοιχτές, έχουν ένα συγκεκριμένο ρόλο μέσα στη τάξη. Οι ανοιχτές ερωτήσεις έχουν πολλές πιθανές απαντήσεις και χρησιμοποιούνται λιγότερο γιατί είναι δυσκολότερα διαχειρίσιμες στα πλαίσια της τάξης, σε αντίθεση με τις κλειστές ερωτήσεις που έχουν συνήθως μια συγκεκριμένη απάντηση και κατά συνέπεια διευκολύνουν το δάσκαλο. Για παράδειγμα, η ερώτηση «ποιο θα ήταν ένα καλό όνομα γι’ αυτό το σχήμα;» έχει εντελώς διαφορετικό στόχο από την ερώτηση «πόσες πλευρές έχει ένα τρίγωνο;». Η Ainley (1989) χαρακτηρίζει ερωτήσεις όπως την τελευταία ως ψευδερωτήσεις. Πρόκειται για ερωτήσεις που είναι πάντα κλειστές, περιορισμένης απάντησης και ο δάσκαλος έχει μια ειδική σωστή απάντηση στο μυαλό του. Αποτελούν συχνά ένα τρόπο για να εξασφαλίζεται η προσοχή των παιδιών και όχι η ουσιαστική συμμετοχή τους.

Ένα κλασσικό παράδειγμα, που θεωρείται ότι καταδεικνύει την προσέγγιση «διδάσκω χωρίς να λέω τίποτα» είναι ο πλατωνικός διάλογος *Μένον*. Σ’ αυτόν το διάλογο, ο Σωκράτης υποστηρίζει ότι μπορεί να κάνει έναν αμόρφωτο μικρό σκλάβο, με κατάλληλες ερωτήσεις, να ανακαλέσει στη μνήμη του απόψεις και γνώμες που έχει στο υποσυνείδητό του, ώστε να μάθει τελικά στοιχεία γεωμετρίας. Ο Σωκράτης ισχυρίζεται ότι δεν λέει τίποτα στο σκλάβο. Ισχύει όμως αυτό; Παρακάτω παρατίθεται ένα μικρό απόσπασμα από τον εν λόγω διάλογο. Ο Σωκράτης δείχνει ένα σχήμα στο παιδί:

*Σωκράτης: Περιέχει αυτό τέσσερα τετράγωνα το καθένα ίσο με το αρχικό;*
*Παιδί: Ναι*
*Σωκράτης: Πόσο μεγάλο είναι τότε; Θα μπορούσε να είναι τέσσερις φορές τόσο μεγάλο;*
*Παιδί: Φυσικά.*
*Σωκράτης: Το τέσσερις φορές είναι το ίδιο με το δύο φορές;*
*Παιδί: Φυσικά όχι.*
*Σωκράτης: Άρα διπλασιάζοντας τη πλευρά δεν μας έχει δώσει διπλάσιο σχήμα αλλά τετραπλάσιο σχήμα;*
*Παιδί: Αλήθεια είναι.*
*Σωκράτης: Τι σκέφτεσαι Μένων; Έχει απαντήσει με βάση κάποιες απόψεις που δεν ήταν δικές του;*
*Μένων: Όχι ήταν όλες δικές του.*

Παρατηρούμε ότι καθ’ όλη τη διάρκεια του διαλόγου το παιδί δε κάνει τίποτε άλλο από το να συμφωνεί με το Σωκράτη. Η τεχνική του Σωκράτη επιβάλει στην πραγματικότητα μια καταναγκαστική κατάσταση. Οι ερωτήσεις είναι έτσι δοσμένες, ώστε το παιδί να οδηγείτε υποχρεωτικά στις απαντήσεις που δίνει. Του παρέχεται πολύ μικρή ευκαιρία να απαντήσει διαφορετικά, ακόμα και αν είχε εμπιστοσύνη στον εαυτό του να το κάνει.

Το να υποστηρίζει κανείς ότι αυτό το είδος των ερωτήσεων δεν δίνει καμία πληροφορία είναι λάθος. Ο δάσκαλος που θέτει τέτοιες ερωτήσεις κάνει συγχρόνως δύο πράγματα. Το ένα είναι ότι ρωτάει και το άλλο ότι δίνει πληροφορία.

Έχει μεγάλη σημασία το πώς κάθε τύπος ερώτησης μεταφέρει πληροφορία. Ο ερωτών, συνήθως, επισημαίνει, με τον τρόπο που κάνει την ερώτηση, ποιο είναι το ενδιαφέρον στοιχείο για εκείνον. Όταν ο δάσκαλος θέτει μια ερώτηση, θέλει να προκαλέσει με κάποιο τρόπο τη προσοχή στα στοιχεία εκείνα που ο ίδιος θεωρεί σημαντικά. Προσπαθεί να περάσει στους μαθητές το μήνυμα ότι εδώ υπάρχει κάτι ουσιαστικό και πρέπει να γνωρίζουν ή να βρουν κάτι γι' αυτό. Το επιδιωκόμενο μήνυμα δεν είναι πάντα εύκολα αποκωδικοποιήσιμο. Ένα παράδειγμα, που αναδεικνύει ένα τέτοιο στοιχείο, είναι το εξής: Ένας συνάδελφος περπατάει με το γιο του σ΄ ένα δρόμο που φαίνεται να έχει στροφές. Κάποια στιγμή ρωτάει το γιο του: «Πιστεύεις ότι αυτός ο δρόμος έχει στροφές ή είναι ευθεία;» Το παιδί απαντάει: «Μοιάζει να έχει στροφές αλλά αν είχε δεν θα έκανες αυτή την ερώτηση. Άρα, μάλλον θα είναι ευθεία.»

Η παραπάνω κατηγορία ερωτήσεων, που έχει να κάνει με την άμεση επικέντρωση σ' ένα συγκεκριμένο σημείο και ίσως προκαλεί περαιτέρω σκέψεις, συνηθίζεται σχεδόν αποκλειστικά στις διδασκαλίες (Ainley,1989). Είναι ένας τρόπος να οδηγήσουμε κάποιον σ' ένα άλλο επίπεδο ενός προβλήματος. Η ίδια επισημαίνει ότι σ΄ αυτόν τον τύπο ερωτήσεων είναι πάρα πολύ σημαντικός ο χρόνος που παρέχει ο δάσκαλος στους μαθητές του για σκέψη. Τέτοιες ερωτήσεις είναι περισσότερο αποτελεσματικές, όταν ο δάσκαλος δεν περιμένει αμέσως μια απάντηση. Σχετικά με το χρόνο αναμονής μιας απάντησης, οι Βαϊνάς (1998) και Ματσαγγούρας (1998) τονίζουν ότι ο δάσκαλος πρέπει να αναμένει τουλάχιστον τρία έως πέντε δευτερόλεπτα μετά από μια ερώτηση.

Οι ερωτήσεις στην τάξη συχνά έχουν τυπολατρικό χαρακτήρα και από τους δασκάλους και από τους μαθητές. Έτσι, χάνουν τη δυναμική τους ως τεχνική διδασκαλίας ή ως φυσικό μέσο επικοινωνίας και αλληλεπίδρασης. Η αντίθεση είναι ξεκάθαρη, όταν οι μαθητές εργάζονται πάνω σ' ένα πρότζεκτ, για το οποίο ο δάσκαλος δε γνωρίζει τίποτε ακόμα, το οποίο μπορεί να είναι ίσως μια δικιά τους έρευνα ή ένα πρόγραμμα Logo. Σε μια τέτοια περίπτωση πολλές από τις ερωτήσεις του δασκάλου είναι γνήσιες (ανοιχτές) ερωτήσεις (Ainley 1989), όπως φαίνεται από την ποιότητα των απαντήσεων, που είναι αρκετά διαφορετική από την ποιότητα των απαντήσεων σε τυπικές ερωτήσεις. Αυτό συμβαίνει γιατί οι μαθητές σε τέτοιες περιπτώσεις μιλούν πολύ πιο ελεύθερα. Πρόκειται για συζήτηση και, έτσι, δε νιώθουν ότι ελέγχονται για τις γνώσεις τους. Σε μια συζήτηση δεν αισθάνεται κανείς υπό τη πίεση να πρέπει συνεχώς να απαντάει. Στο ίδιο άρθρο η Ainley επισημαίνει, ωστόσο, ότι η διδασκαλία με τη χρήση ερωτήσεων μπορεί να είναι συχνά αποτελεσματική αλλά δεν είναι πανάκεια, όπως υποστηρίζουν πολλοί.

Οι Kawanaka και Stigler(1999) μελέτησαν τη χρήση των ερωτήσεων από το δάσκαλο στη Γερμανία, στην Ιαπωνία και στις Ηνωμένες Πολιτείες. Παρατήρησαν ότι οι διδασκαλίες γίνονται με μορφή διαλόγου, ο οποίος χαρακτηρίζεται από τη κυριαρχία του δασκάλου και από επαναλαμβανόμενες ερωταπαντήσεις μεταξύ δασκάλου και μαθητών και στις τρεις χώρες. Το αν αυτά τα χαρακτηριστικά του διαλόγου είναι θετικά ή αρνητικά για τη μάθηση αποτελεί ένα ερώτημα προς διερεύνηση. Για παράδειγμα, θα μάθαιναν περισσότερα οι μαθητές, αν τους επιτρεπόταν να μιλήσουν περισσότερο στη τάξη; Είναι καλύτερα ο δάσκαλος να θέτει πολλές ερωτήσεις και να παίρνει απαντήσεις από πολλούς μαθητές ή να θέτει λιγότερες ερωτήσεις και να παίρνει μακροσκελέστερες απαντήσεις; Αυτές οι ερωτήσεις, παρότι είναι ξεκάθαρες και ευθείες, είναι δύσκολο να απαντηθούν, όπως δείχνει μια μακριά σειρά από εμπειρικές έρευνες που έχουν γίνει.

Οι Kawanaka και Stigler(1999) πραγματοποίησαν δύο έρευνες, στις οποίες εξετάστηκε η χρήση των ερωτήσεων από τους δασκάλους στην όγδοη τάξη των μαθηματικών στις τρεις χώρες που αναφέρθηκαν παραπάνω. Η πρώτη έρευνα, στην οποία πρωτίστως χρησιμοποιήθηκε η ποσοτική ανάλυση, έθεσε δύο ερωτήματα:

- Πόσο μιλούν οι δάσκαλοι και πόσο οι μαθητές κατά τη διάρκεια μιας διδακτικής ώρας;
- Τι είδους πράγματα λένε οι δάσκαλοι και τι οι μαθητές;

Η δεύτερη έρευνα αφορούσε σε ποιοτικά στοιχεία που αναφέρονται στους τρόπους χρήσης των ερωτήσεων από τους δασκάλους στις τρεις κουλτούρες και έθεσε τα εξής τρία ερωτήματα:

- Πως σχετίζονται οι ερωτήσεις υψηλού επιπέδου με τους εκπαιδευτικούς στόχους των δασκάλων;

- Πότε χρησιμοποιούν ερωτήσεις υψηλού επιπέδου κατά τη διάρκεια του μαθήματος;
- Τι είδους ερωτήσεις υψηλού επιπέδου χρησιμοποιούνται;

Ως ερωτήσεις υψηλού επιπέδου χαρακτηρίστηκαν οι ερωτήσεις που απαιτούν ανάλυση, σύνθεση, αιτιολόγηση και εκτίμηση, ενώ ως ερωτήσεις χαμηλού επιπέδου αυτές που απαιτούν απλώς να ανακαλεί ο μαθητής στη μνήμη του κάποιες πληροφορίες και γνώσεις που ήδη έχει.

Τα αποτελέσματα της πρώτης έρευνας έδειξαν ότι η κυρίαρχη τάση και στις τρεις χώρες ήταν οι εκπαιδευτικοί να μιλούν πολύ περισσότερο από τους μαθητές κατά τη διάρκεια μιας διδακτικής ώρας. Αναφορικά με το είδος των εκφράσεων που χρησιμοποιούσαν οι δάσκαλοι, το μεγαλύτερο ποσοστό και στις τρεις χώρες αφορούσε σε απλή παροχή πληροφορίας, ακολουθούμενο από εκφράσεις εκμαίευσης και, στη συνέχεια, καθοδήγησης. Σχετικά με τη λεκτική δραστηριότητα των μαθητών, το μεγαλύτερο μέρος της συνίστατο σε απαντήσεις τους στα ερωτήματα που έθετε ο εκπαιδευτικός. Τέλος, σε σχέση με τις γνωστικές απαιτήσεις του δασκάλου, και στις τρεις χώρες οι σημαντικά περισσότερες ερωτήσεις που απευθύνθηκαν στους μαθητές ήταν ερωτήσεις που κατηγοριοποιήθηκαν ως «ονομασία/κατάσταση». Σ΄ αυτές ο δάσκαλος απαιτεί από τους μαθητές να διατυπώσουν μια σχετικά σύντομη απάντηση, όπως ονομασίες, τρόποι, υπολογισμοί, απλοί κανόνες και μέθοδοι που ήταν ήδη γνωστά.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της δεύτερης έρευνας, και στις τρεις χώρες, οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούσαν έναν πολύ μικρό αριθμό ερωτήσεων υψηλού επιπέδου, οι οποίες διέφεραν ως προς το είδος ανάλογα με τις δραστηριότητες που δίνονταν στους μαθητές. Μόνο από τους γιαπωνέζους δάσκαλους χρησιμοποιούνταν ερωτήσεις υψηλού επιπέδου, με τις οποίες οδηγούνταν οι μαθητές τους να διερευνήσουν μεθόδους επίλυσης, να μοιραστούν τις προσωπικές τους σκέψεις και, τελικά, να φτάσουν σε λογικά συμπεράσματα. Οι περισσότερες ερωτήσεις, ωστόσο, ζητούσαν περιγραφή και αιτιολόγηση και δεν μπορούν, κατά τη γνώμη των ερευνητών, να χαρακτηριστούν ως ερωτήσεις υψηλού επιπέδου, καθώς δεν είχαν διερευνητικό χαρακτήρα.

Ο Lindfors (1999) τονίζει την αξία των διερευνητικών ερωτήσεων, επισημαίνοντας ότι κάθε ερώτηση δεν είναι διερευνητική, ενώ το αίτημα για διερεύνηση μέσω μιας ερώτησης μπορεί να εκφραστεί με πολλούς τρόπους. Αυτή η διάκριση είναι χρήσιμη, καθώς βοηθά στην αντίστοιχη διάκριση του εκπαιδευτικού που θέτει ερωτήσεις γενικά, από αυτόν που πραγματικά αναζητά και διερευνά. Οι ερωτήσεις, του τύπου «σωστό ή λάθος» ή «ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής», που έχουν ήδη αναφερθεί, οδηγούν, συνήθως, σε μηχανικές ή αναπαραγόμενες απαντήσεις και όχι σε αναστοχασμό πάνω στο περιεχόμενό τους.

Ο δάσκαλος ως ερωτών βρίσκεται στις παραδοσιακές τάξεις, όπου οι μαθητές καλούνται, κατά κανόνα, να ακολουθούν την οπτική του, για να απαντήσουν σε ερωτήσεις, των οποίων ο ίδιος γνωρίζει από πριν την απάντηση. Αντίθετα, ο δάσκαλος ως αναζητών και ως διερευνητής έχει έναν τρόπο να αναρωτιέται και μια συμπεριφορά περιέργειας σε ό,τι συμβαίνει στο πλαίσιο της τάξης, εστιάζοντας, παράλληλα, στις ερωτήσεις χωρίς ο ίδιος να γνωρίζει απαραίτητα από πριν τη σωστή απάντηση.

# Κεφάλαιο Δεύτερο
# Μεθοδολογία της έρευνας

## 2.1. Ερευνητικό πρόβλημα και ερευνητικά ερωτήματα

Στόχος της έρευνας που πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο αυτής της εργασίας είναι η μελέτη του διαλόγου, όπως αυτός υλοποιείται μέσα από την αλληλουχία ερώτηση – απάντηση, ως μορφής επικοινωνίας και αλληλεπίδρασης στην τάξη των μαθηματικών(ερευνητικό πρόβλημα).

Ειδικότερα, εξετάστηκαν τρία πεδία σχετικά με το διάλογο, όπως αυτός οριοθετήθηκε παραπάνω. Το πρώτο πεδίο, που επικεντρώνεται σε ποσοτικά χαρακτηριστικά του διαλόγου, αφορά στη χρονική διάρκεια που μιλάει ο δάσκαλος και οι μαθητές κατά τη διάρκεια μιας διδασκαλίας, στον αριθμό των ερωτήσεων που τίθενται και στο ποιος θέτει τις ερωτήσεις (ερευνητικό ερώτημα 1). Το δεύτερο πεδίο, που συνδέεται με ποιοτικά χαρακτηριστικά του διαλόγου, εστιάζεται στο περιεχόμενο των ερωτήσεων (ερευνητικό ερώτημα 2), ενώ το τρίτο σχετίζεται με δομικά στοιχεία του διαλόγου, δηλαδή, με τον τρόπο που το μοτίβο ερώτηση – απάντηση ενεργοποιείται κατά τη διδασκαλία, για να συγκροτηθούν μονάδες διαλόγου (ερευνητικό ερώτημα 3). Όπως είναι φανερό, καθένα από τα τρία παραπάνω πεδία αποτελούν ιδιαίτερα στοιχεία μιας σχολικής τάξης των μαθηματικών, καθώς καθορίζουν το περιεχόμενο και την ποιότητα της επικοινωνίας και της αλληλεπίδρασης που διαμείβεται και, κατά συνέπεια, την αντίστοιχη γνώση που κατασκευάζεται από τους μαθητές.

## 2.2. Μέθοδος έρευνας

Η ερευνητική προσέγγιση που υιοθετήθηκε για τη διερεύνηση των ερευνητικών ερωτημάτων είναι η μελέτη περίπτωσης (Cohen & Manion, 1994). Η παρατήρηση, που αποτέλεσε το εργαλείο συλλογής δεδομένων, ήταν μη συμμετοχική. Δηλαδή, ο παρατηρητής δεν είχε κανενός είδους συμμετοχή στις δραστηριότητες της τάξης που παρατηρούσε.

Η ερευνητική μέθοδος της μελέτης περίπτωσης επιλέχτηκε ως η καταλληλότερη για τη συγκεκριμένη μελέτη, καθώς, σύμφωνα με τους Adelman, Jenkins και Kemmis (1980), διαθέτει ορισμένα πλεονεκτήματα που ανταποκρίνονται στις ανάγκες της και ειδικότερα (Cohen & Manion, 1994):

- Τα δεδομένα της μελέτης περίπτωσης είναι «ισχυρά στην πραγματικότητα». Αυτή η ιδιότητα του ισχυρού οφείλεται στο ότι οι μελέτες περίπτωσης είναι ρεαλιστικές και συγκρατούν τη προσοχή σε αρμονία με την εμπειρία του ίδιου του αναγνώστη, παρέχοντας έτσι μια «φυσική» βάση για γενίκευση.
- Οι μελέτες περίπτωσης επιτρέπουν γενικεύσεις είτε σχετικά με μία περίσταση είτε από μία περίσταση σε μία τάξη περιστάσεων. Η ιδιαίτερη δύναμή τους έγκειται στη προσοχή που δίνουν στη λεπτομέρεια και στην πολυπλοκότητα της ίδιας της περίπτωσης.
- Οι μελέτες περίπτωσης αναγνωρίζουν την πολυπλοκότητα και το πλαίσιο των κοινωνικών αληθειών. Μπορούν, παρακολουθώντας τις κοινωνικές καταστάσεις με προσοχή, να εκφράσουν ως ένα βαθμό τις ασυμφωνίες ή τις συγκρούσεις ανάμεσα στις απόψεις των συμμετεχόντων. Ακόμη, μπορούν να στηρίξουν εναλλακτικές ερμηνείες, εφόσον σχεδιάζονται και υλοποιούνται με προσοχή.
- Οι μελέτες περίπτωσης μπορεί να αποτελέσουν ένα αρχείο περιγραφικού υλικού, που να επιδέχεται μεταγενέστερη επανερμηνεία. Δεδομένου ότι οι εκπαιδευτικοί σκοποί και τα περιβάλλοντα είναι ποικίλα και πολύπλοκα, το να υπάρχει μια πηγή δεδομένων για ερευνητές και χρήστες, των οποίων οι σκοποί μπορεί να διαφέρουν από τους δικούς μας έχει εμφανή αξία.
- Οι μελέτες περίπτωσης είναι «ένα βήμα προς τη δράση». Ξεκινάνε μέσα σ' ένα κόσμο δράσης και συνεισφέρουν σ' αυτόν. Η ενορατική γνώση τους μπορεί να ερμηνευτεί με άμεσο τρόπο και να τεθεί σε χρήση: για την αυτο-ανάπτυξη του προσωπικού ή μεμονωμένων ατόμων, για την ανάδραση που προέρχεται μέσα από τους ίδιους τους θεσμούς και για τη διαμορφωτική αξιολόγηση στο πλαίσιο της εκπαιδευτικής πολιτικής.

## 2.3. Δείγμα και συλλογή δεδομένων

Στη παρούσα μελέτη συμμετείχαν δύο εκπαιδευτικοί μαθηματικοί (Α και Β από εδώ και στο εξής) της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης από διαφορετικά σχολεία. Τους ζητήσαμε να παρακολουθήσουμε τρεις διδασκαλίες του καθενός, τις οποίες και θα ηχογραφούσαμε. Έγινε μια σύντομη συζήτηση με τον καθένα, όπου καταστήσαμε σαφές ότι δεν χρειάζεται κανενός είδους προετοιμασία από μέρους τους και ούτε προειδοποίηση των μαθητών εκ των προτέρων. Τα τμήματα που παρακολουθήθηκαν ήταν της Α΄ και της Β΄ γυμνασίου. Δεν υπήρχε κάποιος ιδιαίτερος λόγος γι’ αυτήν την επιλογή, παρά μόνο ότι οι ώρες που διευκόλυναν εμάς έτυχε να αντιστοιχούν στις διδασκαλίες των εκπαιδευτικών σ’ αυτές τις τάξεις. Τελικά, επισκεφτήκαμε και παρατηρήσαμε δύο τμήματα της Α΄ γυμνασίου και ένα τμήμα της Β΄ γυμνασίου για καθέναν από τους δύο εκπαιδευτικούς.

Η κάθε επίσκεψή μας συνοδεύτηκε από μια ολιγόλεπτη ενημέρωση εκ μέρους μας που έδωσε το στίγμα της παρουσίας μας. Πιο συγκεκριμένα, είπαμε στους μαθητές ποιοι είμαστε και τι θέλουμε να κάνουμε χωρίς να μιλήσουμε για το ειδικό περιεχόμενο της έρευνας. Αυτό έγινε για να μην επηρεαστούν προς κάποια ειδική κατεύθυνση. Τους ενημερώσαμε ότι οι διδασκαλία θα ηχογραφηθεί και ότι η παρουσία μας δεν συνδέεται με κανένα τρόπο με την αξιολόγησή τους. Ακόμη, τονίσαμε ότι θα τηρηθεί η ανωνυμία του σχολείου. Στη συνέχεια, ο κάθε εκπαιδευτικός προέτρεψε τους μαθητές του να συμπεριφέρονται ως συνήθως και τόνισε ότι το ίδιο θα κάνει και εκείνος, ώστε να είναι όλα όσο το δυνατόν πιο κοντά στην καθημερινή πραγματικότητα.

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε κατά το σχολικό έτος 2004-2005. Σε κάθε διδασκαλία που παρακολουθήσαμε καθόμαστε με τέτοιο τρόπο ώστε να έχουμε οπτική επαφή και με τους μαθητές και με το δάσκαλο. Η ηχογράφηση έγινε με ψηφιακό μαγνητόφωνο. Παράλληλα με την ηχογράφηση κρατούσαμε σημειώσεις. Οι σημειώσεις περιείχαν πληροφορίες για διάφορα περιστατικά μέσα στη τάξη, τα οποία δεν είναι δυνατόν να γίνουν αντιληπτά με βάση την ηχογράφηση. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, δεν υπήρχε κανενός είδους εμπλοκή του παρατηρητή στη διδασκαλία. Οι μαθητές μας έβλεπαν να ηχογραφούμε, να παρατηρούμε και να καταγράφουμε.

Ο εκπαιδευτικός Α διδάσκει 17 χρόνια μαθηματικά και παρακολούθησε επιτυχώς ένα μεταπτυχιακό πρόγραμμα σχετικό με θέματα διδακτικής και μεθοδολογίας των Μαθηματικών πρόσφατα (ακαδημαϊκά έτη 2002-2003 έως 2004-2005). Στις διδασκαλίες του συμμετείχαν 25 μαθητές σε κάθε τμήμα που επισκεφτήκαμε. Στο ιδιωτικό σχολείο που εργάζεται ο εκπαιδευτικός ακολουθείται άλλο διδακτικό βιβλίο από αυτό που ορίζει το Υπουργείο Παιδείας. Τα μαθήματα που ηχογραφήθηκαν είναι και τα τρία στη γεωμετρία και έχουν ως εξής:

Α΄ Γυμνασίου:

- Είδη τετραπλεύρων – Ιδιότητες παραλληλογράμμων

- Σχέση επίκεντρης γωνίας – τόξου – χορδής

Β΄ Γυμνασίου:

- Εύρεση σημείου τομής δύο ευθειών με γραφικό και αλγεβρικό τρόπο

Η εκπαιδευτικός Β διδάσκει 24 χρόνια μαθηματικά, εργάζεται επίσης σε ιδιωτικό σχολείο και δεν έχει αντίστοιχη εμπειρία μεταπτυχιακής εκπαίδευσης. Στις διδασκαλίες που παρακολουθήσαμε συμμετείχαν 28 μαθητές στο κάθε τμήμα της Α' Γυμνασίου και 23 μαθητές στο τμήμα της Β΄ Γυμνασίου. Τα μαθήματα που ηχογραφήθηκαν είναι, επίσης, και τα τρία στη γεωμετρία και έχουν, σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα, ως εξής:

Α΄ Γυμνασίου:

- Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από ευθεία – Άθροισμα γωνιών τριγώνου
- Είδη τετραπλεύρων – Ιδιότητες παραλληλογράμμων

Β΄ Γυμνασίου:

- Μήκος τόξου – Η έννοια του ακτινίου

## 2.4. Διαδικασία ανάλυσης δεδομένων

*Πρώτο πεδίο- ερευνητικό ερώτημα1*

Όπως ήδη αναφέρθηκε, η κάθε ηχογράφηση έγινε με ψηφιακό μαγνητόφωνο. Αυτό μας επέτρεψε να μεταφέρουμε όσα ηχογραφήθηκαν στον υπολογιστή και, κατά συνέπεια, να έχουμε τη δυνατότητα να μετρήσουμε τη χρονική διάρκεια της κάθε παραμέτρου που ενδιέφερε. Έτσι, υπολογίστηκαν αρχικά:

- Τη χρονική διάρκεια κάθε διδασκαλίας
- Το συνολικό χρόνο ομιλίας του εκπαιδευτικού και των μαθητών αντίστοιχα
- Το μέσο όρο του χρόνου ομιλίας του εκπαιδευτικού και του κάθε μαθητή σε κάθε εναλλαγή μεταξύ τους
- Το συνολικό χρόνο εμπλοκής των μαθητών σε κάθε διδασκαλία.

Η τελευταία μέτρηση αφορά μόνο στις διδασκαλίες της εκπαιδευτικού Β, όπου εκτός από το χρόνο της λεκτικής συμμετοχής των μαθητών υπήρχε και ένας χρόνος άλλου τύπου συμμετοχής τους, όπως διάβασμα της εκφώνησης μιας άσκησης, σχεδιασμός ενός σχήματος στο πίνακα, λύση μιας άσκησης επίσης στο πίνακα.

Στη συνέχεια, αφού απομαγνητοφωνήθηκαν οι διδασκαλίες, μετρήθηκε πόσες ερωτήσεις γίνονταν κατά τη διάρκεια μιας διδασκαλίας, από ποιον διατυπώνονται και σε ποιον απευθύνονται. Ονομάστηκαν «εξατομικευμένες» οι ερωτήσεις που απευθύνονται προσωπικά σε κάποιον μαθητή και «ομαδικές» οι ερωτήσεις που απευθύνονται σε ολόκληρη τη τάξη και μετρήθηκαν. Επιπλέον, μετρήθηκε πόσοι μαθητές εμπλέκονται στο μάθημα κατά τη διάρκεια μιας διδασκαλίας και με ποιο τρόπο. Τέλος, εξετάστηκε ποιος δίνει τις απαντήσεις στις ερωτήσεις που διατυπώνονται.

*Δεύτερο πεδίο- ερευνητικό ερώτημα2*

Εδώ, η μελέτη των διδασκαλιών εστιάστηκε στις ερωτήσεις που θέτουν οι εκπαιδευτικοί σε κάθε μία από αυτές. Κατηγοριοποιήσαμε τις ερωτήσεις σύμφωνα με το περιεχόμενο, το είδος της νοητικής εργασίας που ζητιόταν από τους μαθητές και το βαθμό κατεύθυνσης που παρεχόταν και, στη συνέχεια, για καθεμιά από αυτές τις διαστάσεις, ομαδοποιήσαμε τις κατηγορίες με βάση τα κοινά χαρακτηριστικά που τυχόν παρουσιάζουν. Έτσι, κατασκευάστηκε ένα συστημικό δίκτυο, το οποίο επιχειρεί να χαρτογραφήσει βασικές ποιοτικές συντεταγμένες των ερωτήσεων που αξιοποιήθηκαν στις παρατηρούμενες τάξεις των μαθηματικών (βλέπε παρακάτω αντίστοιχη ενότητα). Το συστημικό δίκτυο είναι ένα διάγραμμα ροής, όπου υπάρχουν διαδρομές που δηλώνουν συνύπαρξη και αποκλεισμό. Έτσι, σε επίπεδο αναπαράστασης το άγκιστρο ({}) δηλώνει συνύπαρξη και η αγκύλη ([]) αποκλεισμό (Bliss,1983).

Στη συνέχεια, μετρήθηκε πόσες ερωτήσεις έγιναν από κάθε κατηγορία κατά τη διάρκεια της κάθε διδασκαλίας του κάθε εκπαιδευτικού και υπολογίστηκε το άθροισμα των ερωτήσεων από κάθε κατηγορία και ομάδα και για τις τρεις διδασκαλίες καθενός από τους δύο εκπαιδευτικούς. Τέλος, εξετάσαμε ποιες κατηγορίες και ποιες ομάδες ερωτήσεων συγκεντρώνουν τα υψηλότερα ποσοστά.

*Τρίτο πεδίο- ερευνητικό ερώτημα3*

Σε αυτό το πεδίο μελετήθηκαν προσεκτικά οι διδασκαλίες και εντοπίστηκαν αποσπάσματα - επεισόδια διδασκαλίας, όπου διαπραγματευόταν κάποιο συγκεκριμένο μαθηματικό νόημα μέσω διαλόγου, δηλαδή, μέσω μιας αλληλουχίας ερωτήσεων – απαντήσεων, από τα οποία επιλέξαμε όσα κρίθηκαν ως πιο αντιπροσωπευτικά. Με βάση τα δεδομένα μας, αυτά τα αποσπάσματα αφορούσαν, κυρίως, τον τρόπο με τον οποίο ο εκπαιδευτικός διαχειρίζεται τη διαπραγμάτευση του μαθηματικού νοήματος που επιχειρείται και έχουν ως εξής:

- Αδυναμία αποτελεσματικής διαχείρισης της σύγκλισης μεταξύ της σκέψης που επιθυμεί να ενεργοποιήσει ο εκπαιδευτικός και αυτής που δρομολογείται από το μαθητή
- Συνεχής επανάληψη της ίδιας ερώτησης από τον εκπαιδευτικό
- Στενή καθοδήγηση από τον εκπαιδευτικό, με τη χρήση εστιασμένων ερωτήσεων
- Απόδοση προτεραιότητας στην παρουσίαση της προγραμματισμένης ύλης στα συγκεκριμένα χρονικά περιθώρια
- Αντιμετώπιση της διδασκαλίας ως διαδικασίας διεκπεραίωσης ενός έργου με προκαθορισμένα βήματα κα τελικό στόχο.

Σε καθεμιά από τις παραπάνω περιπτώσεις εξετάσαμε ποιος είναι ο στόχος του εκπαιδευτικού κάθε φορά και ποιο το είδος των ερωτήσεων που θέτει, προκειμένου να επιτύχει το στόχο αυτό. Τέλος, επιχειρήσαμε μια αποτίμηση του βαθμού στον οποίο πέτυχε ή όχι το εγχείρημα του εκπαιδευτικού.

# Κεφάλαιο Τρίτο
# Παρουσίαση και Ανάλυση των Δεδομένων

## 3.1. Ποσοτική ανάλυση των διδασκαλιών (πρώτο πεδίο - ερευνητικό ερώτημα 1)

Η ερώτηση στη σχολική τάξη μπορεί να προέρχεται από το δάσκαλο ή το μαθητή. Ο δάσκαλος μπορεί να απευθυνθεί σ' έναν μαθητή, σε μια ομάδα μαθητών ή σε ολόκληρη τη τάξη. Στη περίπτωση που απευθύνεται σ' έναν μαθητή, η ερώτηση χαρακτηρίζεται ως εξατομικευμένη ή προσωπική, ενώ στις άλλες δύο περιπτώσεις ως ομαδική. Παράλληλα, ο μαθητής μπορεί να απευθυνθεί μέσω μιας ερώτησης στο δάσκαλο ή στους συμμαθητές του.

Από την ανάλυση των δεδομένων προκύπτει ότι το κάθε μάθημα και των δύο συναδέλφων που παρακολουθήσαμε στηρίζεται στο μοτίβο ερώτηση-απάντηση, το οποίο επαναλαμβάνεται συνεχώς. Όλες οι διδασκαλίες τους φαίνεται να επιβεβαιώνουν τις μέχρι τώρα σχετικές έρευνες (Kawanaka & Stigler 1999, Βαϊνάς 1998), με βάση τις οποίες έχει διαπιστωθεί ότι σε μια διδακτική ώρα σχεδόν όλες τις ερωτήσεις τις θέτει ο δάσκαλος. Οι ερωτήσεις του απευθύνονται σε έναν μαθητή ή σε ολόκληρη τη τάξη, ενώ δεν παρουσιάζεται η περίπτωση να γίνει ερώτηση προς μία ομάδα μαθητών, κάτι που είναι αναμενόμενο, καθώς κανείς τους δεν εργάζεται στην τάξη χωρίζοντας τους μαθητές σε ομάδες.

Στις τρεις διδασκαλίες του εκπαιδευτικού Α που παρακολουθήσαμε, αναλαμβάνει ο ίδιος σταθερά το χειρισμό όλων των παραμέτρων της διδασκαλίας και ο λόγος του καταλαμβάνει το μεγαλύτερο μέρος της. Ο συνολικός χρόνος ομιλίας του σε καθεμιά από τις τρεις διδασκαλίες του είναι 62,44%, 65,9%, 56,64% αντιστοίχως, ενώ αυτός των μαθητών είναι 37,29%, 21,36% και 24,8% αντιστοίχως. Από αυτά τα ποσοστά προκύπτει ότι ο δάσκαλος μιλάει περίπου διπλάσιο ή τριπλάσιο χρόνο σε σχέση με τους μαθητές του. Ανάλογη είναι η εικόνα που παρουσιάζεται και με το χρόνο ομιλίας σε κάθε εναλλαγή δάσκαλος-μαθητής (Πίνακας 3.1).

| Διδασκαλίες | Συνολικός χρόνος ομιλίας εκπαιδευτικού | Συνολικός χρόνος ομιλίας μαθητών |
|---|---|---|
| 1 | 21,43min – 62,44% | 12,8 min – 37,29% |
| 2 | 24,68min – 65,9 % | 8 min – 21,36% |
| 3 | 26,3 min – 56,64% | 11,56min – 24,8 % |

**Πίνακας 3.1.** Συνολικοί χρόνοι ομιλίας του εκπαιδευτικού Α κατά τις διδασκαλίες του

Σε ότι αφορά τον αριθμό των ερωτήσεων που διατυπώνονται στο πλαίσιο της διδασκαλίας, είναι χαρακτηριστικό ότι πάνω από το 90% από αυτές γίνονται από το δάσκαλο προς τους μαθητές, εκ των οποίων, κατά μέσο όρο, το 74% είναι εξατομικευμένες και μόνο το 21% είναι ομαδικές, δηλαδή απευθύνονται σε όλη τη τάξη. Οι ερωτήσεις που γίνονται από τους μαθητές αντιστοιχούν περίπου σε ποσοστό 5%.

Παράλληλα, είναι αξιοπρόσεκτο πως σχεδόν όλες οι απαντήσεις προέρχονται από τους μαθητές. Αυτό συμβαίνει διότι ο δάσκαλος φροντίζει να θέτει, να διαφοροποιεί και να κλιμακώνει τις ερωτήσεις με τέτοιο τρόπο, ώστε να καταφέρνει τελικά να πάρει μία απάντηση (Πίνακας 3.2).

| Διδασκαλίες | Σύνολο ερωτήσεων | Εξατομικευμένες ερωτήσεις δασκάλου | Ομαδικές ερωτήσεις δασκάλου | Ερωτήσεις μαθητών |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 158 | 122 – 77 % | 32 – 20% | 4 - 3% |
| 2 | 162 | 118 – 73 % | 31 – 19% | 13 - 8% |
| 3 | 184 | 131 – 71 % | 46 – 25 % | 7 - 4% |

**Πίνακας 3.2.** Οι ερωτήσεις του εκπαιδευτικού Α κατά τις διδασκαλίες του.

Παρατηρείται ακόμα ότι υπάρχει σαφής προσανατολισμός να συμμετέχουν όσο το δυνατόν περισσότεροι μαθητές στο μάθημα. Στις πρώτες δύο διδασκαλίες εμπλέκεται το 76% της τάξης, ενώ στη τρίτη διδασκαλία το 100%. Δηλαδή, ο εκπαιδευτικός εξασφαλίζει την εμπλοκή σχεδόν ολόκληρης της τάξης, διατηρώντας την έτσι σε εγρήγορση. Αυτό το επιτυγχάνει μέσα από την ιδιαίτερα σύντομη διάρκεια της κάθε εναλλαγής δάσκαλος-μαθητής. Ο μέσος όρος ομιλίας του εκπαιδευτικού σε κάθε τέτοια εναλλαγή κατά τη διάρκεια καθεμιάς από τις τρεις διδασκαλίες είναι 6,8 sec, 7,8sec, 8,9sec, ενώ των μαθητών 3,5sec, 2,6sec και 4,1sec αντίστοιχα. Μάλιστα, ορισμένες φορές η εναλλαγή δασκάλου μαθητή γίνεται κάθε ένα δευτερόλεπτο (Πίνακας 3.3).

| **Διδασκαλίες** | **Μ.Ο. χρόνου ομιλίας δασκάλου σε κάθε εναλλαγή** | **Μ.Ο. χρόνου ομιλίας μαθητή σε κάθε εναλλαγή** |
|---|---|---|
| 1 | 6,8sec | 3,5 sec |
| 2 | 7,8 sec | 2,6 sec |
| 3 | 8,9 sec | 4,1 sec |

**Πίνακας 3.3.** Μέσοι χρόνοι ομιλίας του εκπαιδευτικού Α κατά τις εναλλαγές ερώτηση – απάντηση στις διδασκαλίες του.

Ο εκπαιδευτικός Α άλλοτε αφήνει περιθώριο 3 έως 6 sec, για να σκεφτούν την απάντηση οι μαθητές, και άλλοτε επεξηγεί και επαναλαμβάνει πολλές φορές την ίδια ερώτηση ή τη σπάει σε μικρότερες βοηθητικές ερωτήσεις, έτσι ώστε να προλαβαίνουν να σκεφτούν οι μαθητές, ενώ ο εκείνος συνεχίζει να μιλάει, με αποτέλεσμα οι πρώτοι να απαντούν αμέσως μόλις ολοκληρώσει όσα ο ίδιος έχει να πει.

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι σε κάθε διδασκαλία υπάρχουν ένα ή δύο κεντρικά πρόσωπα. Δηλαδή, ο δάσκαλος επιλέγει έναν ή δύο μαθητές και δεν τους εγκαταλείπει μέχρι να καταλήξει σε κάποιο αποτέλεσμα που ΕΚΕΙΝΟΣ επιθυμεί. Οι υπόλοιποι μαθητές έχουν βοηθητικό ρόλο. Αν χρειαστεί, τους δίνεται η δυνατότητα να απαντήσουν, για να προχωρήσει η διαδικασία, που, όμως, στη συνέχεια, επανέρχεται στο κεντρικό πρόσωπο. Με τον τρόπο αυτό πραγματοποιούνται περίπου τα 2/3 της διδασκαλίας. Το υπόλοιπο 1/3 φαίνεται να έχει διαχειριστικό χαρακτήρα, καθώς καταλαμβάνεται από συνεχείς και χαμηλής διδακτικής αξίας συναλλαγές μεταξύ δασκάλου και πολλών διαφορετικών μαθητών, που φαίνεται να εξυπηρετούν εικονικά μόνο την υλοποίηση του σχεδιασμού του δασκάλου, δηλαδή την προσέγγιση της όποιας μαθηματικής ιδέας από όλους τους μαθητές στον προβλεπόμενο χρόνο. Το πρόβλημα του χρόνου επισημαίνεται από την Anley (1989) ως ένας από τους παράγοντες εκείνους που συνήθως «εξαναγκάζει» το δάσκαλο σε μια προδιαγραμμένη κατεύθυνση της διδασκαλίας, η οποία έχει ως τελικό στόχο να καταλήξει σε κάποιο αποτέλεσμα και, συγκεκριμένα, σε αυτό που εκείνος έχει κατά νου. Γίνεται φανερό, δηλαδή, ότι ο δάσκαλος έχει στόχο να καλύψει την ύλη που έχει σχεδιάσει ‘με κάθε θυσία’. Σε άλλη περίπτωση θα συνέχιζε όπως στα 2/3 του μαθήματος, καλύπτοντας όση ύλη του επέτρεπε ο υπάρχων χρόνος.

Στις διδασκαλίες της εκπαιδευτικού Β παρατηρούμε, επίσης, ότι το μεγαλύτερο μέρος της διδασκαλίας καταλαμβάνει ο δικός της λόγος . Ο συνολικός χρόνος ομιλίας της στις τρεις διδασκαλίες είναι 50,28%, 57,24%, 50,31%, ενώ των μαθητών είναι 14,34%, 13% και 8,2% αντιστοίχως. Από αυτά τα ποσοστά προκύπτει ότι μιλάει τετραπλάσιο ή πενταπλάσιο χρόνο σε σχέση με τους μαθητές της. Όπως θα παρουσιάσουμε παρακάτω, δεν συμβαίνει κάτι ανάλογο με τους χρόνους ομιλίας στη κάθε εναλλαγή μεταξύ δασκάλου και μαθητή (Πίνακας 3.4).

| **Διδασκαλίες** | **Συνολικός χρόνος ομιλίας εκπαιδευτικού** | **Συνολικός χρόνος ομιλίας μαθητών** |
|---|---|---|
| 1 | 19,28min – 50,28 % | 5,5 min – 14,34% |
| 2 | 20,6 min – 57,24 % | 4,7 min – 13 % |
| 3 | 19,71 min – 50,31 % | 3,23min – 8,2 % |

**Πίνακας 3. 4.** Συνολικοί χρόνοι ομιλίας της εκπαιδευτικού Β κατά τις διδασκαλίες της

Σε ότι αφορά τον αριθμό των ερωτήσεων, πάνω από το 95% γίνονται από τη δασκάλα, εκ των οποίων, κατά μέσο όρο, το 65% είναι εξατομικευμένες και το 32% απευθύνονται στην τάξη. Οι ερωτήσεις που γίνονται από τους μαθητές είναι μόλις 3%.

Αξιοπρόσεκτο είναι και εδώ ότι σχεδόν όλες οι απαντήσεις προέρχονται από τους μαθητές. Η εκπαιδευτικός φαίνεται να θέλει οπωσδήποτε να πάρει μια απάντηση αλλά, συνήθως, δεν επιμένει ιδιαίτερα σε έναν συγκεκριμένο μαθητή. Δίνει προτεραιότητα στο να προχωρήσει το μάθημα όπως ΕΚΕΙΝΗ θέλει και έτσι ρωτάει συχνά διαφορετικούς μαθητές, μέχρι να απαντηθεί η ερώτηση που διατύπωσε. Αν δεν απαντηθεί, απαντάει η ίδια και συνεχίζει, πράγμα που συμβαίνει λίγες φορές (Πίνακας 3.5).

| Διδασκαλίες | Σύνολο ερωτήσεων | Εξατομικευμένες ερωτήσεις δασκάλου | Ομαδικές ερωτήσεις δασκάλου | Ερωτήσεις μαθητών |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 192 | 104 – 55% | 83 – 44% | 3-1% |
| 2 | 200 | 144 – 72% | 50 – 25% | 6-3% |
| 3 | 163 | 109 – 67 % | 47 – 29% | 7-4% |

**Πίνακας 3.5.** Οι ερωτήσεις της εκπαιδευτικού Β κατά τις διδασκαλίες της.

Στις πρώτες δύο διδασκαλίες, η εκπαιδευτικός Β απευθύνεται στο 100% και στο 89% των μαθητών της τάξης αντίστοιχα, ενώ στην τρίτη διδασκαλία στο 60,86%. Στην τελευταία διδασκαλία το ποσοστό είναι μειωμένο σε σχέση με τις άλλες δύο, γιατί οι ασκήσεις ήταν πιο απαιτητικές ως προς τα σχήματα, με αποτέλεσμα ο κάθε μαθητής στον οποίο απευθυνόταν η δασκάλα να χρειάζεται αρκετό χρόνο για την κατασκευή τους και, έτσι, να μην υπάρχει δυνατότητα να δοθεί ο λόγος σε περισσότερους μαθητές. Είναι φανερός ο προσανατολισμός να εμπλακούν όσο το δυνατόν περισσότεροι μαθητές στο μάθημα.

Ο μέσος όρος του χρόνου ομιλίας της δασκάλας στις εναλλαγές εκπαιδευτικός – μαθητής, που εμφανιζόταν σε καθεμιά από τις τρεις διδασκαλίες, είναι 7,4sec, 6,7sec, 7,9sec ενώ των μαθητών 2,6sec, 2,07sec, 1,9sec αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι η εκπαιδευτικός στις πρώτες δύο διδασκαλίες μιλάει σε κάθε εναλλαγή περίπου τριπλάσιο χρόνο από τους μαθητές της, ενώ στην τρίτη τετραπλάσιο (Πίνακας 3.6).

| Διδασκαλίες | Μ.Ο. χρόνου ομιλίας δασκάλου σε κάθε εναλλαγή | Μ.Ο. χρόνου ομιλίας μαθητή σε κάθε εναλλαγή |
|---|---|---|
| 1 | 7,4sec | 2,5 sec |
| 2 | 6,7 sec | 2,07 sec |
| 3 | 7,9 sec | 1,9 sec |

**Πίνακας 3.6.** Μέσοι χρόνοι ομιλίας της εκπαιδευτικού Β κατά τις εναλλαγές ερώτηση – απάντηση στις διδασκαλίες της.

Παρότι η διάρκεια της κάθε εναλλαγής δασκάλου-μαθητή είναι ιδιαίτερα σύντομη, όπως φαίνεται από τους χρόνους ομιλίας, οι διδασκαλίες δεν διακρίνονται για την έμφασή τους στην εγρήγορση των μαθητών. Αυτό φαίνεται να οφείλεται στο ότι η εκπαιδευτικός μιλάει αργά, επεξηγεί και επαναλαμβάνει την ερώτηση, κάνοντας μικρές παύσεις των 1,2,3 δευτερολέπτων και στο ότι αφήνει συχνά μεγάλα διαστήματα αναμονής που διαρκούν από 10 έως 30 δευτερόλεπτα για διάφορους λόγους, όπως αναμονή μιας απάντησης, αναμονή να σχεδιαστεί ένα σχήμα, αναμονή μέχρι να συγκεντρωθούν όλοι οι μαθητές σ ΄αυτό που έχουν να κάνουν. Στα διαστήματα αναμονής αυτά, αρκετοί μαθητές συχνά αποπροσανατολίζονται από το θέμα που διαπραγματεύονται και η επαναφορά γίνεται, συνήθως, όταν τεθεί το ήδη υπάρχων ερώτημα ξανά ή διατυπωθεί κάποιο νέο ερώτημα από την εκπαιδευτικό.

Σ΄ αυτό το σημείο είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι, εκτός από το χρόνο της λεκτικής συμμετοχής των μαθητών, στις συγκεκριμένες διδασκαλίες παρατηρήθηκε και η παρουσία ενός χρόνου άλλου τύπου συμμετοχής τους, όπως διάβασμα της εκφώνησης μιας άσκησης, σχεδιασμός ενός σχήματος στο πίνακα, λύση μιας άσκησης επίσης στο πίνακα. Αυτός ο χρόνος, στις πρώτες δύο διδασκαλίες ,αντιστοιχεί σε ποσοστό 8% του συνολικού χρόνου διδασκαλίας, ενώ στην τρίτη διδασκαλία το ποσοστό αυτό ανέρχεται στο 13%, λόγω της μεγαλύτερης απαιτητικότητας των σχημάτων που μελετούνταν, όπως έχουμε ήδη αναφέρει. Έτσι, ο χρόνος της συνολικής συμμετοχής των μαθητών στις τρεις διδασκαλίες της εκπαιδευτικού Β διαμορφώνεται στα ποσοστά 22,14%, 21,7%, 21,2% αντίστοιχα. Δηλαδή, τελικά, ο χρόνος συμμετοχής των μαθητών στο μάθημα αντιστοιχεί περίπου στο 40% του χρόνου ομιλίας της δασκάλας σε μία διδακτική ώρα (Πίνακας 3.7)

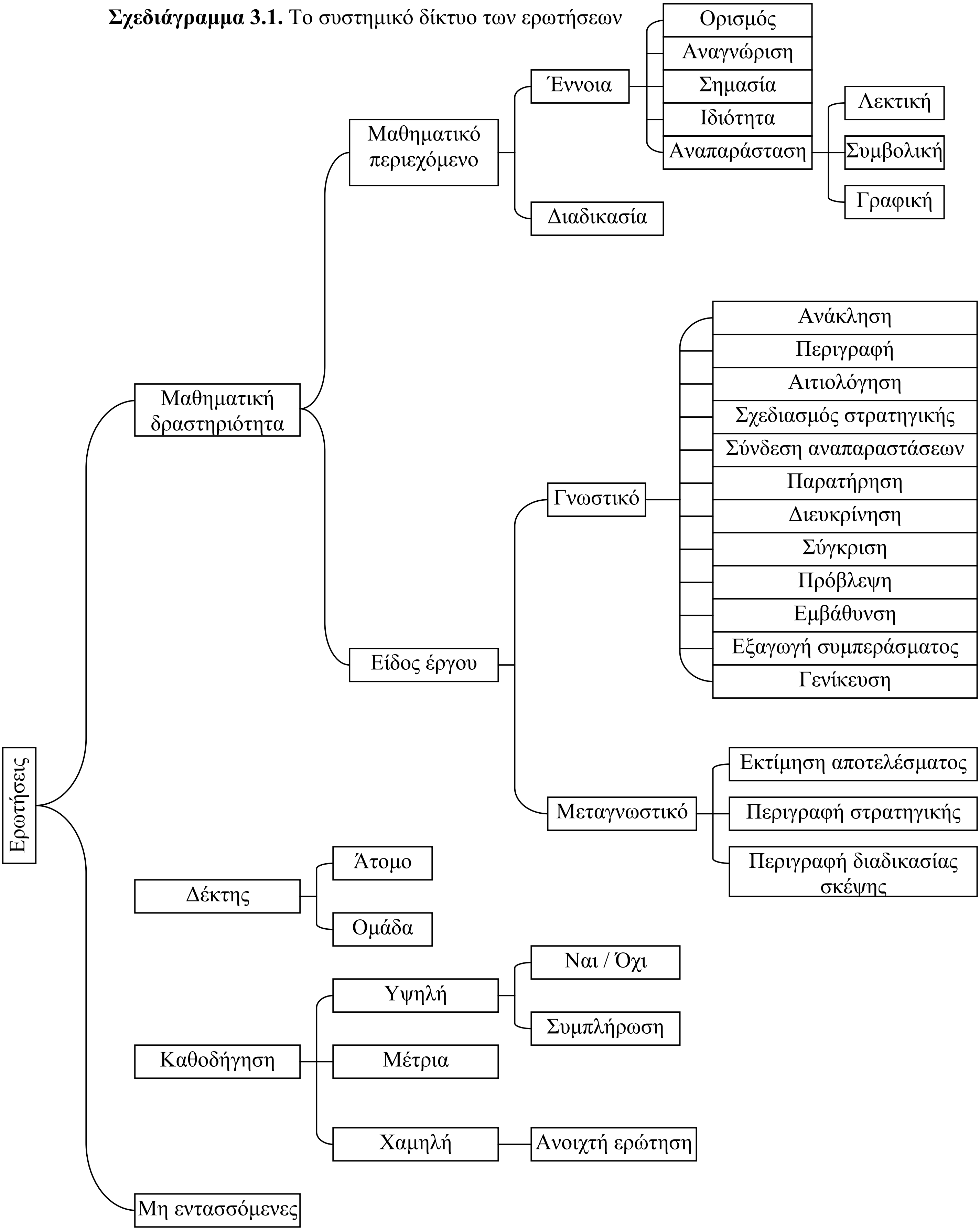
| **Διδασκαλίες** | **Συνολικός χρόνος ομιλίας εκπαιδευτικού** | **Συνολικός χρόνος συμμετοχής μαθητών** |
|---|---|---|
| 1 | 19,28min – 50,28 % | 8,5 min – 22,14% |
| 2 | 20,6 min – 57,24 % | 7,76 min – 21,7 % |
| 3 | 19,71 min – 50,31 % | 8,33 min – 21,2 % |

**Πίνακας 3. 7.** Συνολικοί χρόνοι συμμετοχής μαθητών και εκπαιδευτικού κατά τις διδασκαλίες της εκπαιδευτικού Β.

## 3.2. Κατηγορίες ερωτήσεων (δεύτερο πεδίο – ερευνητικό ερώτημα 2)

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, από τη μελέτη των διδασκαλιών των δύο εκπαιδευτικών προέκυψε ότι σχεδόν όλες οι ερωτήσεις που διατυπώνονται μέσα στην τάξη προέρχονται από το δάσκαλο. Οι ερωτήσεις των μαθητών αντιστοιχούν περίπου στο δύο με τρία τοις εκατό και είναι συνήθως διευκρινιστικές. Κατά συνέπεια, η παρακάτω ανάλυση αφορά στις ερωτήσεις του δασκάλου, οι οποίες κατηγοριοποιήθηκαν με βάση το περιεχόμενο, το γνωστικό έργο που απαιτούνταν από το μαθητή, το ποιος είναι ο αποδέκτης και το βαθμό καθοδήγησης που παρεχόταν από τον εκπαιδευτικό, όπως παρουσιάζεται στο παρακάτω συστημικό δίκτυο.

**Σχεδιάγραμμα 3.1.** Το συστημικό δίκτυο των ερωτήσεων



Στη συνέχεια, περιγράφεται και κωδικοποιείται η κάθε κατηγορία ερωτήσεων.

**Ερωτήσεις μαθηματικής δραστηριότητας:** Η μαθηματική δραστηριότητα απευθύνεται από τον εκπαιδευτικό στο μαθητή και καθορίζεται από το μαθηματικό περιεχόμενο που αποτελεί αντικείμενό της και το είδος του έργου που καλείται εκτελέσει ο μαθητής, που μπορεί να είναι γνωστικό ή μεταγνωστικό. Η μαθηματική δραστηριότητα ανατίθεται από το δάσκαλο, κυρίως, υπό μορφή ερωτήσεων, όπως προέκυψε από τις διδασκαλίες που μελετήσαμε. Έτσι, αποφασίστηκε να διακριθούν οι ερωτήσεις που αφορούσαν στην ανάθεση μαθηματικής δραστηριότητας στους μαθητές, με βάση τα δεδομένα, στις κατηγορίες που περιγράφονται παρακάτω.

**Ερωτήσεις που εστιάζουν στο μαθηματικό περιεχόμενο:** Ο δάσκαλος ζητάει από το μαθητή να αναφερθεί στον ορισμό, στην αναγνώριση, στη σημασία, στις ιδιότητες, στη λεκτική ή αλγεβρική ή γραφική αναπαράσταση μιας έννοιας. Ακόμα, ζητάει από το μαθητή να αναφερθεί σε μια διαδικασία που πρόκειται να ακολουθηθεί ή που έχει ήδη ακολουθηθεί. Αυτές τις ερωτήσεις τις περιγράφουμε ως εξής:

- *Ερωτήσεις που αναφέρονται στον ορισμό μιας έννοιας [ΟΡ]:* Ο δάσκαλος ζητάει από το μαθητή να ορίσει μια έννοια.

Ενδεικτικά παραδείγματα:

*1.Ε: Ποιες γωνίες Κυριάκο λέγονται κατακορυφήν;*
*2.Ε: Τι είναι παραλληλόγραμμο;*

- *Ερωτήσεις που αναφέρονται στην αναγνώριση μιας έννοιας [ΑΝΑΓ]:* Ο δάσκαλος ζητάει από το μαθητή να αναγνωρίσει μία έννοια.

Ενδεικτικά παραδείγματα:

*1.Ε: Η α με ποια είναι κατακορυφήν;*
*2.Ε: Μπορείς να μου βρεις μία της ω εντός εκτός και επί τα αυτά;*

- *Ερωτήσεις που αναφέρονται στη σημασία μιας έννοιας [ΣΗΜ]:* Ο δάσκαλος ζητάει από το μαθητή να αναφερθεί στο τι σημαίνει μια συγκεκριμένη έννοια.

Ενδεικτικά παραδείγματα:

*1.Ε: Όταν ακούτε τη λέξη εμβαδόν, τι σημαίνει εμβαδόν;*
*2.Ε: Δηλαδή, Γρηγόρη, τι θα πει αυτό;*

- *Ερωτήσεις που αναφέρονται στις ιδιότητες μιας έννοιας [ΙΔ]:* Ο δάσκαλος ζητάει από το μαθητή να αναφερθεί στις ιδιότητες μιας έννοιας.

Ενδεικτικά παραδείγματα:

*1.Ε: Το τραπέζιο ποια ιδιότητα έχει Δήμητρα;*
*2.Γιάννης: Τετράγωνο είναι το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις πλευρές και όλες τις γωνίες ίσες.*
*Ε: Ναι, και τι άλλο έχει;*

- *Ερωτήσεις που αναφέρονται στη λεκτική αναπαράσταση μιας έννοιας[ΛΑ]:* Ο δάσκαλος ζητάει από το μαθητή να ονοματίσει μία έννοια.

Ενδεικτικά παραδείγματα:

*1.Ε: Πως το λέμε;*
*2.Ε: Αμέσως μετά το τραπέζιο που έχει τις δυο πλευρές παράλληλες ποιο είναι το σχήμα που έχει και τις άλλες δύο πλευρές παράλληλες;*

- *Ερωτήσεις που αναφέρονται στην συμβολική αναπαράσταση μιας έννοιας[ΣΑ]:* Ο δάσκαλος ζητάει από το μαθητή να αναφερθεί σε μια έννοια με ένα σύμβολο, με έναν μαθηματικό τύπο, με έναν αριθμό.

Ενδεικτικά παραδείγματα:

*1.Ε: Έρσι ποιο γράμμα λείπει;*
*2.Ε: Μπορείς να μου πεις το μήκος του τόξου;*
*3.Ε: Πόσος είναι ο κύκλος σε μοίρες;*

- *Ερωτήσεις που αναφέρονται στη γραφική αναπαράσταση μιας έννοιας[ΓΑ]:* Ο δάσκαλος ζητάει από το μαθητή να αναφερθεί στη γραφική αναπαράσταση μιας έννοιας.

Ενδεικτικά παραδείγματα:

*1.Ε: Αν πάρω τις πλευρές του να είναι ίσες, τι σχήμα θα γίνει;*
*2.Ε: Αυτό που έχεις φέρει μήπως είναι ύψος;*

- *Ερωτήσεις που αναφέρονται σε μια μαθηματική διαδικασία [ΔΙΑΔ]:* Ο δάσκαλος ζητάει από το μαθητή να αναφερθεί σε μια μαθηματική διαδικασία, η οποία πρόκειται να ακολουθηθεί ή που έχει ήδη ακολουθηθεί.

Ενδεικτικά παραδείγματα:

*1.Ε: Μαρία, πως θα τις σχεδιάσουμε;*
*2.Ε: Άρα τι έκαν,ε λοιπόν, αυτός για να βρει το σημείο τομής;*

**Ερωτήσεις που ζητούν την εκτέλεση γνωστικού έργου:** Ο εκπαιδευτικός ζητάει από το μαθητή να προχωρήσει σε συγκεκριμένες νοητικές διαδικασίες, όπως να ανακαλέσει από τη μνήμη του πράγματα που ήδη γνωρίζει, να περιγράψει, να αιτιολογήσει, να σχεδιάσει μια στρατηγική, να συνδέσει αναπαραστάσεις, να παρατηρήσει, να διευκρινίσει, να συγκρίνει, να προβλέψει, να εξάγει συμπεράσματα, να γενικεύσει. Οι παραπάνω νοητικές διαδικασίες, όπως είναι αυτονόητο, συνδέονται με το μαθηματικό περιεχόμενο που κάθε φορά επεξεργάζεται.

Με βάση την παραπάνω οπτική, οι ερωτήσεις που διατυπώθηκαν στο πλαίσιο των διδασκαλιών των δύο εκπαιδευτικών κατηγοριοποιήθηκαν όπως παρουσιάζεται παρακάτω.

- *Ερωτήσεις ανάκλησης [ΑΝ]:* Ο δάσκαλος ζητάει από το μαθητή να ανακαλέσει από τη μνήμη του και να παρουσιάσει μαθηματικές γνώσεις και γεγονότα που ήδη γνωρίζει. Αυτές οι ερωτήσεις κατά τους Kawanaka & Stigler (1999) απαιτούν, συνήθως, μια σχετικά σύντομη απάντηση.

Ενδεικτικά παραδείγματα:

*1. Ε:Όταν λέμε σημείο τομής μας θυμίζει κάτι;*
*2.Ε:Αυτές θυμόμαστε πως τις λέμε;*

- *Ερωτήσεις περιγραφής [ΠΕΡ]:* Ο δάσκαλος ζητάει από το μαθητή να διατυπώσει τον ορισμό, τη σημασία, την ιδιότητα ή τις ιδιότητες μιας έννοιας. Ο δάσκαλος ζητάει, ακόμα, από το μαθητή να εκφράσει μια συγκεκριμένη έννοια με το όνομά της, με ένα σύμβολο, με έναν μαθηματικό τύπο ή με έναν αριθμό.

Ενδεικτικά παραδείγματα:

*1. Ε: Ποιες γωνίες Κυριάκο λέγονται κατακορυφήν;*
*2. Ε: Πως τις λέμε αυτές;*
*3. Ε: Σε τι θέση βρίσκονται αυτές;*
*4. Ε: Με ποιον αριθμό απλοποιείται το 6 και το 9;*
*5. Ε: Πες S=…;*

- *Ερωτήσεις αιτιολόγησης [ΑΙΤ]:* Ο δάσκαλος ζητάει από το μαθητή να δικαιολογήσει γιατί κάτι είναι ή δεν είναι αληθινό (έγκυρο) από μαθηματική άποψη, γιατί κάτι προχωράει ή δεν προχωράει. Οι Kawanaka & Stigler (1999) ονομάζουν αυτού του τύπου τις ερωτήσεις *reasons*, όπου οι μαθητές καλούνται, συνήθως, να απαντήσουν στην ερώτηση «γιατί;».

Ενδεικτικά παραδείγματα:

*1. Ε: Και γιατί να μην είναι η πρώτη που μας είπες, η –χ-1;*
*2. Ε: Γιατί όταν έχουμε ένα παραλληλόγραμμο με μία ορθή γωνία είναι όλες οι γωνίες ορθές;*

- *Ερωτήσεις σχεδιασμού στρατηγικής επίλυσης [ΣΧΕΔ ΣΤΡ] :* Ο δάσκαλος ζητάει από το μαθητή να περιγράψει το βήμα ή τα βήματα που θα ακολουθήσει, προκειμένου να προχωρήσει σε μια διαδικασία επίλυσης ενός δεδομένου προβλήματος, πριν οι μαθητές εργαστούν πάνω σε αυτό. Οι Kawanaka & Stigler(1999) ονομάζουν αυτού του τύπου τις ερωτήσεις *Solution Steps,* όπου οι μαθητές καλούνται, συνήθως, να απαντήσουν στην ερώτηση «Τι θα κάνουμε μετά;» ή «Πως θα κάνω…».

Ενδεικτικά παραδείγματα:

*1. Ε: Τι είπες Θεοδώρα ότι θα κάνουμε μετά;*
*2. Ε: Πως θα τα κάνω αυτά τα ημικύκλια;*

- *Ερωτήσεις σύνδεσης αναπαραστάσεων [ΣΥΝ ΑΝΑΠ]:* Ο δάσκαλος ζητάει από το μαθητή να συνδέσει μεταξύ τους διαφορετικές αναπαραστάσεις μιας έννοιας.

Ενδεικτικά παραδείγματα:

*1. Ε: Έχουμε λοιπόν 6 εξισώσεις ευθειών και απεικονίζουμε στο καρτεσιανό μας επίπεδο. Ψάχνουμε λοιπόν να βρούμε ποιες 2 ανταποκρίνονται.*
*Ποιες 2 εξισώσεις, να γίνω πιο σαφής, ποιες 2 εξισώσεις ανταποκρίνονται Νικόλα σ' αυτό που βλέπεις;*
*2. Ε: Ποιο είναι αυτό το τόξο στο οποίο παιδί μου αναφέρεται αυτός ο τύπος;*

- *Ερωτήσεις παρατήρησης [ΠΑΡ]:* Ο δάσκαλος ζητάει από το μαθητή να παρατηρήσει (αισθητηριακά) στοιχεία που αποτελούν χαρακτηριστικά γνωρίσματα μιας μαθηματικής ιδέας, τα οποία μπορούν να βοηθήσουν στη συνέχιση μιας διαδικασίας.

Ενδεικτικά παραδείγματα:

*1. Ε: Δεν βλέπεις κάτι;*
*2. Ε: Δεν έχεις κάτι να παρατηρήσεις εσύ;*

- *Ερωτήσεις διευκρίνησης [ΔΙΕΥ]:* Ο δάσκαλος ζητάει από το μαθητή να δώσει περαιτέρω πληροφορίες, οι οποίες βοηθούν στην αποσαφήνιση όσων υποστηρίζει.

Ενδεικτικά παραδείγματα:

*1. Ε: Τι εννοείς μ' αυτό που λες;*
*2. Ε: Το χ είναι αρνητικό;*
*3. Ε: Τι άπειρες;*
*4. Ε: Δηλαδή τι να τις είχε τις απέναντι πλευρές;*

- *Ερωτήσεις σύγκρισης [ΣΥΓΚ]:* Ο δάσκαλος ζητάει από το μαθητή να διακρίνει ομοιότητες ή διαφορές που τυχόν παρουσιάζονται σε μαθηματικά αντικείμενα ή σε μαθηματικές διαδικασίες.

Ενδεικτικά παραδείγματα:

*1. Ε: Ποια από τις δύο λες εσύ ότι ανταποκρίνεται σ' αυτό που μας είπες;*
*2. Ε: Που διαφέρουν αυτές οι δύο;*

- *Ερωτήσεις πρόβλεψης [ΠΡΟΒ]:* Ο δάσκαλος ζητάει από το μαθητή να προβλέψει τι πρόκειται να συμβεί, όταν κάνει μια συγκεκριμένη υπόθεση ή ενέργεια.

Ενδεικτικά παραδείγματα:

*1. Ε: Και τι θα γινόταν η γωνία;*
*2. Ε: Αν υπάρχει τετράπλευρο ορθογώνιο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες τι θα είναι;*

- *Ερωτήσεις εμβάθυνσης [ΕΜΒ]:* Ο δάσκαλος ζητάει από το μαθητή να εξηγήσει περισσότερο, δηλαδή, να εμβαθύνει στη σημασία μιας έννοιας που χρησιμοποιεί.

Ενδεικτικά παραδείγματα:

*1. Ε: Ένα 2, ένας καθαρός αριθμός, τι είναι;*
*2. Ε: Που τι θα πει αυτό;*

- *Ερωτήσεις εξαγωγής συμπεράσματος [ΣΥΜΠ]:* Ο δάσκαλος ζητάει από το μαθητή να διατυπώσει αυτό που προκύπτει μετά από μια συγκεκριμένη πορεία που ακολουθήθηκε.

Ενδεικτικά παραδείγματα:

*1. Ε: Άρα λοιπόν εδώ τώρα τι έχουμε;*
*2. Ε: Άρα μπορεί να ειπωθεί τι;*

- *Ερωτήσεις γενίκευσης [ΓΕΝ]:* Ο δάσκαλος ζητάει από το μαθητή να εξετάσει αν όσα προέκυψαν μετά από διαδικασίες που ακολουθήθηκαν μπορούν να επεκταθούν, ώστε να ισχύουν γενικότερα.

Ενδεικτικά παραδείγματα:

*1.Ε: Είναι αυτή η διαδικασία πάντοτε εφαρμόσιμη;*
*2.Έτσι τώρα μπορώ να ισχυρίζομαι ότι όλες οι γωνίες ενός τριγώνου κάνουν πάντα 180$^o$;*

**Ερωτήσεις που ζητούν την εκτέλεση μεταγνωστικού έργου:** Στις ερωτήσεις αυτής της κατηγορίας, ο εκπαιδευτικός ζητάει από το μαθητή να εξηγήσει τις σκέψεις και τις ενέργειες που έκανε, ώστε να διαπιστώσει σε ποιο βαθμό ο μαθητής έχει επίγνωση των ενεργειών του. Ο δάσκαλος ζητάει, ακόμα, να εκτιμήσει ο μαθητής τις συνέπειες ενός αποτελέσματος που έχει προκύψει κατόπιν μιας διαδικασίας που ακολουθήθηκε. Ο μαθητής μπορεί να ανταποκριθεί σε μια τέτοια απαίτηση μόνο αν οι επιλογές που έχει κάνει είναι συνειδητές. Οι παραπάνω ενέργειες που ζητούνται από το μαθητή αφορούν, όπως και οι ερωτήσεις γνωστικών έργων, στο μαθηματικό περιεχόμενο που βρίσκεται υπό διαπραγμάτευση. Αυτή η κατηγορία ερωτήσεων διακρίνεται σε υπο-κατηγορίες, οι οποίες περιγράφονται παρακάτω.

- *Ερωτήσεις περιγραφής των στρατηγικών επίλυσης [ΠΕΡ ΣΤΡ]:* Ο δάσκαλος ζητάει από το μαθητή να περιγράψει τις διαδικασίες που ακολούθησε, προκειμένου να οδηγηθεί σε κάποιο αποτέλεσμα. Οι μαθητές έχουν δουλέψει ήδη πάνω στο θέμα. Οι Kawanaka & Stigler (2000) ονομάζουν αυτού του τύπου τις ερωτήσεις *Used methods*, όπου οι μαθητές καλούνται, συνήθως, να απαντήσουν σε ερωτήσεις του τύπου «Πως το έκανες αυτό; », «Πως το σκέφτηκες αυτό;», «Πως θα εξηγούσες ότι…; », «Μπορείς να το πεις στο τάδε αυτό που έκανες;», «Τι έκανες»…

Ενδεικτικά παραδείγματα:

*1. Ε: Πως κατασκευάσαμε το ορθογώνιο;*
*2. Ε: Και τι κάναμε δηλαδή;*

- *Ερωτήσεις περιγραφής διαδικασίας σκέψης [ΠΔΣ]:* Ο δάσκαλος ζητάει από το μαθητή να περιγράψει τις σκέψεις που ακολούθησε, προκειμένου να οδηγηθεί σε κάποιο αποτέλεσμα.

Ενδεικτικά παραδείγματα:

*1. Ε: Ναι…Το 2 πως σου ήρθε στο μυαλό;*
*2 .Ε: Πως το σκέφτηκες αυτό;*

- *Ερωτήσεις εκτίμησης αποτελέσματος [ΕΚΤ ΑΠΟΤ]:* Ο δάσκαλος ζητάει από το μαθητή να εκτιμήσει αν έχει νόημα το αποτέλεσμα που προέκυψε κατόπιν μιας πορείας που ακολουθήθηκε στο πλαίσιο των μαθηματικών (αν, δηλαδή, πρόκειται για μια μαθηματικά έγκυρη διαπίστωση) .

Ενδεικτικά παραδείγματα:

*1.Ε: Βγάζεις νόημα;*
*2.Ε: Στέκει αυτό το αποτέλεσμα;*

Σε ό,τι αφορά στην **καθοδήγηση** που υποδηλώνεται με ερωτήσεις που συνδέονται με την ανάθεση και πραγματοποίηση μιας μαθηματικής δραστηριότητας, αυτή αφορά στο βαθμό στον οποίο ο δάσκαλος επεμβαίνει στη πορεία που πρέπει να ακολουθήσει η σκέψη του μαθητή, για να καταλήξει στη διατύπωση μιας απάντησης. Με βάση τα δεδομένα, οι ερωτήσεις διακρίθηκαν σε υψηλής, μέτριας και χαμηλής καθοδήγησης. Επιπλέον, σε κάθε περίπτωση, διαπιστώθηκε η ύπαρξη υπο-κατηγοριών ερωτήσεων οι οποίες περιγράφονται παρακάτω.

**Ερωτήσεις υψηλής καθοδήγησης:** Ο δάσκαλος ζητάει από το μαθητή να απαντήσει με άρνηση ή κατάφαση ή να συμπληρώσει μία δεδομένη πρόταση. Αυτές οι ερωτήσεις ομαδοποιούνται ως εξής:

- *Ερωτήσεις θετικής ή αρνητικής επιβεβαίωσης (Ναι/Όχι) [Ν/Ο]:* Ο δάσκαλος ζητάει από το μαθητή να απαντήσει με ένα «ναι» ή ένα «όχι». Αυτό δηλώνεται άλλοτε άμεσα από την ερώτηση που θέτει ο δάσκαλος και άλλοτε έμμεσα.

Ενδεικτικά παραδείγματα όπου δηλώνεται σαφώς:

*1. Ε: Το χ είναι αρνητικό;*
*2.Ε: Το τετράγωνο είναι ρόμβος;*

Ενδεικτικά παραδείγματα όπου δηλώνεται έμμεσα:

*1.Ε: Είναι δυνατόν παιδιά να έχω γωνίες που να έχουν ίσες πλευρές;*
*2.Ε: Ένωση τι θα πει θυμάσαι;*

- *Ερωτήσεις συμπλήρωσης [ΣΥΜΠ]:* Ο δάσκαλος διατυπώνει μια πρόταση και ζητάει από το μαθητή να συμπληρώσει απλώς μια λέξη ή μια φράση που λείπει.

Ενδεικτικά παραδείγματα:

*1. Ε: Μια ευθεία περιέχει…………;*
*2. Ε: Το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες λέγεται ………;*

**Ερωτήσεις μέτριας καθοδήγησης:** Σε αυτή τη κατηγορία εντάχθηκαν οι ερωτήσεις που δεν αντιστοιχούν στη κατηγορία της υψηλής ή της χαμηλής καθοδήγησης.

**Ερωτήσεις χαμηλής καθοδήγησης:** Σε αυτή τη κατηγορία ανήκουν οι ανοιχτές ερωτήσεις.

- *Ανοιχτές ερωτήσεις [ΑΝ ΕΡ]:* Οι ανοιχτές ερωτήσεις επιδέχονται περισσότερες από μία πιθανές απαντήσεις. Η απάντηση είναι, συνήθως, πιο εκτενής από αυτήν της κλειστής ερώτησης, δεν είναι προβλέψιμη και φέρει τη σφραγίδα αυτού που απαντά σε ότι αφορά τη διατύπωση των επιχειρημάτων και την έκφραση των συναισθημάτων (Βαϊνας,1998). Αυτού του τύπου τις ερωτήσεις η Ainley (1989) τις ονομάζει *γνήσιες ερωτήσεις,* ενώ οι Kawanaka & Stigler (2000) *ερωτήσεις υψηλού επιπέδου.*

Ενδεικτικά παραδείγματα:

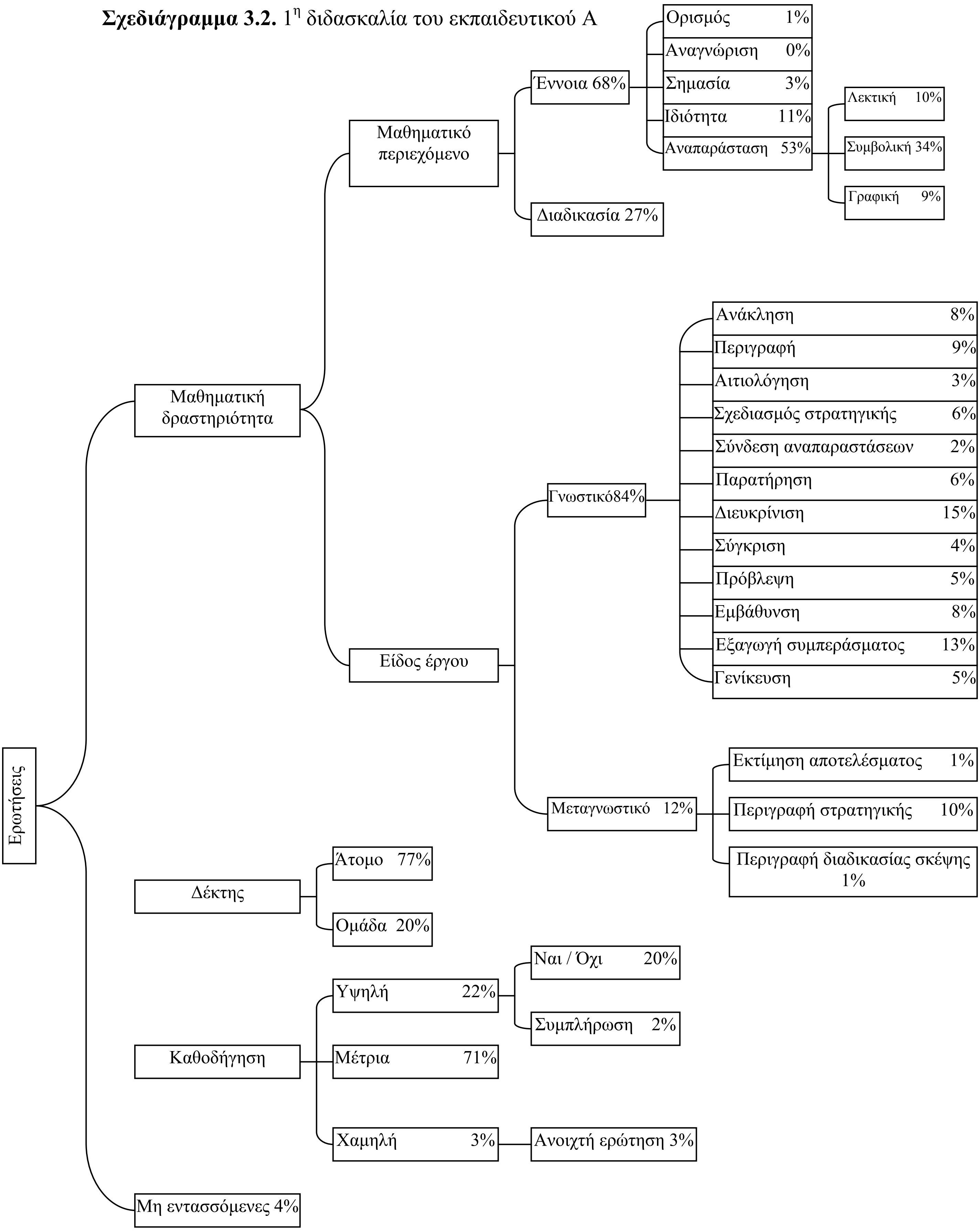
*1.Ε: Ποιες από τις παρακάτω εξισώσεις νομίζεις ότι είναι οι ευθείες αυτές ;*
*2.Ε: Τι λες, Θεοδώρα; Τι να κάνουμε;*

Θα πρέπει να αναφερθεί ότι όλες οι ερωτήσεις, εκτός αυτών της χαμηλής καθοδήγησης, θεωρήθηκαν ως κλειστές, με δεδομένο ότι παρουσιάζουν τα χαρακτηριστικά των κλειστών ερωτήσεων. Οι κλειστές ερωτήσεις επιδέχονται μία συγκεκριμένη απάντηση (Smith, 1986), που συνήθως είναι σύντομη, προβλέψιμη και, κατά μια έννοια, προκαθορισμένη από το δάσκαλο. Αυτού του τύπου τις ερωτήσεις η Ainley (1989) τις ονομάζει *ψευδερωτήσεις*, ενώ οι Kawanaka & Stigler (1999) *ερωτήσεις χαμηλού επιπέδου.*

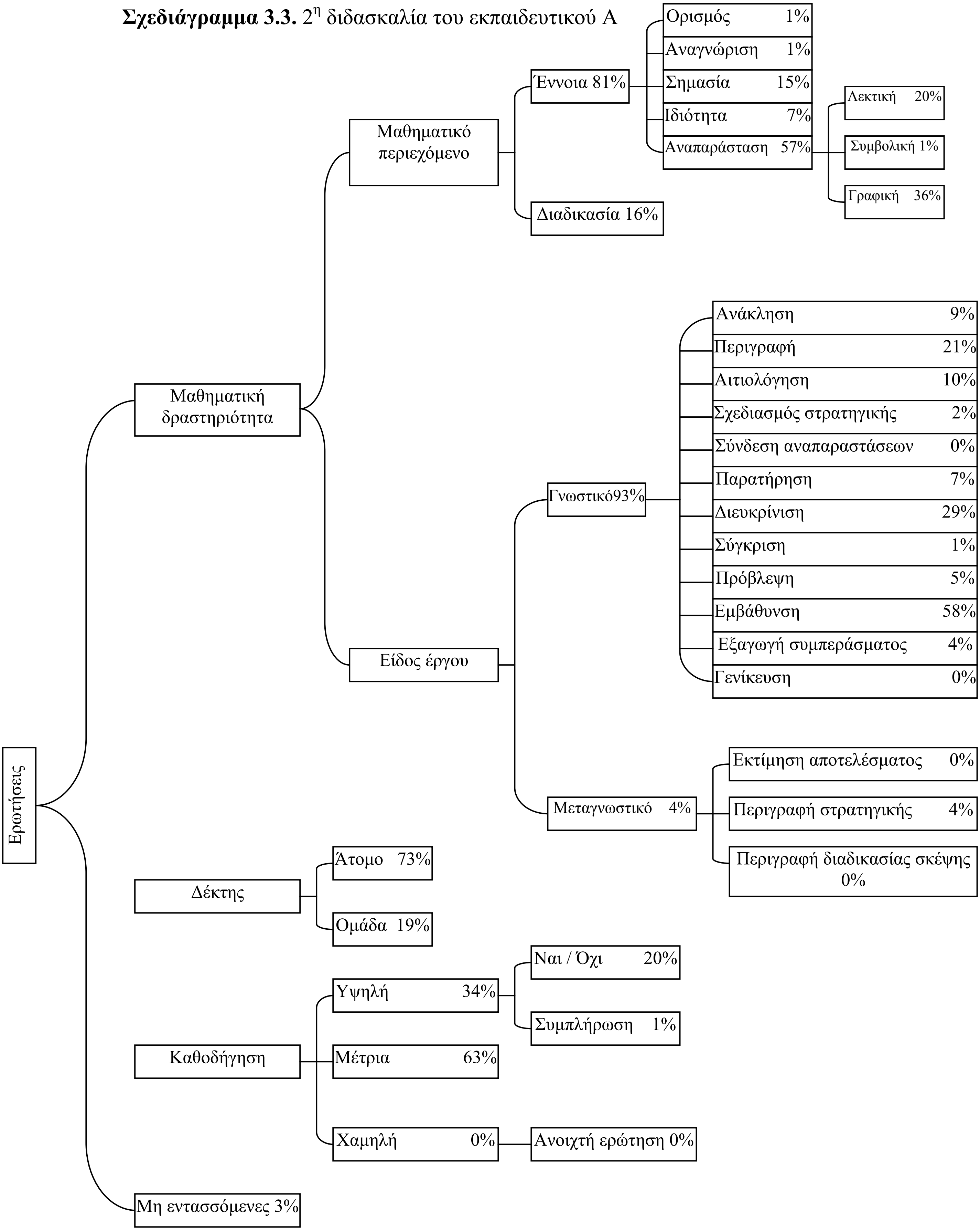
Τέλος, όπως έχει ήδη αναφερθεί, οι ερωτήσεις χαρακτηρίστηκαν και ως προς το **δέκτη** τους (συγκεκριμένοι μαθητές ή ολόκληρη η τάξη), ενώ όσες δεν ήταν δυνατό να χαρακτηριστούν με κανέναν από τους παραπάνω τρόπους κατηγοριοποιήθηκαν ως **μη εντασσόμενες ερωτήσεις [ΑΛΛΟ].**

Με βάση το συστημικό δίκτυο που διαμορφώθηκε (σχεδιάγραμμα 3.1) με τον παραπάνω τρόπο, αναγνώστηκε καθεμιά από τις τρεις διδασκαλίες των δύο εκπαιδευτικών που συμμετείχαν στην έρευνα, υπολογίστηκε και σημειώθηκε δίπλα από κάθε κατηγορία του δικτύου το ποσοστό εμφάνισής της (σχεδιαγράμματα 3.2 – 3.7).

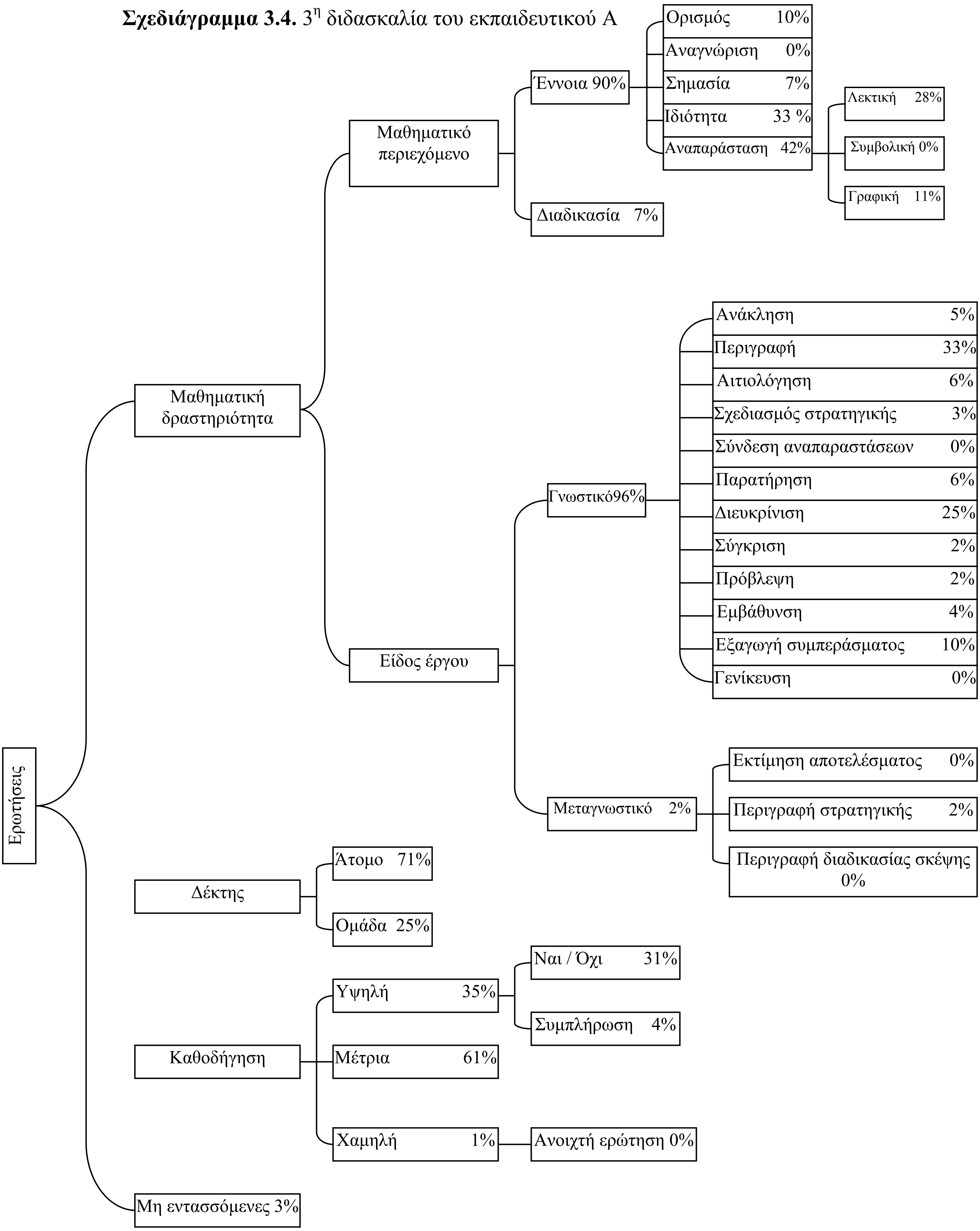
**Σχεδιάγραμμα 3.2.** 1η διδασκαλία του εκπαιδευτικού Α



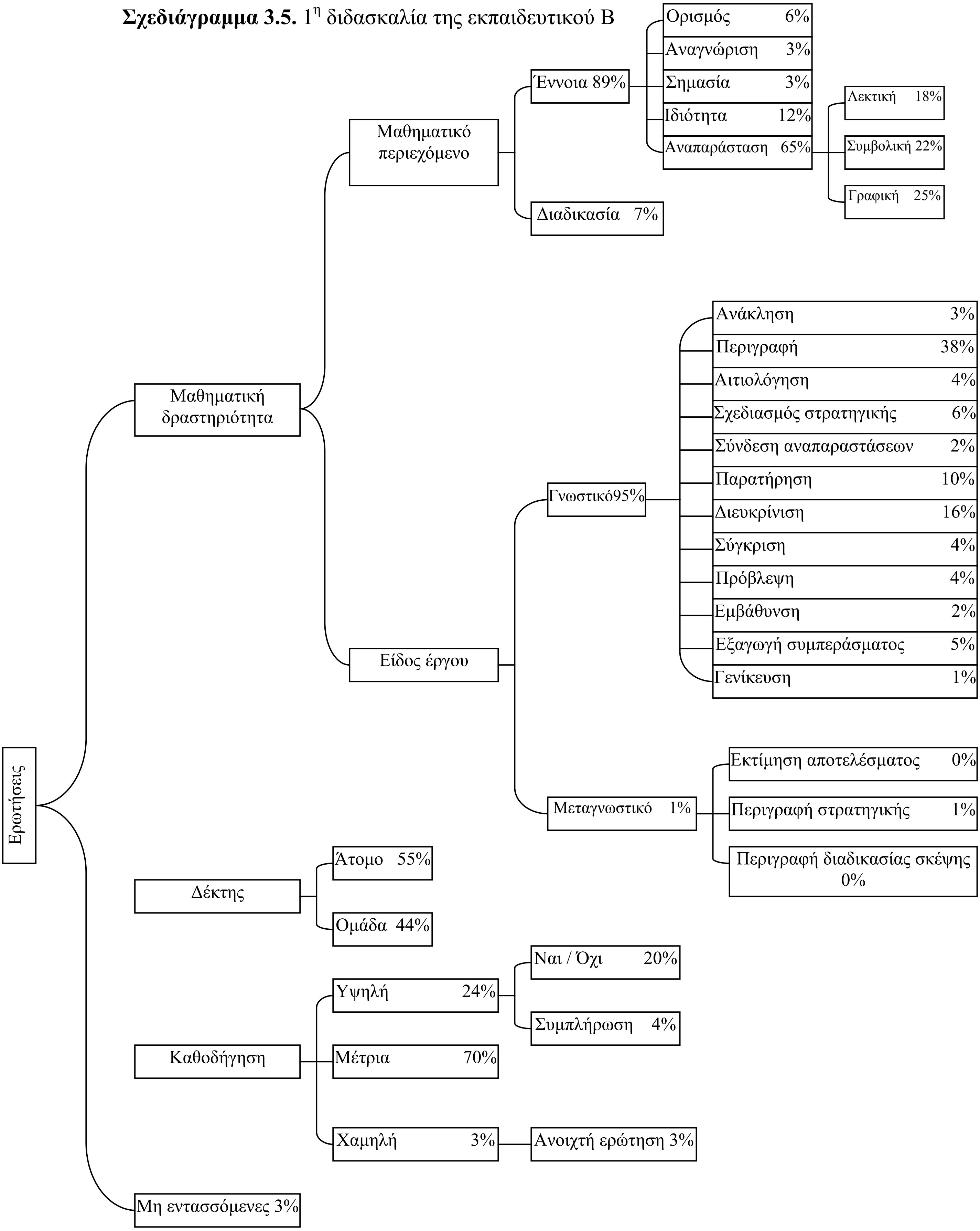
**Σχεδιάγραμμα 3.3.** $2^{η}$ διδασκαλία του εκπαιδευτικού Α



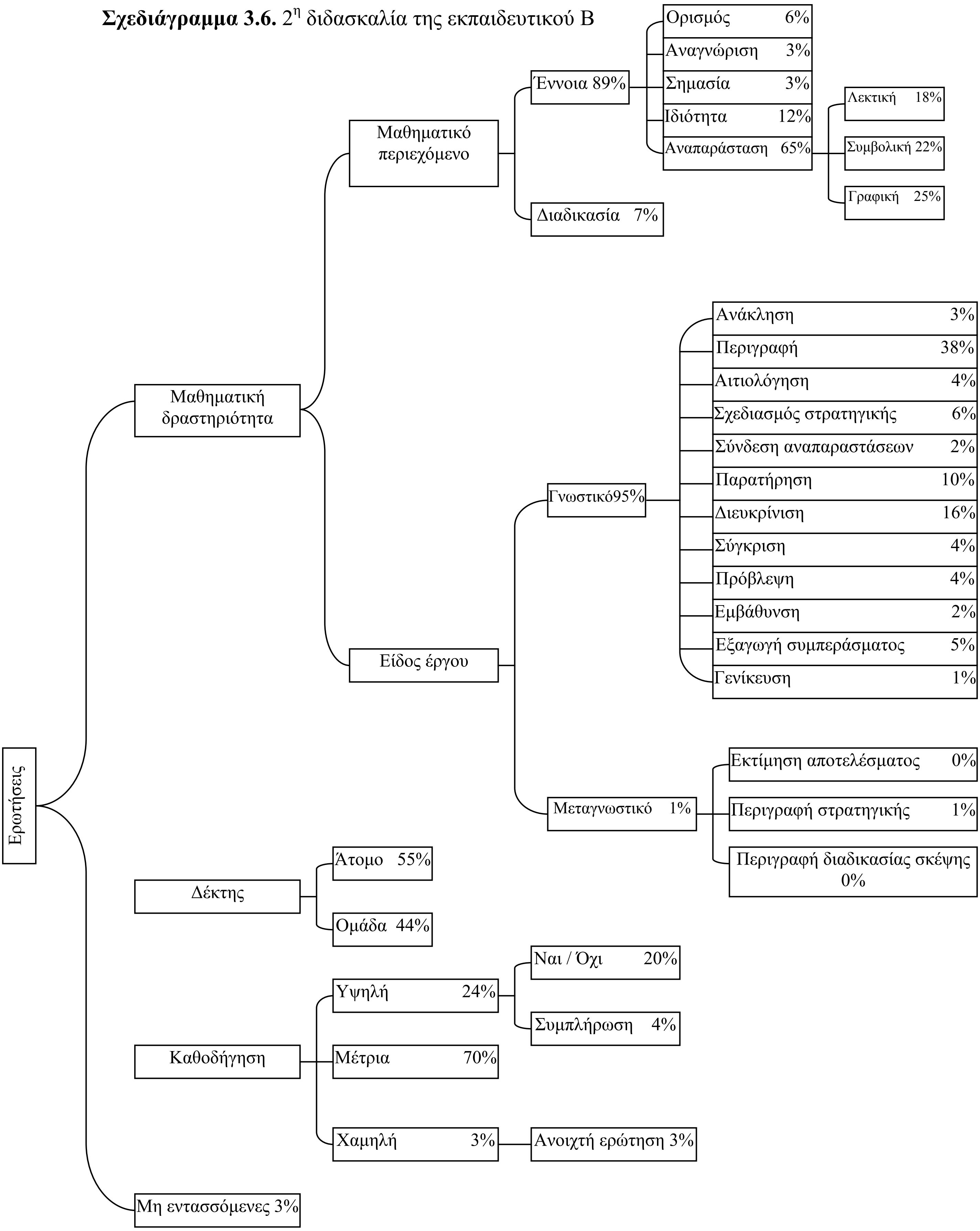
**Σχεδιάγραμμα 3.4.** 3$^{η}$ διδασκαλία του εκπαιδευτικού Α



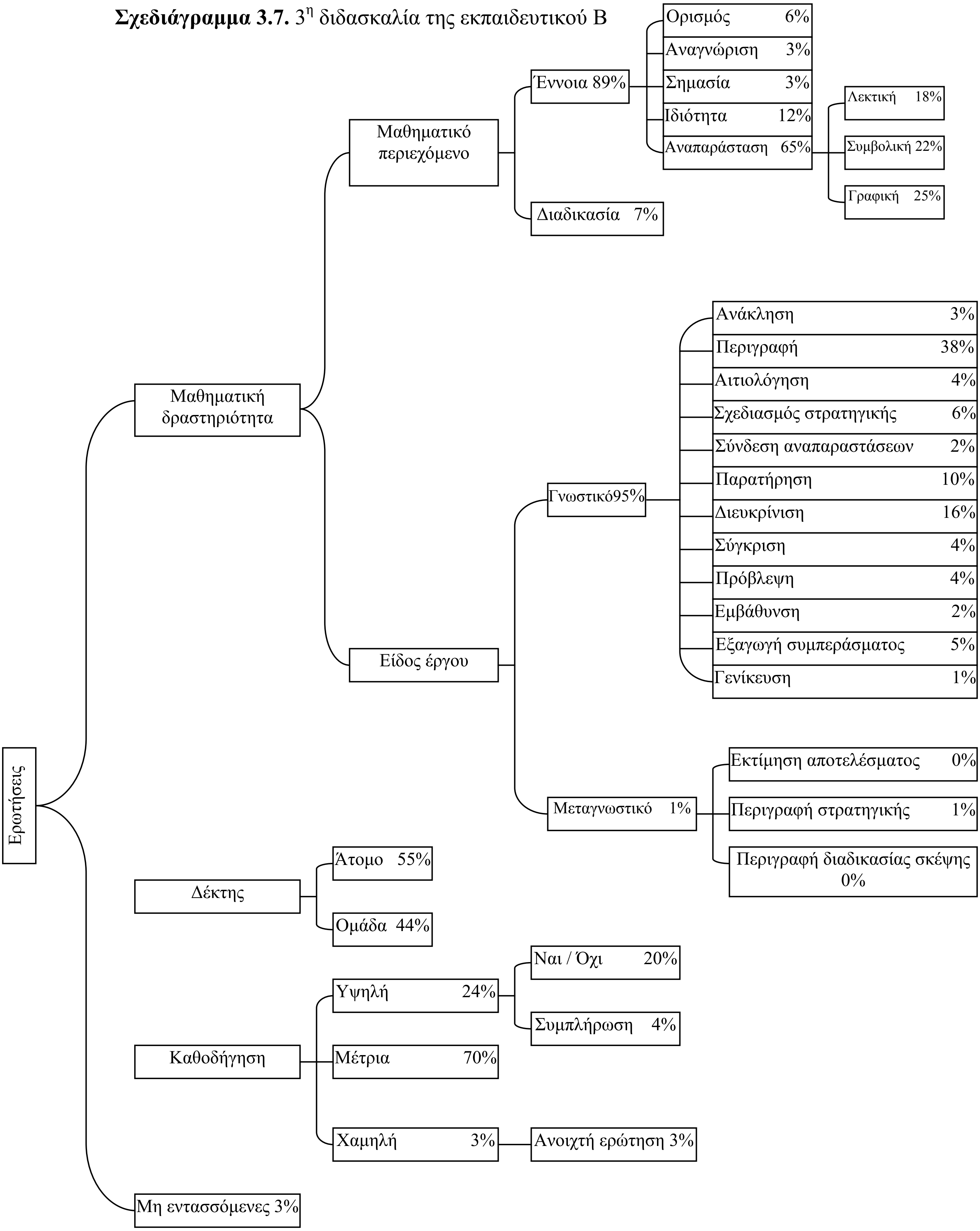
**Σχεδιάγραμμα 3.5.** 1η διδασκαλία της εκπαιδευτικού Β



**Σχεδιάγραμμα 3.6.** 2η διδασκαλία της εκπαιδευτικού Β



**Σχεδιάγραμμα 3.7.** 3η διδασκαλία της εκπαιδευτικού Β



Εξετάζοντας τα συστηματικά δίκτυα που προέκυψαν για καθέναν από τους δύο εκπαιδευτικούς, παρατηρούμε ότι στις διδασκαλίες του εκπαιδευτικού Α παρουσιάζονται αρκετές διακυμάνσεις στα ποσοστά των κατηγοριών των ερωτήσεων στις τρεις διδασκαλίες που μελετήθηκαν. Έτσι, σε ό,τι αφορά το μαθηματικό περιεχόμενο, τα ποσοστά που αναφέρονται στις ερωτήσεις που επικεντρώνονται σε μια μαθηματική έννοια είναι 68%, 81% και 90% αντιστοίχως. Ανάμεσα σε αυτές, κυριαρχούν οι ερωτήσεις που εστιάζονται στην αναπαράσταση μιας έννοιας, παρουσιάζοντας, μάλιστα κάποια σταθερότητα, καθώς αντιστοιχούν, κατά μέσο όρο, στο 50% περίπου όλων των ερωτήσεων αυτής της κατηγορίας, με τις υπόλοιπες να εμφανίζουν μικρές διαφοροποιήσεις, ξεπερνώντας μόνο σε μια περίπτωση το 15% (στην τρίτη διδασκαλία, οι ερωτήσεις που σχετίζονται με ιδιότητες έφτασαν το 33%). Στην κυρίαρχη κατηγορία των ερωτήσεων αναπαράστασης, αυτές που συνδέονται με λεκτική αναπαράσταση κυμάνθηκαν από 10% - 28%, όσες εστιάζονται σε συμβολική αναπαράσταση από 0% - 34% και εκείνες που στοχεύουν σε γραφική αναπαράσταση από 9% - 36%. Οι ερωτήσεις που αφορούν σε κάποια μαθηματική διαδικασία δεν ξεπέρασαν σε καμιά περίπτωση το 30% και κυμάνθηκαν από 7% (3η διδασκαλία) – 27% (1η διδασκαλία).

Σε ό,τι αφορά στην κατηγοριοποίηση των ερωτήσεων αναφορικά με τα γνωστικά έργα που απαιτούνταν από τους μαθητές, παρατηρούμε μεγαλύτερη σταθερότητα μεταξύ των διδασκαλιών του εκπαιδευτικού Α, σε σχέση με αυτήν που εντοπίστηκε στην ομαδοποίηση των ερωτήσεών του με βάση το μαθηματικό τους περιεχόμενο, καθώς κυμάνθηκαν ανάμεσα στο 84% και στο 93%. Οι πλέον συχνές ερωτήσεις και στις τρεις διδασκαλίες είναι αυτές της περιγραφής (9%, 21% και 33% αντιστοίχως), της διευκρίνησης (15%, 29% και 25% αντιστοίχως) και στο δεύτερο μόνο μάθημα της εμβάθυνσης (58%), ίσως εξαιτίας του αντικειμένου του μαθήματος (μελέτη τομής ευθειών με γραφικό και αλγεβρικό τρόπο), που ενεργοποίησε, όπως φάνηκε παραπάνω, την εστίαση σε θέματα αναπαράστασης. Επιπλέον, παρατηρείται μια μικρή διαφοροποίηση στην αξιοποίηση ερωτήσεων περιγραφής στις τρεις διδασκαλίες ( 9%,21% και 33%), καθώς και σε αυτές διευκρίνησης (15%, 29% και 25% αντιστοίχως). Οι υπόλοιπες κατηγορίες ερωτήσεων, που συγκροτήθηκαν με βάση το συγκεκριμένο κριτήριο, δεν ξεπερνούν σε καμιά περίπτωση το 10%.

Σε ότι αφορά στις ερωτήσεις που αναφέρονται σε μεταγνωστικά έργα, η συχνότητα εμφάνισής τους στις τρεις διδασκαλίες βρίσκεται σε χαμηλά επίπεδα

(12%,4% και 2% αντιστοίχως) και η πλειοψηφία τους αφορά, σχεδόν αποκλειστικά, στην περιγραφή κάποιας στρατηγικής επίλυσης ενός ζητήματος.

Αναφορικά με το θέμα του βαθμού καθοδήγησης των ερωτήσεων στις τρεις διδασκαλίες, αυτή είναι υψηλή σε ποσοστό 20%, 34% και 35%, μέτρια σε ποσοστό 71%, 63% και 61% και χαμηλή σε ποσοστό 3%, 0% και 2% αντιστοίχως. Σχετικά με την υψηλή καθοδήγηση, μόνο το 2%, κατά μέσο όρο, αντιστοιχεί στις ερωτήσεις συμπλήρωσης, ενώ το υπόλοιπο αντιστοιχεί σε ερωτήσεις του τύπου «ναι/όχι».

Τέλος, οι ερωτήσεις που δεν ήταν δυνατό να αναγνωστούν με τον παραπάνω τρόπο αποτελούν μόλις το 3% του συνόλου των περιπτώσεων.

Στις διδασκαλίες της εκπαιδευτικού Β παρατηρούμε σαφώς μεγαλύτερη σταθερότητα και στις τρεις διδασκαλίες. Έτσι, σε ότι αφορά στις ερωτήσεις από άποψη μαθηματικού περιεχομένου, και στις τρεις διδασκαλίες, περισσότερες του 80% αναφέρονται σε μια μαθηματική έννοια και μόνο το 8%, κατά μέσο όρο, σε μια μαθηματική διαδικασία. Από αυτές που συνδέονται με κάποια μαθηματική έννοια, 67%, κατά μέσο όρο, αναφέρονται στην αναπαράσταση μιας έννοιας είτε λεκτικά είτε αλγεβρικά είτε γραφικά, με μικρές διακυμάνσεις τόσο μέσα στο ίδιο μάθημα όσο και από μάθημα σε μάθημα (η έμφαση στις λεκτικές αναπαραστάσεις κυμαίνεται από 11% - 18%, αυτή στις συμβολικές από 12% - 35% και η επικέντρωση στις γραφικές από 22% - 42%).

Αναφορικά με τα γνωστικά έργα που επιζητούν να ενεργοποιήσουν οι ερωτήσεις, το συνολικό ποσοστό τους ξεπερνάει το 90% σε κάθε διδασκαλία. Από αυτό, κατά μέσο όρο, το 38% αντιστοιχεί σε ερωτήσεις περιγραφής και το 17% σε ερωτήσεις διευκρίνισης. Οι υπόλοιπες κατηγορίες ερωτήσεων, με βάση το συγκεκριμένο κριτήριο ομαδοποίησης, κυμαίνονται από 10% και κάτω, με εξαίρεση τις ερωτήσεις παρατήρησης σε μία μόνο διδασκαλία (τη δεύτερη), η συχνότητα αξιοποίησης των οποίων ανέρχεται μόλις στο ποσοστό του 15%.

Οι ερωτήσεις που ζητούν από τους μαθητές να επιτελέσουν κάποιο μεταγνωστικό έργο αντιστοιχούν σε ποσοστό λιγότερο του 1% του συνόλου των ερωτήσεων που μελετήθηκαν με κριτήριο το νοητικό έργο που επιδιώκεται να εκτελεστεί από τους μαθητές.

Σε ό,τι αφορά στο βαθμό καθοδήγησης που εμπεριέχουν οι ερωτήσεις, οι οποίες διατυπώθηκαν στο πλαίσιο των τριών διδασκαλιών της εκπαιδευτικού Β, ήταν, κατά μέσο όρο, υψηλός σε ποσοστό 20%, μέτριος σε ποσοστό 74% και χαμηλός σε ποσοστό 2%. Από τις περιπτώσεις ερωτήσεων υψηλής καθοδήγησης, μόνο το 4% κατά μέσο όρο αντιστοιχεί σε ερωτήσεις συμπλήρωσης, ενώ το υπόλοιπο αντιστοιχεί σε ερωτήσεις του τύπου «ναι/όχι».

Τέλος, οι μη εντασσόμενες ερωτήσεις για την εκπαιδευτικό Β ανέρχονται στο ποσοστό του 3%.

## 3.3. Λειτουργία των διαφόρων τύπων ερωτήσεων του συστημικού δικτύου στο πλαίσιο των διδασκαλιών (τρίτο πεδίο – ερευνητικό ερώτημα 3)

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται μερικά τυπικά αποσπάσματα – επεισόδια αλληλουχίας ερωτήσεων και απαντήσεων (διαλόγου), έτσι όπως αυτή ενεργοποιείται στις διδασκαλίες που παρατηρήθηκαν, σε μια προσπάθεια να αναδειχτεί ο τρόπος με τον οποίο λειτουργούν τα χαρακτηριστικά των ερωτήσεων που διαγνώστηκαν στην προηγούμενη ενότητα προς την κατεύθυνση της διαμόρφωσης συγκεκριμένων μαθηματικών νοημάτων από τους μαθητές.

Πριν από την παρουσίαση και την ανάλυση αυτών των αποσπασμάτων, θεωρούμε σκόπιμο για την ανάγνωση που θα επιχειρηθεί να περιγράψουμε ορισμένα βασικά χαρακτηριστικά της δομής των διδασκαλιών των δύο εκπαιδευτικών. Ο εκπαιδευτικός Α, στις διδασκαλίες που μελετήσαμε, ξεκινάει από μια έννοια που εισήγαγε στο προηγούμενο μάθημα και προχωράει στην επέκτασή της ή σε ό,τι σχετίζεται με αυτήν, άλλοτε μέσω ασκήσεων και άλλοτε μέσω συζήτησης με στόχο τη διαπίστωση του επιπέδου κατανόησής της από τους μαθητές. Η εκπαιδευτικός Β στην αρχή του κάθε μαθήματος ξεκινάει με μια έννοια που εισήγαγε στο προηγούμενο μάθημα και, στη συνέχεια, αφιερώνει το μεγαλύτερο μέρος της διδακτικής ώρας στην εξέταση των ασκήσεων που είχαν οι μαθητές για το σπίτι. Στο τέλος, κάνει μια ολιγόλεπτη παράδοση - το πολύ δέκα λεπτά - του παρακάτω μαθήματος.

Βασικό κριτήριο επιλογής των αποσπασμάτων για κάθε εκπαιδευτικό υπήρξε το αν το απόσπασμα ήταν αντιπροσωπευτικό-χαρακτηριστικό του τρόπου εργασίας του στη τάξη. Επιπλέον, θεωρούνται τυπικά, επειδή αποτελούν δείγμα μιας επαναλαμβανόμενης συμπεριφοράς στη διδακτική πρακτική του κάθε εκπαιδευτικού. Τα αποσπάσματα παρουσιάζονται και σχολιάζονται χωριστά για καθέναν από τους δύο εκπαιδευτικούς.

Το απόσπασμα 1 και η σειρά αποσπασμάτων του 2 αφορούν στις διδασκαλίες του εκπαιδευτικού Α.

1. Το παρακάτω απόσπασμα προέρχεται από μια διδασκαλία στη Β’ τάξη του γυμνασίου και αποτελεί ένα τυπικό απόσπασμα, όπου η πορεία σκέψης, στην οποία στοχεύει ο εκπαιδευτικός δεν συναντιέται με αυτήν της σκέψης του μαθητή, με συνέπεια να μην προκύψει το επιθυμητό αποτέλεσμα. Ο δάσκαλος γνωρίζει τη σύγχυση που υπάρχει στους μαθητές σε σχέση με το πόσα σημεία ορίζουν μία ευθεία και πόσα σημεία συνιστούν μία ευθεία.

   Ο στόχος είναι να συνειδητοποιήσουν οι μαθητές ότι μία ευθεία ορίζεται από δύο σημεία, τα οποία επαρκούν και για το σχεδιασμό της.

| | |
|---|---|
| *[ΙΔ],[ΑΝ],[ΣΥΜΠ]*[1] | *1. Ε: Είχαμε πει Μαρία, θύμισέ μας λίγο, μια ευθεία περιέχει…;* |
| | *2. Μαρία: εε…δύο εε…δύο* |
| *[ΙΔ],[ΔΙΕΥ],[Ν/Ο]* | *3. Ε: Δύο;* |
| *[ΙΔ],[ΑΝ],[ΣΥΜΠ]* | *4. Ε: Μια ευθεία περιέχει…;* |
| | *5. Μαρία: Α, άπειρες, άπειρες…εμ* |
| *[Λ Α],[ΔΙΕΥ]* | *6. Ε: Τι άπειρες;* |
| | *7. Μαρία: Άπειρα σημεία.* |
| *[ΙΔ],[ΑΙΤ]* | *8. Ε: Ωραία αυτό που είπες αλλά το 2 γιατί το είπες;* |
| | *9. Μαρία: Ήθελα να πω…* |
| *[ΙΔ],[ΠΔΣ]* | *10. Ε: Ναι…Το 2 πως σου ήρθε στο μυαλό;* |
| | *11. Μαρία: Από εε, από εε…* |
| *[ΙΔ],[ΑΝ]* | *12. Ε: Τι είναι το 2;* |
| *[ΙΔ],[ΔΙΕΥ]* | *13. Ε: Σου θυμίζει κάτι δηλαδή αυτό ή έτσι το είπες;* |
| *[ΑΛΛΟ]* | *14. Ε: Μπερδεύτηκες και το είπες;* |
| | *15. Μαρία: Είναι τα 2 σημεία.* |
| *[ΙΔ],[ΕΜΒ]* | *16. Ε: Τι είναι τα 2 σημεία , αφού είπες προηγουμένως άπειρα σημεία, ε;* |
| | *17. Μαρία: εεε* |
| | *18. Ε: Είπες άπειρα, ξεκίνησες να πεις 2 και τελικά είπες άπειρα.* |
| *[ΙΔ],[ΕΜΒ]* | *19. Ε: Αυτό το 2 έχει κάποιο νόημα;* |
| *[ΙΔ],[ΑΝ]* | *20. Ε: Σου θυμίζει κάτι; Στέλιο!* |
| | *21. Στέλιος: Τα 2 σημεία είναι για τη κατασκευή της ευθείας.* |
| | *22. Ε: Μπράβο.* |

*(διδασκαλία 1η, Α συναδέλφου, σελίδα 1)*

[1] [ΙΔ]: Ιδιότητα, [ΑΝ]: Ανάκληση, [ΣΥΜΠ]: Συμπλήρωση, [ΔΙΕΥ]: Διευκρίνιση, [Ν/Ο]: Ναι/Όχι, [ΛΑ]: Λεκτική αναπαράσταση, [ΑΙΤ]: Αιτιολόγηση, [ΠΔΣ]: Περιγραφή διαδικασίας σκέψης, [ΕΜΒ]: Εμβάθυνση, [ΑΛΛΟ]: Μη εντασσόμενες ερωτήσεις, [ΣΑ]: Συμβολική αναπαράσταση, [ΣΥΝ ΑΝΑΠ]: Σύνδεση αναπαραστάσεων, [ΓΑ]: Γραφική αναπαράσταση, [ΕΚΤ ΑΠΟΤ]: Εκτίμηση αποτελέσματος, [ΑΝ ΕΡ]: Ανοιχτή ερώτηση, [ΣΥΓΚ]: Σύγκριση, [ΣΥΜ]: Σημασία, [ΠΡΟΒ]: Πρόβλεψη, [ΠΕΡ]: Περιγραφή, [ΕΞ ΣΥΜΠ]: Εξαγωγή συμπεράσματος, [ΠΑΡ] Παρατήρηση, [ΟΡ]: Ορισμός

Για να πετύχει αυτό που θέλει, ο εκπαιδευτικός, αρχικά, προσπαθεί να αποσπάσει μια απάντηση, μέσα από ερωτήσεις ανάκλησης και διευκρίνισης[1,3,4,6]. Έπειτα, περνάει σε μία ερώτηση αιτιολόγησης [8], αναζητώντας εξήγηση και, στη συνέχεια, προσπαθεί να δει τη βαθύτερη σκέψη της μαθήτριας, ζητώντας της να περιγράψει τα βήματα που ακολούθησε η σκέψη της[10]. Πρόκειται για μια ενέργεια με μεταγνωστική διάσταση. Καθώς αποτυγχάνει, ξαναπροσπαθεί με μία ερώτηση ανάκλησης[12] και έπειτα, με μία ερώτηση διευκρίνισης[13] και επιμένει, ζητώντας από τη μαθήτρια να εμβαθύνει στη σημασία της έννοιας «δύο» που χρησιμοποιεί[16]. Όταν δεν καταλήγει εκεί που θέλει, απευθύνεται σε άλλο μαθητή, ο οποίος και απαντάει[20].

Ο εκπαιδευτικός, με τις επαναλαμβανόμενες ερωτήσεις, που είναι κυρίως τύπου ανάκλησης και διευκρίνισης και με την επιμονή του, δείχνει να ενδιαφέρεται για τη σκέψη της μαθήτριας και προσπαθεί να τη βοηθήσει, ασκώντας μέτρια καθοδήγηση, να εξηγήσει η ίδια τι εννοεί με τα λεγόμενά της. Παρόλα αυτά, οι γνωστικές απαιτήσεις του έργου φαίνεται να είναι πέρα από τη μαθηματική σκέψη της μαθήτριας. Έτσι, ο διάλογος δεν οδηγεί στο επιθυμητό αποτέλεσμα και ο εκπαιδευτικός αποφασίζει να απευθυνθεί σε άλλο μαθητή.

2. Στην ίδια διδασκαλία, ο εκπαιδευτικός δίνει στους μαθητές του ένα φύλλο εργασίας, το οποίο περιέχει έξι εξισώσεις ευθειών και μία γραφική παράσταση με δύο μόνο ευθείες. Ζητάει από τους μαθητές να ξεχωρίσουν τις δύο εξισώσεις, που αντιστοιχούν στις ευθείες του επιπέδου που δίνονται. Προσφέρει συνεχώς βοήθεια στους μαθητές του, θέτοντας ερωτήματα που εστιάζουν κάθε φορά στο σημείο κλειδί, ώστε να μπορεί να προχωρήσει η διαδικασία και να φτάσει στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Παρακάτω παρατίθενται σειρά από αποσπάσματα, μέσα από τα οποία φαίνεται ο χειρισμός του δασκάλου, προκειμένου να πετύχει κάθε φορά το στόχο του.

2α) Στο απόσπασμα που ακολουθεί, ο στόχος του δασκάλου είναι να συνδέσουν οι μαθητές τις δύο διαφορετικές αναπαραστάσεις των δύο ευθειών που δίνονται.

| | |
|---|---|
| | *1.Ε: Νικόλα, στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των 2 ευθειών.* |
| *[ΣΑ],[ΣΥΝ ΑΝΑΠκαιΑΙΤ], [ΑΝ ΕΡ]* | *2.Ε: Ποιες από τις παρακάτω εξισώσεις νομίζεις ότι είναι οι ευθείες αυτές και γιατί;* |
| | *3.Νικόλας: (σκέφτεται)* |
| | *4.Ε: Ε, Νίκο;* |
| | *5.Νικόλας: Ναι.* |
| | *6.Ε: Έχουμε λοιπόν 6 εξισώσεις ευθειών και απεικονίζουμε στο καρτεσιανό μας επίπεδο μόνο 2. Ψάχνουμε λοιπόν να βρούμε ποιες 2 ανταποκρίνονται.* |
| *[ΣΑ], ],[ΣΥΝ ΑΝΑΠ]* | *7.Ε: Ποιες 2 εξισώσεις, να γίνω πιο σαφής, ποιες 2 εξισώσεις ανταποκρίνονται Νικόλα σ' αυτό που βλέπεις;* |
| | *8.Νικόλας: -χ-1. ψ=-χ-1* |
| *[ΓΑ],[ΣΥΝ ΑΝΑΠ]* | *9.Ε: Η δεύτερη λοιπόν ανταποκρίνεται σε ποια ευθεία;* |

*(διδασκαλία $1^{\eta}$, Α συναδέλφου, σελίδα 2)*

Ο εκπαιδευτικός ξεκινάει με μία ανοιχτή ερώτηση σύνδεσης αναπαραστάσεων, με την οποία ζητάει από το μαθητή να συνδέσει τις εξισώσεις των ευθειών με τη γραφική τους παράσταση και να αιτιολογήσει την επιλογή του[2]. Ο μαθητής δεν απαντάει και ο δάσκαλος θέτει μια πιο εστιασμένη ερώτηση σύνδεσης αναπαραστάσεων, με την οποία τονίζει ότι πρόκειται για δύο εξισώσεις[7]. Δηλαδή, του ζητάει να συνδέσει μόνο δύο εξισώσεις με τις γραφικές παραστάσεις που δίνονται. Ο Νικόλας απαντάει εστιάζοντας στην αλγεβρική αναπαράσταση της ευθείας, περιγράφοντας την κατά τη γνώμη του ορθή εξίσωση[8], που είναι η δεύτερη κατά σειρά, χωρίς όμως να προσδιορίζει την γραφική αναπαράσταση, στην οποία αυτή αντιστοιχεί. Το επόμενο ερώτημα του δασκάλου αναφέρεται ειδικά στην επιλογή του Νικόλα και του ζητάει να συνδέσει την εξίσωση που επέλεξε με την γραφική παράσταση που της αντιστοιχεί[9].

Ο δάσκαλος «κλείνει» συνεχώς τις ερωτήσεις, προσπαθώντας έτσι να προσανατολίσει το μαθητή σε μια συγκεκριμένη κατεύθυνση. Είναι φανερό ότι οι εστιασμένες στη σύνδεση των αναπαραστάσεων ερωτήσεις έχουν ως στόχο να αποσπάσει οπωσδήποτε μία απάντηση.

2β) Στη συνέχεια, ο στόχος του δασκάλου είναι να αξιολογήσει ο ίδιος ο μαθητής την απάντηση που έδωσε.

| | |
|---|---|
| | *10.Νικόλας: Περνάει από το σημείο –1.* |
| *[ΔΙΕΥ],[ΣΥΜΠ]* | *11.Ε: Από το…;* |
| | *12.Νικόλας: -1* |
| | *13.Ε: Από το –1. Μου έρχεται στο μυαλό Νικόλα σημείο, το –1 νομίζω είναι αριθμός.* |
| | *14.Νικόλας: (0,-1)* |
| | *15.Ε: Πολύ ωραίος, έτσι;* |
| | *16.Ε: Περνάει λοιπόν από το σημείο (0,-1).* |
| *[ΓΑ],[ΕΚΤ ΑΠΟΤ],[Ν/Ο]* | *17.Ε: Είναι όμως αυτή;* |
| | *18.Ε: Γιατί ακριβώς από κάτω εγώ Νικόλα έχω έναν προβληματισμό.* |
| | *19.Ε:Υπάρχει άλλη μία ευθεία, η οποία είναι* $\chi$-1. |
| *[ΓΑ],[ΣΥΓΚ]* | *20.Ε: Ποια από τις 2 λες εσύ ότι ανταποκρίνεται σ' αυτό που μας είπες;* |
| *[ΓΑ],[ΔΙΕΥ],[Ν/Ο]* | *21.Ε: Δηλαδή στην ευθεία που διέρχεται από το σημείο (0,-1);* |

*(διδασκαλία* $1^{\eta}$*, Α συναδέλφου, σελίδα 2)*

Ο μαθητής παρατηρεί ότι η ζητούμενη ευθεία περνάει από το σημείο (0,-1). Ο δάσκαλος, με μια ερώτηση εκτίμησης του αποτελέσματος, δηλαδή της απάντησης που έδωσε ο μαθητής, του ζητάει να αξιολογήσει ο ίδιος, αν πράγματι πρόκειται για τη σωστή ευθεία[17]. Όμως, δεν περιμένει να απαντήσει ο μαθητής, αλλά του δίνει τη πληροφορία ότι υπάρχει κι άλλη ευθεία που μπορεί να είναι η ζητούμενη[19]. Στη συνέχεια, με μια ερώτηση σύγκρισης[20] και κατόπιν με μια διευκρίνισης[21], ζητάει από το μαθητή να απαντήσει.

Ο εκπαιδευτικός φαίνεται να θέλει να οδηγήσει το μαθητή σε σκέψεις μεταγνωστικού τύπου, ζητώντας του να εκτιμήσει την ορθότητα της απάντησής του. Αμέσως μετά, όμως, αναιρεί ο ίδιος αυτή του τη πρόθεση, καθώς οδηγεί το μαθητή προς μία συγκεκριμένη κατεύθυνση. Οι παρεμβάσεις και οι εστιασμένες ερωτήσεις του δεν επιτρέπουν στο μαθητή να δράσει ο ίδιος 'αυτόνομα' αλλά τον αναγκάζουν να ακολουθήσει τη σκέψη του δασκάλου. Επίσης, είναι αξιοπρόσεκτο ότι από την πρόταση [15] και πέρα δεν υπάρχει πλέον εναλλαγή μεταξύ των δύο εταίρων της διαπραγμάτευσης, αλλά μόνο ο λόγος του εκπαιδευτικού.

2γ) Στο επόμενο απόσπασμα, ο δάσκαλος έχει ως στόχο να μπορέσει ο μαθητής να αιτιολογήσει την άποψή του.

| | |
|---|---|
| | *22.Νικόλας: ψ=χ-1* |
| | *23.Ε: Τώρα το άλλαξες.* |
| *[ΓΑ],[ΑΙΤ]* | *24.Ε: Και γιατί να μην είναι η πρώτη που μας είπες, η –χ-1;* |
| | *25.Νικόλας: Γιατί έχει το …* |
| | *26.Ε: Ναι…* |
| | *27.Νικόλας: εεε* |
| | *28.Ε: Ναι. Πες λίγο, την διαφορά τους πες βρε Νικόλα.* |
| *[ΣΑ],[ΣΥΓΚ]* | *29.Ε: Που διαφέρουν αυτές οι δύο;* |
| | *30.Νικόλας: Στο χ* |
| *[ΔΑ],[ΑΝ],[Ν/Ο]* | *31.Ε:Ναι ωραία αυτό πως το είχαμε πει θυμάσαι;* |
| | *32.Νικόλας: Ότι είναι αρνητικό.* |
| *[ΣΑ],[ΔΙΕΥ],[Ν/Ο]* | *33.Ε: Ναι, το χ είναι αρνητικό;* |
| | *34.Ε: Κάπως το είχαμε πει αυτό.* |
| | *35.Νικόλας: Η κλίση.* |
| | *36.Ε: Ναι , η κλίση.* |
| | *37.Ε:Η μία λοιπόν από τις δύο έχει αρνητική κλίση.* |

*(διδασκαλία 1η, Α συναδέλφου, σελίδα 2)*

Ο μαθητής αλλάζει άποψη[22] και καλείται από το δάσκαλο να αιτιολογήσει αυτή του την απόφαση[24]. Στην αδυναμία του μαθητή να ανταποκριθεί, ο δάσκαλος τον βοηθάει με ερωτήσεις σύγκρισης[29], ανάκλησης[31] και διευκρίνισης[33], προσανατολίζοντάς τον στον εντοπισμό της διαφοράς που υπάρχει μεταξύ των δύο ευθειών.

Παρατηρούμε ότι, όπως και στο προηγούμενο απόσπασμα, ο εκπαιδευτικός, με τη χρήση προσεκτικά εστιασμένων ερωτήσεων, κατευθύνει το μαθητή εκεί που επιθυμεί.

2δ) Στη συνέχεια, ο στόχος του εκπαιδευτικού είναι να εμβαθύνει ο μαθητής στη σημασία της έννοιας «αρνητική κλίση»

| | |
|---|---|
| *[ΣΗΜ],[ΕΜΒ]* | *38.Ε: Τι σημαίνει αυτό τώρα; Ε;* |
| *[ΣΗΜ],[ΕΜΒ]* | *39.Ε: Πως ερμηνεύεται αυτό γραφικά;* |

*(διδασκαλία 1η, Α συναδέλφου, σελίδα 3)*

Ο δάσκαλος απευθύνει, αρχικά, στο μαθητή δύο ερωτήσεις εμβάθυνσης[38,39].Δεν περιμένει, όμως, απάντηση αλλά κάνει καταρχήν την παρακάτω σύντομη τοποθέτηση, όπου τονίζει την αντίθετη κλίση των δύο ευθειών και την ασυμβατότητα της γραφικής αναπαράστασης της ευθείας με την κλίση που ανέφερε παραπάνω ο μαθητής[40].

*40.Ε: Προφανώς αλγεβρικά λες « είναι αρνητικός αριθμός». Ωραία. Ο ένας είναι θετικός. Η μία έχει θετική κλίση. Η άλλη έχει αρνητική κλίση. Εμείς όμως βλέπουμε ταυτοχρόνως Νικόλα, έτσι; Βλέπουμε και έχουμε και στο μυαλό μας την εξίσωση. Άρα πρέπει να μας εξηγήσεις γιατί αυτό που βλέπουμε δεν ανταποκρίνεται στη κλίση που μας λες.*

*(διδασκαλία $1^{η}$, Α συναδέλφου, σελίδα 3)*

Παρατηρούμε και πάλι ότι ο εκπαιδευτικός εστιάζεται ξανά στα σημεία κλειδιά, προκειμένου να προχωρήσει.

2ε) Στο επόμενο απόσπασμα της διδασκαλίας, ο δάσκαλος έχει ως στόχο να εντοπίσει ο μαθητής την ιδιότητα που έχει μια ευθεία με αρνητική κλίση.

| | |
|---|---|
| *[ΙΔ],[ΠΕΡ],[ΑΝ ΕΡ]* | *41.Ε: Ποιο είναι το χαρακτηριστικό της τότε;* |
| | *42.Ε: Το έδειξες με το μολύβι σου, το είδα αλλά δεν θα φωνάξεις έναν έναν της τάξης να έρθει πάνω από το σχήμα σου.* |
| *[ΙΔ],[ΠΡΟΒ],[ΑΝ ΕΡ]* | *43.Ε: Θα ήταν διαφορετική η ευθεία δηλαδή;* |
| | *44.Νικόλας: εε* |
| *[ΙΔ],[ΠΡΟΒ]* | *45.Ε: Τι διαφορετικό θα είχε αυτή η ευθεία;* |
| *[ΙΔ],[ΠΡΟΒ]* | *46.Τι θα άλλαζε δηλαδή από την ευθεία που βλέπουμε;* |
| | *47.Νικόλας: Η γωνία.* |
| *[ΓΑ],[ΔΙΕΥ],[Ν/Ο]* | *48.Ε: Η γωνία, έτσι;* |
| *[ΓΑ],[ΠΡΟΒ]* | *49.Ε: Και τι θα γινόταν η γωνία;* |
| | *50.Νικόλας: Αμβλεία.* |
| *[ΛΑ],[ΔΙΕΥ],[Ν/Ο]* | *51.Ε: Αμβλεία, έτσι;* |

*(διδασκαλία $1^{η}$, Α συναδέλφου, σελίδα 3)*

Ο δάσκαλος περνάει από μια ανοιχτή ερώτηση περιγραφής[41] σε μια ανοιχτή ερώτηση πρόβλεψης[43], αναφερόμενος στη διαφορετικότητα της γραφικής αναπαράστασης της εν λόγω ευθείας. Συνεχίζει με δύο ερωτήσεις πρόβλεψης[45,46], πιο εστιασμένες, όμως, επιβεβαιώνοντας έτσι το αρχικό του ερώτημα. Δηλαδή, επιβεβαιώνει ότι πράγματι η ευθεία θα είχε κάτι διαφορετικό, το οποίο καλείται ο μαθητής να εντοπίσει. Ο τελευταίος το εντοπίζει[47] και ο εκπαιδευτικός, με μια ερώτηση διευκρίνισης, ζητάει επιβεβαίωση[48]. Έπειτα, ξανά με μία ερώτηση πρόβλεψης, ζητάει από το μαθητή να συγκεκριμενοποιήσει την αλλαγή που θα συνέβαινε[49], την οποία και πάλι θέλει να επιβεβαιώσει με μία ερώτηση διευκρίνισης[51].

Με άλλα λόγια, ο εκπαιδευτικός, προκειμένου να οδηγήσει το μαθητή εκεί που θέλει, υιοθετεί παρεμβάσεις ασφυκτικά κατευθυνόμενες.

2στ) Τέλος, παραθέτουμε το απόσπασμα στο οποίο ο δάσκαλος έχει ως στόχο την τελική απάντηση.

| | |
|---|---|
| *[ΓΑ],[ΠΑΡ]* | *52.Ε: Ενώ εμείς τι γωνία βλέπουμε Νικόλα;* |
| | *53.Νικόλας: Οξεία.* |
| *[ΣΑ],[ΕΞ ΣΥΜΠ]* | *54.Ε: Άρα λοιπόν ποια από τις δύο εξισώσεις αγόρι μου είναι σωστή;* |
| | *55.Ε: Αυτή που θέλουμε δηλαδή.* |
| | *56. Ε: Αυτή που ανταποκρίνεται στο σχήμα μας.* |
| | *57.Νικόλας: Η ψ=χ-1* |
| | *58.Ε: Α, η ψ=χ-1.* |
| | *59.Ε:Την κυκλώνουμε λοιπόν τη μία εξίσωση. Ωραία.* |

*(διδασκαλία 1η, Α συναδέλφου, σελίδα 3)*

Χρησιμοποιώντας το πλαίσιο που έθεσε στο προηγούμενο απόσπασμα, δηλαδή ότι η αρνητική κλίση αντιστοιχεί σε αμβλεία γωνία, ο δάσκαλος, με μια ερώτηση παρατήρησης[52], ζητάει από το μαθητή να διαπιστώσει κατά πόσο η εν λόγω γραφική αναπαράσταση είναι συμβατή με το πλαίσιο αυτό. Ο μαθητής απαντάει ορθά[53]. Κατόπιν, με μία ερώτηση εξαγωγής συμπεράσματος[54], ο εκπαιδευτικός καλεί το μαθητή να δώσει την τελική απάντηση, ο οποίος και το κάνει[57].

Από την έκβαση των διαλόγων στα αποσπάσματα που προηγήθηκαν φαίνεται ο χειρισμός του δασκάλου να είναι επιτυχής, καθότι ο μαθητής καταλήγει, τελικά, στην εξαγωγή του ορθού συμπεράσματος.

Από τα παραπάνω επεισόδια προκύπτει πως ο δάσκαλος θέτει τοπικούς στόχους και δρα κάθε φορά με τον ίδιο τρόπο. Η αρχική του πρόθεση φαίνεται να είναι η χαμηλή καθοδήγηση, την οποία όμως παρακάμπτει στη συνέχεια. Ενεργεί άμεσα, προσφέροντας βοήθεια στο μαθητή, με τη χρήση ασφυκτικά εστιασμένων ερωτήσεων, θα μπορούσε να ισχυριστεί κανείς, σε αυτό που ο ίδιος έχει στο νου του.

Το γρήγορο πέρασμά του από τη χαμηλή στη μέτρια ή και στην υψηλή καθοδήγηση δείχνει, ίσως, το δίλημμά του ως προς τον βέλτιστο χειρισμό της περίστασης.

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται και σχολιάζονται  τρία τυπικά αποσπάσματα, το 3, το 4 και το 5, από τις διδασκαλίες της εκπαιδευτικού Β. Όπως θα γίνει εμφανές, η συγκεκριμένη εκπαιδευτικός προβάλει μια διαφορετική εικόνα στις διδασκαλίες της σε σχέση με αυτήν του εκπαιδευτικού Α.

3. Το παρακάτω είναι ένα απόσπασμα από μια διδασκαλία στην Α' τάξη του γυμνασίου, όπου η εκπαιδευτικός επαναλαμβάνει την ίδια ερώτηση χωρίς εναλλαγές, με συνέπεια να μην οδηγηθεί εκεί που επιθυμεί.  Οι μαθητές γνωρίζουν το τύπο από τον οποίο δίνεται το εμβαδόν ενός ορθογωνίου τριγώνου. Ο στόχος του δασκάλου είναι η γενίκευση του τύπου αυτού για κάθε τρίγωνο.

| | |
|---|---|
| | *1.Ε: Παίρνω ένα τυχαίο τρίγωνο.(το σχεδιάζει).Για δείτε λίγο.* |
| *[ΣΑ],[ΣΥΝ ΑΝΑΠ][Ν/Ο]* | *2.Ε: Μπορώ να πω Κωνσταντίνα ότι το εμβαδόν δίνεται από αυτόν το τύπο;(δείχνει $E_{ΑΒΓ}$=1/2βxυ)* |
| *[ΣΑ],[ΣΥΝ ΑΝΑΠ][Ν/Ο]* | *3.Ε: Μπορώ να το πω;* |
| | *(η Κωνσταντίνα δεν απαντάει)* |
| | *4.Ε: Γιώργο;* |
| | *(ο Γιώργος δεν απαντάει)* |
| *[ΣΑ],[ΣΥΝ ΑΝΑΠ][Ν/Ο]* | *5.Ε: Ελένη μπορώ να πω αυτό το τύπο γι' αυτό το τρίγωνο;* |
| | *6.Ελένη: Αν φέρουμε το ύψος.* |
| | *7.Ε: (διακόπτει) Όχι αν φέρουμε.* |
| *[ΑΛΛΟ]* | *8.Ε: Που ξέρουμε να φέρουμε;* |
| | *9.Ε: Δεν ξέρουμε να φέρουμε. Αγγελική, εγώ άλλο ρωτώ.* |
| *[ΣΑ],[ΣΥΝ ΑΝΑΠ][Ν/Ο]* | *10.Ε: Αυτός ο τύπος αν σου δώσουν εδώ μια βάση, αυτός ο τύπος ισχύει γι' αυτό το τρίγωνο;* |
| *[ΑΛΛΟ]* | *11.Ε: Τι λες;* |
| | *12.Αγγελική: Αν φέρουμε το ύψος.* |
| | *13.Ε: Αν φέρουμε το ύψος. Για να φέρουμε όμως το ύψος. Φέρνουμε ένα ύψος.(το σχεδιάζει). Αυτό είναι το ύψος(δείχνει).* |
| *[ΣΑ],[ΣΥΝ ΑΝΑΠ][Ν/Ο]* | *14.Ε: Αν δηλαδή πω 1/2 βάση επί ύψος, θα είναι το εμβαδόν αυτουνού;* |
| | *15.Πολλοί μαζί: Ναι.* |

*(διδασκαλία $1^{η}$, Β συναδέλφου, σελίδα 6)*

Η εκπαιδευτικός ξεκινάει με δύο ερωτήσεις σύνδεσης αναπαραστάσεων[2,3], με τις οποίες ζητάει από μία μαθήτρια, τη Κωνσταντίνα, να συνδέσει την αλγεβρική αναπαράσταση της έννοιας του εμβαδού ενός τριγώνου με τη γραφική του αναπαράσταση. Η Κωνσταντίνα δεν απαντάει και η εκπαιδευτικός απευθύνεται στο Γιώργο με την ίδια ερώτηση, ο οποίος επίσης δεν απαντάει[4]. Χωρίς να επιμείνει, περνάει στην Ελένη με παρόμοια ερώτηση[5], η οποία προτείνει να σχεδιαστεί το ύψος. Η εκπαιδευτικός παρακάμπτει καταρχήν τη πρόταση αυτή[7,8], εμμένοντας στην επανάληψη της ίδιας ερώτησης[10] και απευθύνεται στην Αγγελική. Η Αγγελική, ωστόσο, επανέρχεται στην πρόταση της Ελένης για τη σχεδίαση του ύψους[12]. Η εκπαιδευτικός σ΄ αυτό το σημείο αποδέχεται τη πρόταση, σχεδιάζει το ύψος[13] και επαναλαμβάνει την αρχική ερώτηση[14], στην οποία παίρνει καταφατική απάντηση από πολλούς μαθητές συγχρόνως[15].

Παρατηρείται, λοιπόν, ότι η εκπαιδευτικός ζητάει απάντηση στο ερώτημά της, κάνοντας χρήση μόνο ενός τύπου ερώτησης, της σύνδεσης αναπαραστάσεων, την οποία επαναλαμβάνει συνεχώς. Περνάει από τον ένα μαθητή στον άλλο, χωρίς να βοηθάει σε κάποια κατεύθυνση με άλλου τύπου ερωτήσεις. Ωστόσο, η επιμονή της στο ίδιο μοτίβο φαίνεται να είναι οικεία στους μαθητές, διότι τους οδηγεί να μαντέψουν και να αποδεχτούν αυτό που εκείνη έχει στο νου της (διδακτικό συμβόλαιο).

4. Απόσπασμα από μία διδασκαλία στην Α’ τάξη του γυμνασίου, όπου η προτεραιότητα του δασκάλου είναι η προγραμματισμένη ύλη στον υπάρχοντα χρόνο. Στόχος της εκπαιδευτικού είναι να διατυπώσουν οι μαθητές την έννοια του εμβαδού.

| | |
|---|---|
| | *1.Ε: Έλα να προλάβω να σας πω και λίγο εμβαδόν.* |
| *[ΣΗΜ],[ΕΜΒ]* | *2.Ε: Όταν ακούτε τη λέξη εμβαδόν, τι σημαίνει εμβαδόν; Ε; Αγγελική;* |
| | *3.Αγγελική: Το σύνολο των πλευρών.* |
| *[ΟΡ],[ΠΕΡ]* | *4.Ε: Το σύνολο των πλευρών τι είναι Αγγελική;* |
| | *5.Αγγελική: ( δεν μπορεί να απαντήσει)* |
| | *6.Ε: Ελευθερία;* |
| | *7.Ελευθερία: Περίμετρος.* |
| | *8.Ε: Έτσι μπράβο.* |
| *[ΟΡ],[ΠΕΡ]* | *9.Ε: Εμβαδόν τι είναι Ελένη;* |
| | *10.Ελένη: Η έκταση.* |
| | *11.Ε: Εμβαδόν τριγώνου είπε η Ελένη είναι η έκταση.* |
| | *12.Πολλοί μαζί: Ναι.* |

|  |  |
|---|---|
|  | *13.Ε: Έτσι.* |
| *[ΛΑ],[ΠΕΡ]* | *14.Ε:  Αλλιώς πως τη λέμε τη λέξη εμβαδόν Μανόλη;* |
|  | *15.Μανόλης: Επιφάνεια.* |
|  | *16.Ε: Επιφάνεια. Πάρα πολύ ωραία.* |

*(διδασκαλία 1$^{η}$, Β συναδέλφου, σελίδα 5)*

Στο παραπάνω απόσπασμα, η εκπαιδευτικός, με μία ερώτηση εμβάθυνσης[2], ζητάει από μία μαθήτρια, την Αγγελική, τη σημασία της έννοιας του εμβαδού. Από την απάντηση της μαθήτριας φαίνεται ότι υπάρχει σύγχυση ανάμεσα στην έννοια του εμβαδού και αυτή της περιμέτρου[3], όμως, η εκπαιδευτικός δεν μένει σ' αυτό το σημείο. Ζητάει από την ίδια μαθήτρια, με μια ερώτηση περιγραφής[4], να διατυπώσει τον ορισμό της περιμέτρου. Η μαθήτρια δεν μπορεί να απαντήσει και η εκπαιδευτικός απευθύνεται σε άλλη μαθήτρια, την Ελευθερία[6]. Παίρνει τη σωστή απάντηση [7] και προχωράει στην Ελένη, ξανά με μια ερώτηση περιγραφής, αλλά σχετικά με τον ορισμό της έννοιας του εμβαδού [9]. Η απάντηση της Ελένης[10] θεωρείται ικανοποιητική, όπως φαίνεται στη συνέχεια[11,13]. Η εκπαιδευτικός θέτει άλλη μία ερώτηση περιγραφής, με την οποία ζητάει από το Μανόλη μία διαφορετική έκφραση για την έννοια «εμβαδόν» [14].  Ο Μανόλης απαντάει[15] και το θέμα θεωρείται λήξαν[16].

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι ο προσανατολισμός της εκπαιδευτικού βρίσκεται στο αποτέλεσμα. Χρησιμοποιεί σχεδόν αποκλειστικά ερωτήσεις περιγραφής για τις έννοιες που ζητάει. Επιλέγει να μη βοηθήσει και να μη σταθεί στη σύγχυση που παρουσιάζεται γύρω από αυτές. Έχει προγραμματίσει μια συγκεκριμένη ποσότητα ύλης και η προτεραιότητά  της είναι να τη προλάβει, όπως άλλωστε δηλώνει η ίδια στην αρχή με την πρόταση [1].

5. Απόσπασμα από μία διδασκαλία στην Α' τάξη του γυμνασίου, όπου η διδασκαλία μοιάζει με διαδικασία διεκπεραίωσης.

Ο στόχος του δασκάλου είναι η διατύπωση του ορισμού του τραπεζίου.

|  |  |
|---|---|
| *[ΟΡ],[ΠΕΡ]* | *1.Ε: Γιώργο, ισοσκελές τραπέζιο ποιο λέγεται;* |
|  | *2.Γιώργος: Αυτό που έχει δύο ίσες πλευρές.* |
|  | *3.Ε: Όχι.* |
|  | *4.Γιώργος: Αυτό που έχει δύο παράλληλες πλευρές.* |
|  | *5.Ε: Αφού είναι τραπέζιο θα τις έχει τις παράλληλες.* |

*6.Γιώργος: Θα είναι και ίσες.*
*7.Ε: Όχι. Μήνα;*
*8.Μήνα: Τα δύο παράλληλα σκέλη του*
*9.Ε: (διακόπτει) Όχι δεν είναι παράλληλα τα σκέλη του*
*10.Μήνα: Τα δύο απέναντι σκέλη του*
*11.Ε: Όχι*
*12.Μήνα: Έχει δύο ίσες γωνίες.*
*13.Ε: Όχι. Βασιλική;*
*14.Βασιλική: Έχει δύο πλευρές παράλληλες.*
*15.Ε: Είπαμε το τραπέζιο έχει δύο πλευρές παράλληλες δε θα το ξαναπούμε αυτό.*

*[ΟΡ],[ΠΕΡ]* *16.Ε: Ποιο τραπέζιο είναι ισοσκελές; Στέλιο;*
*17.Στέλιος: Αυτό που έχει δύο από τις τέσσερις πλευρές του ίσες.*
*18.Άλλη μαθήτρια: Το τραπέζιο είναι το τετράπλευρο που έχει τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες.*
*19.Ε: Το ισοσκελές τραπέζιο είναι αυτό το τραπέζιο που έχει τις μη παράλληλες όχι τις δύο τυχαία. Δεν μπορεί οι βάσεις να είναι και ίσες.*

*(διδασκαλία 1η, Β συναδέλφου, σελίδα 2)*

Σε ολόκληρο το παραπάνω απόσπασμα, η εκπαιδευτικός επαναλαμβάνει δύο φορές με πανομοιότυπο τρόπο, μία στην αρχή[1] και μία προς το τέλος[16], μια ερώτηση περιγραφής, με την οποία ζητάει τον ορισμό του τραπεζίου. Περνάει από μαθητή σε μαθητή, επιβεβαιώνοντας αρνητικά ο ίδιος κάθε φορά τη λαθεμένη απάντηση [3,7,9,11,13], μέχρι να προκύψει το ζητούμενο αποτέλεσμα[18].

Όπως και στο προηγούμενο απόσπασμα, παρατηρούμε ότι κι εδώ ο προσανατολισμός του δασκάλου βρίσκεται στο αποτέλεσμα. Παρατηρούμε, επίσης, ότι προκειμένου να προχωρήσει η διαδικασία, η εκπαιδευτικός επιλέγει να απορρίπτει η ίδια την λαθεμένη κάθε φορά απάντηση και να μετακινείται από μαθητή σε μαθητή, μέχρι να προκύψει το ζητούμενο. Δεν επιδιώκει καμία εμπλοκή άλλου τύπου ερωτήσεων, παρόλη τη καθυστέρηση της διατύπωσης της ορθής απάντησης. Η παραπάνω διαδικασία μοιάζει να έχει διεκπεραιωτικό χαρακτήρα, δηλαδή, πρέπει να γίνει, για να προχωρήσει η διδασκαλία παρακάτω.

# Κεφάλαιο Τέταρτο
# Αποτελέσματα -Συζήτηση

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, στην έρευνα αυτή εξετάστηκαν τρία πεδία (ερευνητικά ερωτήματα). Το πρώτο πεδίο αφορά στη χρονική διάρκεια που μιλάει ο δάσκαλος και οι μαθητές κατά τη διάρκεια μιας διδασκαλίας, στον αριθμό των ερωτήσεων που τίθενται κατά τη διάρκεια μιας διδασκαλίας και στο ποιος θέτει τις ερωτήσεις. Το δεύτερο πεδίο επικεντρώνεται στο περιεχόμενο των ερωτήσεων, με αναφορά τόσο στη μαθηματική γνώση που αποτελεί αντικείμενό τους όσο και στο είδος του γνωστικού και μεταγνωστικού έργου, το οποίο καλούν τους μαθητές να επιτελέσουν. Το τρίτο πεδίο αφορά στα χαρακτηριστικά του διαλόγου, έτσι όπως αυτός υλοποιείται στην τάξη των μαθηματικών μέσα από την αλληλουχία ερώτηση-απάντηση και, συγκεκριμένα, στη διαχείριση από τον εκπαιδευτικό αυτού του διπόλου με στόχο την κατασκευή της μαθηματικής γνώσης από τους μαθητές.

Σε ότι αφορά το πρώτο πεδίο σχετικά με το χρόνο ομιλίας του δασκάλου και αυτόν των μαθητών, τα αποτελέσματα είναι συμβατά με τα αντίστοιχα της έρευνας των Kawanaka & Stigler (2000). Συγκεκριμένα, δείχνουν ότι η κυρίαρχη τάση είναι οι δάσκαλοι να μιλούν πολύ περισσότερο από τους μαθητές τους. Δηλαδή, ο λόγος τους καταλαμβάνει συντριπτικά το μεγαλύτερο μέρος της διδασκαλίας. Έχοντας υπόψη την αρνητική συμβολή αυτής της πρακτικής στη μάθηση των μαθηματικών από τους μαθητές, το Εθνικό Συμβούλιο Διδασκαλίας των Μαθηματικών των ΗΠΑ υποστήριξε ότι «οι δάσκαλοι θα πρέπει να ενθαρρύνονται, για να μειώσουν το σύνολο της ώρας που μιλάνε και άντ' αυτού να θέτουν θέματα, ώστε να εμπλέξουν τους μαθητές σε διάλογο» (NCTM,1991).

Από την ανάλυση των δεδομένων προκύπτει ότι ο εκπαιδευτικός Α μιλάει περίπου διπλάσιο ή τριπλάσιο χρόνο σε σχέση με τους μαθητές του και η εκπαιδευτικός Β σχεδόν τετραπλάσιο ή πενταπλάσιο χρόνο σε σχέση με τους μαθητές της σε κάθε διδασκαλία . Ανάλογη είναι η εικόνα που παρουσιάζεται αναφορικά με το χρόνο ομιλίας σε κάθε εναλλαγή δασκάλου - μαθητή για τον εκπαιδευτικό Α, ενώ για την εκπαιδευτικό Β υπάρχει μια διαφοροποίηση. Συγκεκριμένα, η εκπαιδευτικός Β, σε κάθε εναλλαγή δασκάλου - μαθητή μιλάει κατά μέσο όρο τριπλάσιο ή τετραπλάσιο χρόνο σε σχέση με τους μαθητές της. Αυτή η μικρή διαφοροποίηση του συνολικού χρόνου ομιλίας της από αυτόν των εναλλαγών οφείλεται στο ότι υπάρχουν σημεία, όπου η εκπαιδευτικός μιλάει αρκετό χρόνο πάνω σε κάποιο ζήτημα, χωρίς να υπάρχει κάποια εναλλαγή. Επιπλέον, στην τρίτη διδασκαλία της εκπαιδευτικού Β, εκτός από το χρόνο της λεκτικής συμμετοχής των μαθητών υπάρχει και ένας περιορισμένος χρόνος άλλου τύπου συμμετοχής τους, ο οποίος αντιστοιχεί σε ποσοστό από 8% έως 13% του συνολικού χρόνου διδασκαλίας. Αυτός ο χρόνος οφείλεται στο διάβασμα της εκφώνησης μιας άσκησης, στο σχεδιασμό ενός σχήματος στο πίνακα, στη λύση μιας άσκησης, επίσης στο πίνακα Δεν παρουσιάζεται κάτι αντίστοιχο στις διδασκαλίες του εκπαιδευτικού Α.

Θα μπορούσε, λοιπόν, να υποστηριχτεί ότι η επικράτηση του λόγου του εκπαιδευτικού και στις δύο τάξεις είναι σαρωτική. Οι στιγμές σιωπηλής εργασίας των μαθητών είναι περιορισμένες, ενώ τους δίνεται ελάχιστος χώρος να αναπτύξουν ή έστω και να επιχειρήσουν οποιασδήποτε μορφής λεκτική δράση, που αποτελεί αποκλειστικότητα του εκπαιδευτικού. Έτσι, οι διδασκαλίες, σε ένα πρώτο, καθαρά ποσοτικό επίπεδο, φαίνεται να συνιστούν πράξεις μονολόγου του εκπαιδευτικού, με τους μαθητές να περιορίζονται, στην καλύτερη περίπτωση, σε λόγο απλώς δηλωτικό της παρουσίας τους στα δρώμενα της τάξης.

Σε σχέση με τον αριθμό των ερωτήσεων που τίθενται κατά τη διάρκεια μιας διδασκαλίας, τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι πάνω από το 90% αυτών προέρχεται από τους δύο εκπαιδευτικούς αντίστοιχα και μόνο 3% - 5% προέρχεται από τους μαθητές. Δηλαδή, σχεδόν όλες οι ερωτήσεις προέρχονται από τους δασκάλους, γεγονός που ενισχύει αντίστοιχα ευρήματα σχετικών ερευνών (Kawanaka & Stigler 2000, Βαϊνάς,1998). Αξιοσημείωτος, επίσης, είναι ο μεγάλος αριθμός των ερωτήσεων που υποβάλλονται και από τους δύο εκπαιδευτικούς. Ο αριθμός αυτός κυμαίνεται από 154 έως 177 ερωτήσεις για τον εκπαιδευτικό Α και από 156 έως 194 για την εκπαιδευτικό Β κατά μάθημα. Από το σύνολο των ερωτήσεων αυτών, οι εξατομικευμένες ερωτήσεις καταλαμβάνουν ποσοστό μεγαλύτερο του τριπλάσιου των ομαδικών στην περίπτωση του εκπαιδευτικού Α (74% και 21% αντίστοιχα), ενώ στις διδασκαλίες της εκπαιδευτικού Β οι εξατομικευμένες ερωτήσεις καταλαμβάνουν ποσοστό διπλάσιο από ό,τι οι ομαδικές (65% και 32% αντίστοιχα). Παρατηρείται ότι η εκπαιδευτικός Β απευθύνεται σαφώς περισσότερο στο σύνολο της τάξης απ' ό,τι ο εκπαιδευτικός Α, ο οποίος φαίνεται να απευθύνεται περισσότερο εξατομικευμένα στους μαθητές του.

Τα παραπάνω φανερώνουν ότι ο λόγος του εκπαιδευτικού, που κυριαρχεί στις τάξεις που παρατηρήθηκαν, δομείται γύρω από έναν καταιγισμό ερωτήσεων οι οποίες, στη συντριπτική τους πλειοψηφία, διατυπώνονται από τον ίδιο προς συγκεκριμένους μαθητές. Αυτό, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι ο χρόνος που μιλούν οι μαθητές είναι πολύ λίγος, σηματοδοτεί μια διδακτική πρακτική 'άνευ όρων παράδοσης' του μαθητή και όχι διαπραγμάτευσης σε όρους μάθησης των μαθηματικών που θέτει ο εκπαιδευτικός. Επιπλέον, το εύρημα ότι οι εκπαιδευτικοί απευθύνονται πολύ περισσότερο ατομικά στους μαθητές απ' ό,τι στο σύνολο της τάξης θα μπορούσε να αναγνωστεί με δύο τρόπους. Από τη μια, θα μπορούσε να αποδοθεί στην πρόθεση και των δύο εκπαιδευτικών να 'επιβάλλουν' την εμπλοκή συγκεκριμένων μαθητών στη μαθησιακή διαδικασία, με στόχο είτε τη διευκόλυνση της δικής τους διδακτικής πράξης είτε τη στήριξη της μαθηματικής τους σκέψης. Από την άλλη, είναι δυνατό να ερμηνευτεί με βάση το πλαίσιο μάθησης που σηματοδοτεί. Συγκεκριμένα, οι μαθητές, βλέποντας ότι κάθε φορά ο δάσκαλος εστιάζεται σε κάποιο μαθητή ειδικά και όχι σπάνια αποκλειστικά, ασκούνται στο να παραχωρούν την ευθύνη της απάντησης στον εκάστοτε μαθητή, με αποτέλεσμα οι ίδιοι να μην καταβάλλουν την απαιτούμενη προσπάθεια συνεχούς συμμετοχής στη δράση της τάξης. Κατά συνέπεια, είναι δυνατό να αποδυναμώνεται καθοριστικά η διαδικασία διαπραγμάτευσης της μαθηματικής γνώσης στην τάξη, η οποία, έτσι, προβάλλεται περισσότερο ως προϊόν ατομικής προσπάθειας και λιγότερο ως επίτευγμα κοινής δράσης ατόμων στο πλαίσιο μιας κοινότητας (Βαϊνάς,1998).

Τέλος, θα πρέπει να επισημανθεί ότι και οι δύο εκπαιδευτικοί φροντίζουν να εμπλακούν όσο το δυνατό περισσότεροι μαθητές της τάξης στο μάθημα, αλλά με λίγο διαφορετικό τρόπο από άποψη τακτικής. Ο πρώτος φαίνεται να επιδιώκει να εξασφαλίσει την εμπλοκή του κάθε μαθητή, μέσα από την εγρήγορση που επιβάλλει, εξαιτίας του καταιγισμού ερωτήσεων, στις οποίες καθένας μπορεί να κληθεί να απαντήσει κάποια στιγμή και σε συγκεκριμένα χρονικά περιθώρια, ενώ η δεύτερη, αν και ακολουθεί σε μεγάλο βαθμό την ίδια προσέγγιση, προωθεί μια πιο ήπια κατάσταση προσωπικής εγρήγορσης, καθώς απευθύνεται κάποιες φορές και στο σύνολο της τάξης, εκτονώνοντας έτσι την απαίτηση για συνεχή ατομική εγρήγορση.

Σε ό,τι αφορά το δεύτερο πεδίο (ερευνητικό ερώτημα2), ενώ ο αριθμός των ερωτήσεων που διατυπώνονται και στις δύο τάξεις είναι πολύ μεγάλος, συγκεκριμένα είδη ερωτήσεων είναι εκείνα που συγκεντρώνουν τα μεγαλύτερα ποσοστά. Από τα αποτελέσματα της έρευνας προκύπτει ότι και οι δύο εκπαιδευτικοί ζητούν από τους μαθητές να αναφερθούν, κυρίως, σε μια μαθηματική έννοια (78% και 79% αντιστοίχως) και ειδικά στην αναπαράστασή της (48% και 57% αντιστοίχως) και όχι τόσο στη διαδικασία επίλυσης ή, γενικότερα, προσέγγισης ενός θέματος (7% και 16% αντιστοίχως). Από την αναπαράσταση μιας έννοιας, το μεγαλύτερο ποσοστό συγκεντρώνει η λεκτική και η γραφική ή σχηματική αναπαράσταση στο σύνολο των διδασκαλιών του εκπαιδευτικού Α, ενώ σε αυτό της εκπαιδευτικού Β η αλγεβρική και η γραφική αναπαράσταση. Συνεπώς, θα μπορούσε να υποστηριχτεί ότι, αναφορικά με το περιεχόμενο της μαθηματικής γνώσης που αποτελεί επίκεντρο της δουλειάς μέσα στην τάξη, αυτό βρίσκεται περισσότερο στην εννοιολογική οριοθέτηση των μαθηματικών οντοτήτων και λιγότερο στα δομικά στοιχεία και τα μεθοδολογικά εργαλεία της μαθηματικής επιστήμης. Σε αυτήν την κατεύθυνση, ο εκπαιδευτικός Α εμφανίζεται να επενδύει πιο συχνά στο φυσικό επικοινωνιακό εργαλείο, τη γλώσσα, συγκριτικά με την εκπαιδευτικό Β. Βέβαια, ίσως να είναι φυσικό η γραφική ή η σχηματική αναπαράσταση να συγκεντρώνει υψηλά ποσοστά αναφοράς στις διδασκαλίες που μελετήθηκαν, εξαιτίας του αντικειμένου τους. Ωστόσο, αυτό δεν μπορεί να αιτιολογήσει επαρκώς την κυρίαρχη αναφορά στις συγκεκριμένες αναπαραστάσεις στο πλαίσιο της διδασκαλιών.

Σχετικά με το είδος του έργου που ζητούν οι εκπαιδευτικοί να επιτελέσουν οι μαθητές, μέσω των ερωτήσεών τους, το μεγαλύτερο ποσοστό και για τους δύο αφορά σε γνωστικά έργα (89% και 95% αντίστοιχα). Είναι αξιοσημείωτο, όμως, ότι ανάμεσα σε αυτά τα έργα, τα υψηλότερα ποσοστά συγκεντρώνουν αυτά της περιγραφής (21% και 38% αντίστοιχα) και της διευκρίνισης (23% και 17% αντίστοιχα). Τα υπόλοιπα γνωστικά έργα είναι μοιρασμένα και εμφανίζονται σε ποσοστά κάτω του 10%. Το μεταγνωστικό έργο εμφανίζεται σε εντυπωσιακά χαμηλό ποσοστό για τον εκπαιδευτικό Α (5%) και είναι σχεδόν ανύπαρκτο για την εκπαιδευτικό Β (0,3%).

Τα παραπάνω υποδηλώνουν ότι παρά το μεγάλο αριθμό ερωτήσεων που διατυπώνονται από τους δύο εκπαιδευτικούς στην τάξη, οι απαιτήσεις τους είναι χαρακτηριστικά χαμηλού επιπέδου. Έτσι, από αυτές που επιζητούν την επιτέλεση κάποιου γνωστικού έργου από τους μαθητές και αποτελούν τη συντριπτική πλειοψηφία των περιπτώσεων, περίπου οι μισές περιορίζονται στην απαίτηση για απλή περιγραφή ή διευκρίνιση μαθηματικών γνώσεων, που αναμένεται να έχουν κατακτηθεί, αναδεικνύοντας αυτήν τη γνωστική λειτουργία στο κατεξοχήν ζητούμενο στην τάξη των μαθηματικών. Η περιορισμένη και αποσπασματική εμφάνιση του αιτήματος εκτέλεσης άλλων, πιο σημαντικών για την κατασκευή του μαθηματικού νοήματος γνωστικών έργων από του μαθητές θα μπορούσε να ερμηνευτεί ως ‘η εξαίρεση που επιβεβαιώνει τον κανόνα’. Έτσι, το ζητούμενο εμφανίζεται να είναι η απλή αναπαραγωγή της μαθηματικής γνώσης ή το πολύ ο τοπικού χαρακτήρα έλεγχός της από τους μαθητές και όχι η αυτόνομη ανάπτυξη γενικότερης μαθηματικής σκέψης και κουλτούρας. Με άλλα λόγια, θα μπορούσε να υποστηρίξει κανείς ότι οι πρακτικές των δύο εκπαιδευτικών δεν ευνοούν την εκχώρηση της ευθύνης μάθησης των μαθηματικών στους μαθητές τους (Σακονίδης, κ.ά., 2001), καθώς δεν αξιοποιούν στην πληρότητά του το γνωστικό τους δυναμικό και, παράλληλα, δεν επιτρέπουν την ανάδειξη βασικών δομικών στοιχείων της μαθηματικής επιστήμης, εστιάζοντας σε χαμηλού επιπέδου στόχους μάθησης στο πλαίσιο της σχολικής της έκδοσης. Αυτό επιβεβαιώνεται και από το εξαιρετικά περιορισμένο μεταγνωστικό έργο που ζητιέται από τους μαθητές εκ μέρους των δύο εκπαιδευτικών, πιθανόν εξαιτίας διαφορετικών λόγων, παρόλο που θα ήταν εφικτό. Για παράδειγμα, θα περίμενε κανείς ο εκπαιδευτικός Α να επιμείνει περισσότερο σε τέτοιου είδους έργα, διότι χρησιμοποιεί ορισμένες φορές ερωτήσεις υψηλών απαιτήσεων και ερωτήσεις πρόκλησης στις διδασκαλίες του. Επίσης, και στις διδασκαλίες της εκπαιδευτικού Β θα μπορούσε να εμφανίζεται κάποιο ποσοστό ερωτήσεων που στοχεύουν στην εκτέλεση μεταγνωστικού έργου από τους μαθητές, λόγω του ότι εξετάζει κυρίως ασκήσεις που έχουν επεξεργαστεί εκτός τάξης οι μαθητές, που σημαίνει ότι θα ήταν δυνατό να τους ζητηθεί ίσως να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης τους ή τις διαδικασίες που ακολούθησαν.

Τέλος, η καθοδήγηση που ασκούν οι εκπαιδευτικοί είναι, κατά κανόνα, είτε ασφυκτική (30% και 21% αντίστοιχα) είτε μέτρια (69% και 77% αντίστοιχα), γεγονός που ενισχύει τις παραπάνω επισημάνσεις. Όσο για τις μη εντασσόμενες ερωτήσεις, αυτές ανέρχονται στο ποσοστό του 4% και 3% αντίστοιχα.

Σχετικά με το τρίτο πεδίο (ερευνητικό ερώτημα3), η ανάλυση των αποσπασμάτων που επιλέχθηκαν έδειξε, ότι οι διάλογοι που παρουσιάζονται στις διδασκαλίες των δύο εκπαιδευτικών έχουν τα δικά τους ιδιαίτερα χαρακτηριστικά για τον καθένα.

Ο εκπαιδευτικός Α, όπως έχει ήδη αναφερθεί, ξεκινάει από μια κεντρική ιδέα που εισήγαγε στο προηγούμενο μάθημα και προχωράει στην επέκτασή της. Για να πετύχει το στόχο που βάζει, δίνει συνήθως πολύ χρόνο, από τη στιγμή που ξεκινάει μέχρι να καταλήξει, σε συγκεκριμένες διαστάσεις της ιδέας που μελετάται. Από τα αποσπάσματα φαίνεται να έχει τοπικούς υπό-στόχους που συνδέονται με αυτές τις διαστάσεις, για την επιτυχία των οποίων δρα κάθε φορά με τον ίδιο, σχεδόν εξαντλητικό, τρόπο.

Απευθύνεται σ΄ έναν μαθητή και μένει στη διαπραγμάτευση με το μαθητή που επέλεξε, εκτός αν εκτιμήσει ότι δεν πρόκειται να καταλήξει στο επιθυμητό αποτέλεσμα, οπότε απευθύνεται σε άλλο μαθητή ή σπάνια απαντάει ο ίδιος.

Χρησιμοποιεί μεγάλη γκάμα ερωτήσεων και προσπαθεί να επιτύχει την ενεργοποίηση όσο περισσότερων μαθητών γίνεται και σε όσο υψηλότερο επίπεδο είναι δυνατό. Προς αυτήν την κατεύθυνση, αξιοποιεί μια μεγάλη ποικιλία συχνά υψηλών απαιτήσεων ερωτήσεων και διατυπώνει συνεχώς ερωτήσεις πρόκλησης. Οι ερωτήσεις πρόκλησης, σύμφωνα με τον Smith(1986), αποτελούν σοβαρό κίνητρο ενεργοποίησης για το μαθητή. Ωστόσο, ακυρώνει αυτήν τη διαδικασία, μη παρέχοντας αρκετό χρόνο (μόλις 3 έως 5 δευτερόλεπτα, όπως προκύπτει από τη ποσοτική ανάλυση των δεδομένων), έτσι ώστε να μπορούν οι μαθητές να επεξεργαστούν και να προσφέρουν μια ανάλογη απάντηση. Σύμφωνα με την Anley (1989), σ΄ αυτό το τύπο ερωτήσεων είναι πάρα πολύ σημαντικός ο χρόνος που παρέχει ο δάσκαλος στους μαθητές του για σκέψη. Τέτοιες ερωτήσεις είναι περισσότερο αποτελεσματικές, όταν ο δάσκαλος δεν περιμένει αμέσως απάντηση. Ο εκπαιδευτικός Α, όμως, δεν ενεργεί με αυτό τον τρόπο και αυτό έχει ως αποτέλεσμα να αναγκάζεται (λόγω χρόνου ή έλλειψης εμπιστοσύνης στις δυνάμεις των μαθητών του) να στενεύει προοδευτικά την εστίαση των ερωτήσεων, για να εξασφαλίσει τη δυνατότητα να πάρει αυτό που εκείνος θέλει (funneling process) και το οποίο έχει μάλλον προ-αποφασίσει ως το επιθυμητό από μαθηματική άποψη.

Με τον παραπάνω τρόπο, δεν δίνεται η δυνατότητα στο μαθητή να δράσει ‘αυτόνομα’ αλλά, αντίθετα, υποχρεώνεται να ακολουθήσει τη σκέψη του δασκάλου, με άμεσο αποτέλεσμα τη μη ενεργοποίηση ενός γνήσιου διαλόγου στην τάξη. Βλέπουμε δηλαδή, ότι ο μαθητής δεν είναι πραγματικός συνομιλητής και ο διάλογος δεν είναι πραγματικός διάλογος αλλά *ψευδοδιάλογος.*

Η εκπαιδευτικός Β, όπως έχει επίσης αναφερθεί ήδη, αφιερώνει το κύριο μέρος του μαθήματος στον έλεγχο των εργασιών που είχαν οι μαθητές για το σπίτι και μόνο λίγα λεπτά για το επόμενο μάθημα. Σε αντίθεση με τον εκπαιδευτικό Α, η καθηγήτρια

Β δεν μοιάζει να επενδύει στις επιμέρους συνιστώσες της μαθηματικής γνώσης που μελετάται κάθε φορά αλλά στο γενικότερο στόχο της εκάστοτε ενότητας που διδάσκει.

Οι ερωτήσεις που χρησιμοποιεί είναι περιορισμένης γκάμας, συχνά χαμηλών απαιτήσεων, επαναλαμβάνονται και συνήθως στερούνται πρόκλησης, καθώς παραμένουν προσκολλημένες στο πλαίσιο που έχει καθοριστεί από το σχολικό εγχειρίδιο και ίσως το αναλυτικό πρόγραμμα. Με άλλα λόγια, η προσέγγισή της μπορεί να χαρακτηριστεί ως διεκπεραιωτική του σχολικού μαθηματικού πλαισίου.

Φροντίζει να συμμετέχουν περισσότεροι από ένας μαθητές στην όποια ανταλλαγή λόγου διαμείβεται στην τάξη, αλλά δεν τους επιτρέπει να αποκλίνουν καθόλου από το στόχο που εκείνη έχει κατά νου. Περνάει από τον έναν μαθητή στον άλλο προκειμένω να πάρει απάντηση. Οι Σακονίδης, κ.ά., (2001) αναφέρουν χαρακτηριστικά γι' αυτήν τη πρακτική ότι ο δάσκαλος θέτει ερωτήσεις διαδοχικά στον έναν μαθητή μετά τον άλλο, «κυνηγώντας» τη σωστή απάντηση.

Από τα αποτελέσματα της ποσοτικής ανάλυσης προέκυψε ότι η εκπαιδευτικός Β δίνει πολύ περισσότερο χρόνο στα παιδιά απ' ότι ο εκπαιδευτικός Α (10 έως 30 δευτερόλεπτα), για να επεξεργαστούν και να διατυπώσουν μια απάντηση. Ωστόσο, το είδος των ερωτήσεων που αξιοποιεί δεν είναι απαιτήσεων τέτοιων, ώστε να δικαιολογούνται αυτά τα χρονικά περιθώρια, με αποτέλεσμα οι μαθητές συχνά να αποπροσανατολίζονται και να ατονούν. Χαρακτηριστικό είναι το απόσπασμα 3 (σελίδα 69), όπου επαναλαμβάνει την ίδια ερώτηση με τέτοιο τρόπο, που εν τέλει οι μαθητές απαντούν, παρόλο που δεν τους δόθηκε καμία επιπλέον πληροφορία. Απλώς, γνωρίζουν τη καθηγήτριά τους άρα γνωρίζουν τι υπονοεί και αναμένει και έτσι, κάποια στιγμή, ενεργούν με τον επιθυμητό τρόπο. Μία τέτοια στάση από τους μαθητές σχετίζεται με τη στάση τους απέναντι στη μαθηματική γνώση και δηλώνει ένα συνηθισμένο διδακτικό περιβάλλον (Brousseau,1997) στο οποίο έχουν προσαρμοστεί: *μαθαίνω σημαίνει προσαρμόζομαι στη διδακτική πρόθεση του διδάσκοντα, στον οποίο αναγνωρίζω το ρόλο του φορέα της μαθηματικής γνώσης* (Σακονίδης, κ.ά., 2001). Η Anley (1989), επισημαίνει πως έχει μεγάλη σημασία το πώς κάθε τύπος ερώτησης μεταφέρει πληροφορία. Ο ερωτών συνήθως επισημαίνει, με τον τρόπο που κάνει την ερώτηση, ποιο είναι το ενδιαφέρον στοιχείο για εκείνον.

Η εκπαιδευτικός συνειδητοποιεί τη σημασία της ενεργοποίησης του μαθητή αλλά ο τρόπος υλοποίησης δεν λειτουργεί υπέρ του. Δηλαδή, δεν είναι τέτοιος που να επιτρέπει στο μαθητή να εμπλακεί ουσιαστικά στη διαδικασία της μάθησης. Όπως και στον εκπαιδευτικό Α, έτσι κι εδώ δεν φαίνεται να γίνεται πραγματικός διάλογος αλλά *ψευδοδιάλογος*.

# Κεφάλαιο Πέμπτο

# Συμπεράσματα και προτάσεις για περαιτέρω έρευνα

## 5.1 Συμπεράσματα

Με βάση την ανάλυση των δεδομένων και τη συζήτηση των αποτελεσμάτων που προηγήθηκαν, τα βασικά συμπεράσματα που εξάγονται από την παρούσα μελέτη κατά ερευνητικό ερώτημα έχουν ως εξής:

*Σε ό,τι αφορά το πρώτο πεδίο*

Ο λόγος του δασκάλου καταλαμβάνει το συντριπτικά μεγαλύτερο μέρος μιας διδακτικής ώρας, με αποτέλεσμα να περιορίζεται αναγκαστικά η αυτενέργεια του μαθητή, ο οποίος δείχνει να καταδικάζεται σε αεργία πράξης και λόγου.

Οι ερωτήσεις προέρχονται σχεδόν όλες από το δάσκαλο και ο αριθμός αυτών που τίθενται σε κάθε διδακτική ώρα είναι υπερβολικά μεγάλος, γεγονός που καθιστά πρακτικά αδύνατη την επεξεργασία τους στο σύνολό τους, ακόμη και σε ένα πρωτογενές επίπεδο.

*Σε ό,τι αφορά το δεύτερο πεδίο*

Τα είδη των ερωτήσεων που συγκεντρώνουν τα μεγαλύτερα ποσοστά είναι εκείνα που αφορούν στην αναπαράσταση μιας έννοιας, στη περιγραφή και στη διευκρίνιση. Αυτό δείχνει ότι οι απαιτήσεις είναι χαρακτηριστικά χαμηλού επιπέδου και αυτό που ζητείται κυρίως είναι η απλή αναπαραγωγή της μαθηματικής γνώσης. Έτσι η διαχείριση της μαθηματικής γνώσης ανήκει στον εκπαιδευτικό, γεγονός που επιβεβαιώνει και τη τρέχουσα βιβλιογραφία.

*Σε ότι αφορά το τρίτο πεδίο*

Ο εκπαιδευτικός Α εργάζεται με συγκεκριμένο κάθε φορά μαθητή (όχι απαραίτητα τον ίδιο) για μεγάλα χρονικά διαστήματα. Δημιουργεί, μέσω κατάλληλων τύπων ερωτήσεων, καταρχήν ενεργά περιβάλλοντα μάθησης, μη επιτρέποντας, όμως, την αποτελεσματική τους αξιοποίηση προς όφελός τους από τους μαθητές. Αυτό φαίνεται να συμβαίνει διότι ο εκπαιδευτικός δεν παρέχει χρόνο απάντησης στους μαθητές τέτοιο, που να ανταποκρίνεται στο ύψος των απαιτήσεων των ερωτήσεων που θέτει. Το αποτέλεσμα είναι να επιλέγει μια διαδικασία «στενέματος» των ερωτήσεων, ώστε ο μαθητής να οδηγείται, σχεδόν πάντοτε, εκεί που έχει προαποφασίσει ο εκπαιδευτικός.

Η εκπαιδευτικός Β καλεί έναν ικανοποιητικό αριθμό μαθητών να συμμετάσχουν στο προβληματισμό που επιχειρεί να αναδείξει. Ωστόσο, χρησιμοποιεί ένα μικρό φάσμα τύπων ερωτήσεων, χαμηλής κυρίως απαίτησης, που δεν καταφέρνουν να προσφέρουν τη πρόκληση και τα κίνητρα που θα ήταν απαραίτητα, για να εμπλακούν ουσιαστικά οι μαθητές στη διαδικασία μάθησης. Ο τύπος των ερωτήσεων που θέτει, έχει ως άμεσο στόχο την απόσπαση μιας συγκεκριμένης απάντησης χωρίς περαιτέρω προεκτάσεις.

Τελικά, ο τρόπος προσέγγισης και διαχείρισης της διδασκαλίας από τους δυο εκπαιδευτικούς, παρότι διαφορετικός, δεν λειτουργεί υπέρ του μαθητή ούτε στη μία ούτε στην άλλη περίπτωση. Τα αποτελέσματα της παρούσας μελέτης υποδεικνύουν ότι, αναφορικά με τους μαθητές, καθένας τους «επιχειρεί να τους κάνει να προσαρμοστούν στην επιστημονική πρόθεσή του, δηλαδή, δεν υπάρχει πρόθεση κατασκευής ή συν-κατασκευής της μαθηματικής γνώσης από τους μαθητές, αλλά απόδοσης εκ μέρους τους μιας μαθηματικής απάντησης, στο πλαίσιο της οποίας διατηρεί ο ίδιος τον έλεγχο τόσο στη γνώση όσο και στην οργάνωση της επικοινωνίας και της αλληλεπίδρασης.» (Σακονίδης κ.α., 2000)

Οι δύο εκπαιδευτικοί είναι οι πρωταγωνιστές στο σκηνικό που διαδραματίζεται σε κάθε διδασκαλία. Ο τρόπος με τον οποίο ενεργεί ο καθένας δείχνει ότι είναι συνειδητά ή ασυνείδητα προαποφασισμένο και, κατά συνέπεια, προδιαγραμμένο το τι πρόκειται να συμβεί.

Είναι φανερό πως δεν πληρούνται οι προϋποθέσεις του πραγματικού διαλόγου, που θέλουν το διάλογο να προσεγγίζεται ως μια διαδικασία αναζήτησης, διερεύνησης, ανάληψης ρίσκου, συντήρησης και διατήρησης της ισότητας των μελών που συμμετέχουν σ’ αυτόν(Alro & Skovsmose,2002).

## 5.2. Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα

Τα αποτελέσματα της παρούσας μελέτης αναδεικνύουν μια σειρά από ζητήματα που χρήζουν περαιτέρω διερεύνησης. Ανάμεσα σε αυτά, βασική θέση κατέχουν τα παρακάτω εν δυνάμει ερευνητικά προβλήματα:

1. Μελέτη των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών σχετικά με τη φύση των μαθηματικών και τη μάθηση και τη διδασκαλία τους και της επίδρασής τους στις διδακτικές τους επιλογές: Είναι φανερό πως καθοριστικό ρόλο στον τρόπο με τον οποίο ενεργοποιούνται διδακτικά οι εκπαιδευτικοί στην τάξη διαδραματίζουν οι παραπάνω πεποιθήσεις. Ειδικά, στην περίπτωση του διαλόγου, οι πεποιθήσεις αυτές εμφανίζονται να οριοθετούν τόσο το είδος των ερωτήσεων όσο και τον τρόπο αξιοποίησής τους στην τάξη, για την ανάδειξη της τάξης σε πεδίο γνήσιου και εποικοδομητικού διαλόγου.
2. Μελέτη των βασικών χαρακτηριστικών ενός γνήσιου διαλόγου στην τάξη των μαθηματικών και της επίδρασής τους στην ποιότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης των μαθητών: Τα στοιχεία που καθιστούν ένα διαλογικό περιβάλλον μάθησης στα μαθηματικά αποτελεσματικό, καθώς ο τρόπος εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών και των μαθητών, με στόχο την ουσιαστική αξιοποίηση τέτοιων περιβαλλόντων αποτελούν θέματα ύψιστης σημασίας για τη μαθηματική εκπαίδευση, που, όμως, έχουν διερευνηθεί ελάχιστα.
3. Μελέτη της επίδρασης μεταπτυχιακών προγραμμάτων Διδακτικής των Μαθηματικών στο εκπαιδευτικό έργο στην τάξη των μαθηματικών: Τα τελευταία χρόνια γίνεται πολύς λόγος για την βελτίωση της ποιότητας της εκπαιδευτικής πράξης στα μαθηματικά, μέσα από τη συμμετοχή των εκπαιδευτικών σε κατάλληλα μεταπτυχιακά προγράμματα. Ερωτήματα όπως, 'ποια είναι τα χαρακτηριστικά που θα έπρεπε να διακρίνουν τη μεταπτυχιακή εκπαίδευση των εκπαιδευτικών, ώστε να είναι σε θέση να λειτουργούν αποτελεσματικότερα στην τάξη' ή 'οι εκπαιδευτικοί, που έχουν παρακολουθήσει ένα μεταπτυχιακό πρόγραμμα στον τομέα της Διδακτικής των Μαθηματικών, παρουσιάζονται διαφοροποιημένοι και με ποιον τρόπο, όταν επιστρέφουν στη σχολική τάξη;' επιβάλλεται να αποτελέσουν προτεραιότητα της ερευνητικής κοινότητας της Μαθηματικής Εκπαίδευσης.

## Βιβλιογραφικές Αναφορές


Ackerman, E. (1992). Construction and transference of meaning through form. In L.P. Steffe, J. Gale (Eds), *Constructivism in education*. Hillsdale. NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Adler, J., (2001a). Teaching Mathematics in Multicultural Classrooms. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Aebli, H., (1989). Zwölf Grundformen des Lehrens, Klett-Cotta, Verlag, Stuttgart.

Ainley, J., (1987). Telling Questions. *Mathematics Teaching*, 118,24-26

Alro, H., Skovsmose, O., (2002). Dialogue and Learning in Mathematics Education. *Mathematics Education Library.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Aritigue, M., (1996). The role of epistemology in the analysis of teaching learning relationships in mathematics education. In Y. Pothier (ed.) Proceedings of the Annual Conferences of the Canadian Mathematics Education Study Group, London

Arzt, A., Armour-Thomas, E. (1999). A cognitive model for examining teachers' instructional practice in mathematics: a guide for facilitating teacher reflection. *Educational Studies in Mathematics* 40, 211-235

Bauersfeld, H., (1988). Interaction, construction and knowledge: Alternative perspectives for mathematics education. In D.Grouws, T. Cooney & D.Jones (Eds), *Perspectives on research on mathematics education.* Reston, VA: National Council of teachers of Mathematics

Bishop, A.J., (1988). Mathematical Enculturation: A Cultural Perspective on Mathematics Education Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Bliss, J., Monk.M. &Oghorn, J. (1993). Qualitative data analysis for educational research. London: Croom Helm

Bohm, D., (1996). On Dialogue. London: Routledge.

Brousseau, G., (1997). Theory of didactical situations in Mathematics. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Cohen, L., Manion, L. (1994). Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας. Αθήνα: Εκδόσεις Μεταίχμιο

Dumas Carre, A., Weil-Barais, A., Ravanis, K. & Shourcheh, F. (2003). Interactions maitre-éléves en cours d' activités scientifiques á l'école maternelle. *Bulletin de Psychologie.*

Freire, R., (1994). Cultural Action for Freedom. London: Penguin Books.

Gaudig, H. (1923). Η θεμελιώδης αρχή της ελευθέρας πνευματικής εργασίας, μετάφραση Σ. Καλλιάφας, Αθήνα: εκδόσεις Π. Δημητράκου.

Heinz, K., Kinzel, M., Simon, M., Tzur, R.(2000. Moving students through steps of mathematical knowing: An account of the practice of an elementary mathematics teacher in transition. *Journal of Mathematical Behaviour* 19, 83-107

Isaacs, W., (1994). Dialogue and Skilful Discussion. In P. Senge,C. Roberts,R.B.Ross,B.J.Smith and A.Kleiner (Eds.). London: Nicholas Brealey.

Jaworski, B. (1998). Mathematics Teacher Research: Process, Practice and the Development of Teaching. *Journal of Maths Teacher Education* 1, 3-31.

Jaworski, B.(1999). Mathematics teacher education, research and development: The involvement of teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education* 2,117-119.

Jaworski, B. (2002). Sensitivity and challenge in university mathematics tutorial teaching. *Educational Studies in Mathematics* 51,71-94.

Kawanaka, T., Stigler, J.(1999). Teachers' use of questions in eighth grade mathematics classroom in Germany, Japan and the United States. *Mathematical Thinking and Learning* 1(4),255-278

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Journal* 27,29-63

Lampert, M. (2001). An elaborated model of teaching practice. In M. Lampert, Teaching problems and the problems of teaching. US: Yale University Press

Lindfors, J., (1999). Children's Inquiry. *Using language to make Sense of the World.* New York: Teachers College, Columbia University.

Mellin-Olsen, S., (1993). Dialogue as a tool to handle Various Forms of Knowledge. In C. Julie, D. Angelis and Z. Davis(Eds.). *Pdme I I.* Cape Town: Maskew Miller Longman.

Pehkonen, E.Hartmann, J. Reiss, K.(2001). Problem Solving Skills of Primary Teacher Students on Realistic Problems with Multiple Answers.

Potari, D., Jaworski, B. (2002). Tackling Complexity in Mathematics Teaching Development: Using the Teaching Triad as a Tool for Reflection and Analysis. *Journal of Maths Teacher Education* 5.

Rogers, C.R., (1994). Freedom to learn. New York: Macmillan College Publishing Company.

Schoenfeld, A.H., (1992. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D.Grouws (Ed), Handbook of research on mathematics teaching and Learning, New York: Macmillan Publishing company.

Schoenfeld, A.H., (1987). What's all this fuss about metacognition? In A.H. Schoenfeld (Ed). Cognitive science and mathematics education (pp.189-215). Hillsdate, NJ: Erlbaum

Skovsmose, O., (1994). Towards a Philosophy of Critical Mathematical Education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Skovsmose, O., and Valero, P. (2001). Breaking Political Neutrality: The Critical Engagement of Mathematics Education with Democracy. In B Atweh, H. Forgasz and B. Nebres (Eds.). *Sociocultural Research on Mathematics Education*. Mahwah (New Jersey), London: Lawrence Erlbaum Associates.

Sierprinska, A. (1994). Understanding in Mathematics, London: Falmer Press

Simon, M.A., (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26,* 114-145

Smith, J., (1986). Questioning Questioning. *Mathematics Teaching*, 118, 47

Stewart, J. and Logan, C. (1999). Emphatic and Dialogue Listening. In J. Stewart(Eds.). Bridges Not Walls. A Book about Interpersonal Communication. Boston: McGraw-Hill College

Stigler, J.W., Hiebert,J (1999). The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom. New York: The free press.

Wells, G., (1999). Dialogue Inquiry. Towards a Sociocultural Practice and Theory of Education. Cambridge: Cambridge University Press.

Young, R., (1992). Critical Theory and Classroom Talk. Clevedon Longdun Press Ltd.

Βαϊνάς,Κ.,(1998). Η ερώτηση ως μέσο αγωγής της σκέψης. Αθήνα:Gutenberg

Κολέζα,Ε., (2000). Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών. *Σειρά:Επιστημολογία και Διδακτική των Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών.*Αθήνα: Εκδόσεις Leader Books

Ματσαγγούρας, Η.(1998). Οργάνωση και διεύθυνση της σχολικής τάξης. Εφαρμογές σύγχρονης διδακτικής. Αθήνα: Εκδόσεις Γρηγόρης.

Πόταρη,Δ.,Σακονίδης Χ.(2003). Διαλέξεις στο μάθημα 'Ερευνητική Μεθοδολογία στη Διδακτική των Μαθηματικών', στο Πλαίσιο του μεταπτυχιακού προγράμματος Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα.

Σακονίδης, Χ.(2003). Μάθηση και διδασκαλία των μαθηματικών: από το μαθητή στις κοινότητες πρακτικής στην τάξη. Στο Α. Φραγκουδάκη και Θ. Δραγώνα *Ομοιότητες και Διαφορές:αναζητώντας νέους δρόμους στην εκπαίδευση*. Αθήνα: Εκδόσεις ΥΠΕΠΘ-ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ

Σακονίδης, Χ., Καλδρυμίδου,Μ., Τζεκάκη,Μ.,(2000). Επιστημολογικά και επικοινωνιακά χαρακτηριστικά των μαθηματικών. Στο Α. Γαγάτσης και Γ. Μακρίδης (Επ.), Πρακτικά του Β΄ Μεσογειακού Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, Τόμος 1. Λευκωσία: Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία

Σακονίδης, Χ., Καλδρυμίδου, Μ., Τζεκάκη, Μ.,(2001). Ο ρόλος του δασκάλου στη διαχείριση της μαθηματικής γνώσης. Πρακτικά Πανελληνίου Συνεδρίου «Σχολική γνώση και διδασκαλία στην πρωτοβάθμια Εκπαίδευση», Ιωάννινα: Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

Φερεντίνος, Σ., (2002). Μαθηματικά και δομή της προσωπικότητας των καθηγητών μαθηματικών: Μια ψυχαναλυτική Προσέγγιση. *Ψυχολογία* 9,408-430

Φιλίππου,Κ., Κωνσταντίνου,Χ.,(2001). Συναισθηματικοί παράγοντες και μάθηση των μαθηματικών. *Κείμενα Παιδείας*. Εκδόσεις Ατραπός.

Παπανούτσος Ε.Π., Η αξία του διάλόγου. *Έκφραση Έκθεση για το Ενιαίο Λύκειο, Θεματικοί Κύκλοι,* (σ.41-44). ΟΑΕΔ, , Αθήνα, Έκδοση 2003

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

## Δείγμα διδασκαλιών των δύο εκπαιδευτικών

### 1η διδασκαλία του Εκπαιδευτικού Α (Τάξη: Β' Γυμνασίου)

Ε:Τι μας έχει μείνει αναφορικά με τη μελέτη μας για την ευθεία;
Είναι να εντοπίσουμε σημεία τομής.
Όταν Δάφνη λέμε σημείο τομής, τι ακριβώς εννοούμε;
Δεν σε άκουσα.
Δάφνη:Το σημείο στο οποίο οι ευθείες τέμνονται.
Ε:Το σημείο στο οποίο οι ευθείες τέμνονται.
Αυτή η έκφραση μας θυμίζει κάτι;
Όταν λέμε σημείο τομής μας θυμίζει κάτι; Ε;
Μας έρχεται κάτι άλλο στο μυαλό ;
Να το δούμε λιγάκι πως πηγαίνει το πράγμα από την αρχή του από την αφετηρία του.
Μας θυμίζει κάτι αυτό; Νικόλα!
Νικόλας: Σύνολα ίσως.
Ε: Ακριβώς.
Γίνε λίγο πιο ακριβής σε παρακαλώ.
Όταν λέμε σημείο τομής το τομής τι μας θυμίζει;
Είπες σύνολα και πιο συγκεκριμένα………..
Νικόλας: Κοινά στοιχεία ανάμεσα σε δύο σύνολα.
Ε: Πάρα πολύ ωραία.
Ανάμεσα σε 2,3 ή και περισσότερα.
Μας είπε λοιπόν ο Νικόλας όταν λέμε τομή εννοούμε κοινά σημεία 2 συνόλων.
Άρα όταν λέμε σημείο τομής δύο ευθειών τι εννοούμε;
Να κάνουμε δηλαδή έναν παραλληλισμό της έκφρασής που χρησιμοποιούμε στα σύνολα με το τι πάμε να κάνουμε εμείς εδώ σήμερα. Ναταλία!
Ναταλία: Εκεί(δείχνει) το κοινό σημείο των 2 ευθειών.
Ε: Πάρα πολύ ωραία . Το κοινό σημείο των 2 ευθειών.
Είχαμε πει Μαρία, Θύμισέ μας λίγο, μια ευθεία περιέχει;
Μαρία: εε…2 εε…2
Ε: 2;
Μια ευθεία περιέχει;
Μαρία: Α, άπειρες, άπειρες…εμ
Ε: Τι άπειρες;
Μαρία: Άπειρα σημεία.
Ε: Ωραία αυτό που είπες αλλά το 2 γιατί το είπες;
Μαρία: Ήθελα να πω…
Ε: Ναι…Το 2 πως σου ήρθε στο μυαλό;
Μαρία: Από εε, από εε…
Ε: Τι είναι το 2;
Σου θυμίζει κάτι δηλαδή αυτό ή έτσι το είπες;
Μπερδεύτηκες και το είπες;
Μαρία: Είναι τα 2 σημεία.
Ε: Τι είναι τα 2 σημεία , αφού είπες προηγουμένως άπειρα σημεία, ε;
Μαρία: εεε
Ε: Είπες άπειρα, ξεκίνησες να πεις 2 και τελικά είπες άπειρα.
Αυτό το 2 έχει κάποιο νόημα;
Σου θυμίζει κάτι; Στέλιο!

Στέλιος: Τα 2 σημεία είναι για τη κατασκευή της ευθείας.
Ε: Μπράβο. Έτσι;
Τα 2 σημεία είναι για τη κατασκευή.
Ωραία ας ξεκινήσουμε λοιπόν.
Έχουμε ένα σημείο εδώ.
Όλοι το βλέπουμε.
Το είδαμε και στη πραγματικότητα στα πολυμέσα .
Νικόλα, στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των 2 ευθειών.
Ποιες από τις παρακάτω εξισώσεις νομίζεις ότι είναι οι ευθείες αυτές και γιατί;
Νικόλας: (σκέφτεται)
Ε: Ε, Νίκο;
Νικόλας: Ναι.
Ε: Έχουμε λοιπόν 6 εξισώσεις ευθειών και απεικονίζουμε στο καρτεσιανό μας επίπεδο μόνο 2.
Ψάχνουμε λοιπόν να βρούμε ποιες 2 ανταποκρίνονται.
Ποιες 2 εξισώσεις, να γίνω πιο σαφής, ποιες 2 εξισώσεις ανταποκρίνονται Νικόλα σ' αυτό που βλέπεις;
Νικόλας: -χ-1. ψ=-χ-1
Ε: Η δεύτερη λοιπόν ανταποκρίνεται σε ποια ευθεία;
Νικόλας: εε
Ε: Όπως βλέπεις θα πρέπει να βρεις κάτι να το περιγράψεις.
Δεν θα μου πεις ελάτε να σας δείξω, έτσι;
Γιατί έχω και εγώ έναν τύπο μπροστά μου.
Άρα θα πρέπει να το πεις να το καταλάβει και η Ναταλία και ο Πέτρος.
Όλοι έχουμε κάτι στο μυαλό μας.
Δεν θα παίρνεις έναν έναν να μας δείχνεις.
Νικόλας: Περνάει από το σημείο –1.
Ε: Από το;
Νικόλας: -1
Ε: Από το –1. Μου έρχεται στο μυαλό Νικόλα σημείο, το –1 νομίζω είναι αριθμός.
Νικόλας: (0,-1)
Ε: Πολύ ωραίος, έτσι;
Περνάει λοιπόν από το σημείο (0,-1).
Είναι όμως αυτή;
Γιατί ακριβώς από κάτω εγώ Νικόλα έχω έναν προβληματισμό.
Υπάρχει άλλη μία ευθεία η οποία είναι χ-1.
Ποια από τις 2 λες εσύ ότι ανταποκρίνεται σ' αυτό που μας είπες;
Δηλαδή στην ευθεία που διέρχεται από το σημείο (0,-1);
Νικόλας: ψ=χ-1
Ε: Τώρα το άλλαξες. Και γιατί να μην είναι η πρώτη που μας είπες, η –χ-1;
Νικόλας: Γιατί έχει το …
Ε: Ναι…
Νικόλας: εεε
Ε: Ναι. Πες λίγο, την διαφορά τους πες βρε Νικόλα.
Που διαφέρουν αυτές οι δύο;
Νικόλας: Στο χ
Ε: Ναι ωραία αυτό πως το είχαμε πει θυμάσαι;
Νικόλας: Ότι είναι αρνητικό.
Ε: Ναι, το χ είναι αρνητικό;

Κάπως το είχαμε πει αυτό.
Νικόλας: Η κλίση.
Ε: Ναι , η κλίση.
Φώναξε λίγο να σε ακούμε.
Η μία λοιπόν από τις δύο έχει αρνητική κλίση. Ωραία!
Τι σημαίνει αυτό τώρα; Ε;
Πως ερμηνεύεται αυτό γραφικά;
Προφανώς αλγεβρικά λες: Είναι αρνητικός αριθμός. Ωραία. Ο ένας είναι θετικός. Η μία έχει θετική κλίση. Η άλλη έχει αρνητική κλίση. Εμείς όμως βλέπουμε ταυτοχρόνως Νικόλα, έτσι; Βλέπουμε και έχουμε και στο μυαλό μας την εξίσωση. Άρα πρέπει να μας εξηγήσεις γιατί αυτό που βλέπουμε δεν ανταποκρίνεται στη κλίση που μας λες.
Νικόλας: Αν ήταν έτσι θάπρεπε η ευθεία να ήταν….
Ε: Το ξέρω .
Ποιο είναι το χαρακτηριστικό της τότε;
Το έδειξες με το μολύβι σου, το είδα αλλά δεν θα φωνάξεις έναν έναν της τάξης να έρθει πάνω από το σχήμα σου.
Θα ήταν διαφορετική η ευθεία δηλαδή;
Νικόλας: εε
Ε: Τι διαφορετικό θα είχε αυτή η ευθεία;
Τι θα άλλαζε δηλαδή από την ευθεία που βλέπουμε;
Νικόλας: Η γωνία.
Ε: Η γωνία, έτσι;
Και τι θα γινόταν η γωνία;
Νικόλας: Αμβλεία.
Ε: Αμβλεία, έτσι;
Στην πραγματικότητα που θα είχαμε Αντώνη την ευθεία η οποία έχει αρνητικό συντελεστή διεύθυνσης;
Μας είπε ο Νίκος η γωνία θα ήταν αμβλεία.
Ενώ εμείς τι γωνία βλέπουμε Νικόλα;
Και τι θα γινόταν η γωνία;
Νικόλας: Οξεία.
Ε: Άρα λοιπόν ποια από τις δύο εξισώσεις αγόρι μου είναι σωστή;
Αυτή που θέλουμε δηλαδή. Αυτή που ανταποκρίνεται στο σχήμα μας.
Νικόλας: Η $\psi=\chi-1$
Ε: Α, η $\psi=\chi-1$.
Την κυκλώνουμε λοιπόν τη μία εξίσωση.
Ωραία.
Ας μιλήσει και λίγο ο Πέτρος. Πέτρο, η μία ευθεία που διέρχεται από το σημείο (0,-1), μας είπε ο Νικόλας, έχει εξίσωση $\psi=\chi-1$.
Η δεύτερη τώρα ευθεία ποια θα είναι;
Γιατί είπαμε ότι έχουμε δύο ευθείες.
Ο Νίκος ξεκαθάρισε το τοπίο για τη μία . Εσύ ξεκαθάρισε το τοπίο για την άλλη.
Πέτρος: Πιστεύω ότι η δεύτερη είναι η ευθεία $\psi=2\chi-3$ γιατί περνάει από το σημείο (0,-3).
Ε: Πάρα πολύ ωραία.
Την κυκλώνουμε λοιπόν και αυτή.
Άρα λοιπόν η μία ευθεία μας είναι η $\psi=\chi-1$ και η άλλη είναι η $\psi=2\chi-3$.
Γιατί και βέβαια εξηγούμε, δεν το αφήνουμε στον αέρα αυτό.

Γιατί διέρχεται από το σημείο (0,-3).
Καμιά άλλη δεν διέρχεται από το σημείο αυτό άρα είμαστε εντάξει.
Λοιπόν Ιάσων ποιο είναι λοιπόν τώρα το σημείο τομής τους;
*Βλέπουμε τις ευθείες , βλέπουμε που τέμνονται. Τώρα λοιπόν περιμένουμε να μας πει ποιο είναι το σημείο τομής τους.*
Ιάσων: Λοιπόν το σημείο είναι, το σημείο τομής τους είναι (2,1).
Ε: (2,1) Ωραία. Ναταλία μπορείς να περιγράψεις τη διαδικασία προσδιορισμού του σημείου τομής που φαίνεται παραπάνω;
Δηλαδή τι έχει κάνει αυτός για να βρει το σημείο τομής των δύο ευθειών; Ε;
Τι έχουμε κάνει; Ε; Ναταλία;
Ναταλία: Είδαμε εκεί ότι φέραμε μία κάθετη.
Ε: Για να φέρουμε αυτή τη κάθετη κάτι άλλο έχουμε κάνει πριν.
Λέει αυτός, περιέγραψε τι έκανε αυτός.
Δηλαδή για να βρει το σημείο τομής αυτών των ευθειών.
Διότι είπαμε ευθεία είναι και μια εξίσωση όπως μας είπε ο Νίκος και ο Πέτρος.
Δηλαδή αν σου έδινα εγώ αυτές τις δύο εξισώσεις ψ=2χ-3 και ψ=χ-1 τι θα μου έλεγες;
Φέρνω εγώ μια κάθετη;
Τι έκανε αυτός για να το βρει; Ε;
Δηλαδή θέλω να περιγράψεις τι βλέπεις κορίτσι μου εδώ.
Ναταλία: Βλέπουμε δύο ευθείες.
Ε: Άρα τι έκανε λοιπόν αυτός για να βρει το σημείο τομής; Ε;
Ναταλία: Έκανε τις ευθείες.
Ε:Τις σχεδίασε. Άρα σχεδιάζουμε τις δύο ευθείες στο καρτεσιανό επίπεδο.
Τώρα με τι τρόπο;
Αν θυμάστε είχαμε δει και τα πολυμέσα, έτσι δεν είναι;
Σχεδιάζουμε λοιπόν τις ευθείες στο καρτεσιανό επίπεδο.
Να κάνουμε τώρα , Μαρία, πως θα τις σχεδιάσουμε;
Μαρία: Θα βρούμε τα σημεία ….
Ε: Ναι, σχεδιάζουμε λοιπόν δύο σημεία στο καρτεσιανό επίπεδο. Πως;
Μαρία: Πρέπει να βρούμε τη τομή, όχι.
Ε: Ξεκινώντας μας είπες κάτι.
Μαρία: Πρέπει να βρούμε το, τα σημεία.
Ε: Τα, η, το, τι θα βρούμε; Τα σημεία; Τα άπειρα δηλαδή;
Μαρία: Όχι.
Ε: Γιατί πριν από λίγο μας είπες ότι έχει άπειρα σημεία.
Μαρία: Όχι.
Ε: Τι όχι; Ε; Σπύρο;
Σπύρος: Θα αντικαταστήσουμε την εξίσωση με δύο σημεία.
Ε: Με δύο σημεία την εξίσωση. Δηλαδή;
Σπύρος: Θα εντοπίσουμε δύο σημεία που ανήκουν στην εξίσωση και θα την σχεδιάσουμε.
Ε: Ωραία.
Τι λες λοιπόν, μπορείς να περιγράψεις την διαδικασία εντοπισμού που φαίνεται παραπάνω;
Μας είπε η Ναταλία ότι σχεδιάζω τις ευθείες στο καρτεσιανό επίπεδο και ο Σπύρος λέει εντοπίζοντας δύο σημεία πάνω σ’ αυτές.
Τώρα με ποιο τρόπο, αυτό το είχαμε δει και στο προηγούμενο μάθημα. Έτσι;
Και λέω τώρα Παναγιώτη , είναι αυτή η διαδικασία πάντα εφαρμόσιμη;
Δικαιολόγησε την απάντησή σου.

Δηλαδή μπορώ να το κάνω αυτό κάθε φορά;
Παναγιώτης: Όχι, εξαρτάται από το πεδίο ορισμού.
Ε: Δηλαδή;
Παναγιώτης: Δηλαδή αν έχουμε πεδίο ορισμού το N, τότε δεν μπορούμε να τις σχεδιάσουμε.
Ε:Πάρα πολύ ωραία η παρατήρησή σου. Εννοείται βέβαια, και ίσως δεν το ξεκαθαρίσαμε από την αρχή, δουλεύουμε στο R έτσι ώστε να μην υπάρχει περίπτωση να κόβεται κάπου η ευθεία ή να είναι ημιευθεία ή να είναι μόνο σημεία. Πολύ ωραία η παρατήρησή σου Παναγιώτη. Δουλεύουμε λοιπόν σ' όλο το R. Άρα λοιπόν σε ρωτάω:
Είναι αυτή η διαδικασία πάντοτε εφαρμόσιμη; Δικαιολόγησε την απάντησή σου.
Παναγιώτης: Ναι.
Ε: Ναι. Λες εσύ ναι.
Μπορεί προκειμένου να εντοπίσουμε το σημείο τομής κάποιων ευθειών πάντοτε να ακολουθούμε τη συλλογιστική που πρότεινε ο Σπύρος και η Ναταλία;
Δηλαδή σχεδιάζουμε την ευθεία εντοπίζοντας δύο σημεία πάνω στο επίπεδο, βλέπουμε, γιατί από κει και πέρα πλέον τα πάντα γίνονται, τα πάντα οπτικοποιούνται. Βλέπουμε λοιπόν που τέμνονται. Αυτό που ξεκίνησε η Ναταλία στην αρχή. Φέρνουμε δύο κάθετες.
Μπορεί κάποιος να μας θυμίσει, Κυριάκο, πως το λέμε τώρα αυτό: φέρνουμε δύο κάθετες; Αυτό είναι μια διαδικασία στα μαθηματικά.
Τι θα πεις; Τραβάμε μια κάθετη; Βοηθητική
Τραβάω, αυτό το ρήμα που χρησιμοποιείται πολλές φορές και δεν είναι και εύηχο.
Τι κάνουμε;
Κυριάκο: Βρίσκουμε μία εξίσωση
Ε: Τι εξίσωση;
Για σημεία μιλάμε. Λέω θέλουμε να εντοπίσουμε ένα σημείο. Και λέει η Ναταλία στην αρχή, τραβάμε, φέρνουμε δύο κάθετες.
Κυριάκος: Βρίσκουμε τις συντεταγμένες.
Ε: Ναι δηλαδή τι κάνουμε;
Βρίσκουμε τις συντεταγμένες.
Πως το λέμε αυτό; Θυμάσαι; Έχει μια ονομασία ειδική αυτό. Αυτό ζητάω. Σωστός είσαι, αλλά ζητάω το ακριβές(μαθηματική διαδικασία) Στέλιο!
Στέλιος: Βρίσκουμε τη κλίση.
Ε: Όχι.
Στέλιος: Βρίσκουμε συντελεστή διεύθυνσης.
Ε:Όχι παιδιά σημείο, το είπε ο Κυριάκος. Βρίσκουμε τις συντεταγμένες. Ναι λέγε.
Στέλιος:Τις συντεταγμένες.
Ε: Το ίδιο λες.
Ανάλυση συντεταγμένων βρε παιδιά το λέμε. Αναλύουμε τις συντεταγμένες.
Εντοπίζουμε τις συντεταγμένες του σημείου. Λοιπόν. Είναι λοιπόν, Παναγιώτη θα επανέλθω σε σένα.
Είναι αυτή η διαδικασία πάντα εφαρμόσιμη; Δικαιολόγησε την απάντησή σου.
Παναγιώτης: Ναι είναι εφόσον διαθέτουμε τον σταθερό όρο και τον συντελεστή διεύθυνσης.
Ε: Ωραία.
Διαθέτουμε. Βέβαια δεν μπορώ να καταλάβω ο σταθερός όρος και ο συντελεστής διεύθυνσης που θα μας βοηθήσουν στον εντοπισμό του σημείου.

Παναγιώτης: Αν έχουμε το σταθερό όρο και το συντελεστή διεύθυνσης μπορούμε να εντοπίσουμε τα σημεία τομής με τους άξονες.
Ε: Ναι αλλά εγώ ζητάω αγόρι μου το σημείο τομής των δύο ευθειών, όχι το σημείο τομής με τους άξονες.
Παναγιώτης: Θα φέρουμε κάθετες στους άξονες. Θα αναλύσουμε τις συντεταγμένες.
Ε: Επανέρχεσαι λοιπόν στο σχήμα που προτείνουν η Ναταλία με το Σπύρο. Έτσι;
Σε ρωτάω λοιπόν είναι πάντοτε εφαρμόσιμη;
Μου απαντάς ναι. Ε;
Για να πάρουμε λοιπόν εκείνη τη τελευταία ευθεία, την τελευταία Παναγιώτη, τη βλέπεις εκείνη που είναι $\psi = \chi + \sqrt{2}$ .
Να ένας σταθερός όρος ο $\sqrt{2}$.
Σου λέει κάτι αυτό;
Παναγιώτης: Ναι ότι δεν μπορούμε να την σχεδιάσουμε γιατί έχει το $\sqrt{2}$
Ε: Θα μπορούμε να την σχεδιάσουμε αλλά δεν έχει… τι πράγμα;
Για πες το, κάτι είπες.
Παναγιώτης: Ακρίβεια.
Ε: Ακρίβεια. Έτσι. Θα πάμε με προσέγγιση.
Θα πάμε με διαδικασία προσέγγισης.
Αλλά όλες αυτές οι διαδικασίες που θα ακολουθήσουμε θα εντοπίζουν το σημείο τομής;
Παναγιώτης: Όχι.
Ε: Όχι. Δηλαδή αυτή η περίπτωση που μας έχει δώσει αυτός, που έχουμε σχεδιάσει τι είναι; Σπύρο!
Σπύρος: Είναι μια ειδική περίπτωση.
Ε: Είναι μια ειδική περίπτωση.
Αν όμως το σημείο ήταν λιγάκι πιο δεξιά, λιγάκι πιο αριστερά, θα υπήρχε ακρίβεια στη διαδικασία;
Σπύρος: Όχι.
Ε: Όχι. Έτσι;
Άρα τι θα απαντήσεις εδώ Μαργαρίτα;
Σε ρωτάει κάποιος: είναι η διαδικασία αυτή δηλαδή ο σχεδιασμός και εντοπισμός του σημείου είναι πάντοτε εφαρμόσιμη;
Μαρία: Όχι.
Ε: Όχι, δεν είναι πάντοτε εφαρμόσιμη.
Και ποια Παναγιώτη θα ήταν η αιτιολόγηση που θα έδινες αγόρι μου;
Παναγιώτης: Ακρίβεια.
Ε: Ακρίβεια στη διαδικασία. Ναι διότι δεν θα υπήρχε ακρίβεια στη διαδικασία.
Αυτό τώρα γιατί το λέμε;
Διότι πολύ συχνά σηκώνω ή ρωτάω κάποιον, Ζωή, εντόπισε το σημείο τομής δύο ευθειών. Έτσι;
Και τι λέει η Ζωή; Θα πάω, θα τις σχεδιάσω κύριε και θα το εντοπίσω. Θα είναι πάντοτε σωστή, προσέξτε ,πάντοτε.
Γιατί σε άλλες περιπτώσεις μπορεί να είναι σε άλλες όχι.
Θα είναι πάντοτε Ζωή σωστή, κάνοντας το σχήμα;
Ζωή: Όχι.
Ε: Όχι.
Ζωή:Γιατί μπορεί να μην έχω ακρίβεια.

Ε: Έτσι, εκτός αν η Ζωή παίρνει μαζί της το Laptop από το σπίτι και έχει μαζί της και τα λογισμικά τα μαθηματικά και τότε θα παρέχουν ακρίβεια 100%. Λοιπόν. Ναι;
Γιώργος: Τι κάνουμε τότε;
Ε: Α, πολύ ωραία η τοποθέτηση του Γιώργου. Μόλις θα το ρωτούσα εγώ λοιπόν.
Τι κάνουμε τότε;
Τι έπρεπε να κατασκευάσουμε;
Τι θα έπρεπε να βρούμε; Ε; Σπύρο!
Σπύρος: Να τραβήξουμε κάθετες γραμμές.
Ε: Πάλι γραφικά δηλαδή θα πάμε.
Μας βοηθάει η γραφική παράσταση της συνάρτησης για τον εντοπισμό του σημείου τομής;
Τι απαντάμε; Άλλοτε ναι άλλοτε όχι. Το ξεκαθαρίσαμε αυτό.
Τι έπρεπε να βρούμε;
Σπύρος: Έναν άλλο τρόπο.
Ε: Έναν άλλο τρόπο. Τι τρόπο;
Σπύρος: Αλγεβρικό.
Ε: Αλγεβρικό. Πάρα πολύ ωραία. Λοιπόν προκύπτει η αναγκαιότητα να έχουμε μια αλγεβρική διαδικασία. Πάμε να τη βρούμε. Λοιπόν γυρίζουμε τη σελίδα μας. Αν Α είναι ένα σημείο με συντεταγμένες (α,β) που είναι το σημείο τομής των δύο ευθειών.
Τι συμπεράσματα μπορούμε να έχουμε;
Φεύγουμε τώρα, προσέξτε. Δεν είναι τυχαίο το γεγονός ότι δεν έχουμε πλέον τη γραφική παράσταση.
Το βλέπετε;
Δουλεύουμε τελείως αφηρημένα. Για οποιοδήποτε σημείο, όχι για το συγκεκριμένο.
Λοιπόν. Άρα λέει (α,β) είναι το σημείο τομής δύο ευθειών.
Τι συμπεράσματα μπορούμε να έχουμε;
Για να δω χέρια. Ελάτε τώρα.
Ε; Για να δω, να δω χέρια.
Τι συμπεράσματα μπορούμε να έχουμε; Δάφνη!
Δάφνη: Θα επαληθεύει την εξίσωση.
Ε: Ποια εξίσωση;
Να είμαστε ακριβής εδώ πέρα.
Άρα λοιπόν τι θα καταγράψουμε εδώ;
Τι συμπέρασμα μπορούμε να έχουμε;
Ότι οι συντεταγμένες των σημείων… τι κάνουν; Ε; Έλα Δάφνη.
Δάφνη: Ότι οι συντεταγμένες των σημείων επαληθεύουν τις εξισώσεις των δύο ευθειών.
Ε: Ότι οι συντεταγμένες των σημείων επαληθεύουν τις εξισώσεις των δύο ευθειών.
Ωραία. Ότι οι συντεταγμένες των σημείων επαληθεύουν τις εξισώσεις των δύο ευθειών. Δάφνη επανέλαβε λίγο κορίτσι μου.
Δάφνη: Οι συντεταγμένες των σημείων επαληθεύουν τις εξισώσεις των δύο ευθειών.
Ε: Άρα λοιπόν τι συμπεράσματα μπορούμε να έχουμε;
Ότι οι συντεταγμένες των σημείων επαληθεύουν τις εξισώσεις των δύο ευθειών. Να ρωτήσω κάτι εγώ όμως, Κωνσταντίνε, που δεν σε άκουσα Αναγνωστόπουλε. Εγώ έχω πολλές άγνωστες λέξεις πάνω σ' αυτό που είπε η Δάφνη.
Επαληθεύουν πρώτων τις εξισώσεις τι σημαίνει;
Κωνσταντίνος: Επαληθεύουν τις εξισώσεις σημαίνει ότι αν στη μεταβλητή χ και ψ βάλουμε τις συντεταγμένες α και β.
Ε: Και συγκεκριμένα που θα βάλω τι;

Κωνσταντίνος: Συγκεκριμένα σ' αυτή τη περίπτωση θα βάλω όπου ψ να είναι 1 και όπου χ να είναι 2.
Ε: Εδώ. Αλλά γενικά είπαμε εμείς.
Κωνσταντίνος: Α, γενικά όπου ψ να είναι β και όπου χ να είναι α.
Και η ισότητα πρέπει να ισχύει.
Ε: Πάρα πολύ ωραία. Έτσι;
Επαληθεύω λοιπόν τι σημαίνει;
Για επανέλαβε λίγο τώρα.
Κωνσταντίνος: Αν αντικαταστήσω τις μεταβλητές χ και ψ από τις συντεταγμένες του σημείου, η εξίσωση θα ισχύει.
Ε: Πάρα πολύ ωραία έτσι;
Η ισότητα θα ισχύει. Άρα συνεπώς λέει, να κάνουμε τώρα εδώ μια σύνδεση να μην το έχουμε ξεκομμένο στο μυαλό μας.
Αν λοιπόν αυτό είναι το σημείο τομής τους, τι συμπέρασμα μπορούμε να έχουμε;
Λέει η Δάφνη ότι οι συντεταγμένες του σημείου επαληθεύουν τις εξισώσεις των δύο ευθειών. Συνεπώς λέει ο Κωνσταντίνος αν αντικαταστήσουμε, και εδώ να είμαστε λίγο πιο ακριβής.
Αν αντικαταστήσουμε όπου χ ποιο;
Κωνσταντίνος: α
Ε: α και ψ=β. Ναι συνέχισε τη πρόταση.
Κωνσταντίνος: Η ισότητα θα ισχύει.
Ε: Η ισότητα θα ισχύει. Η ισότητα λοιπόν θα ισχύει. Τέλεια.
Τότε τι θα έχουμε;
Για να δούμε.
Παίρνουμε, είπαμε θα πάρουμε μία ευθεία την ψ=χ-1 και όπου ψ τι είπαμε ότι θα βάλουμε;
Κωνσταντίνος: Το β.
Ε: Το β και όπου χ;
Κωνσταντίνος: Το α.
Ε: Το α. Άρα παίρνουμε τότε β=α-1.
Έτσι δεν είναι;
Και ποια ήταν η άλλη ευθεία, δεν θυμάμαι;
Η ψ= 2χ-3 και Ζωή λίγο σε παρακαλώ
Ζωή: ψ, εεεε, β=εεεε
Ε: Δεν τις κύκλωσες.
Ποιες είναι;
Η μία είναι ψ=2χ-3 και η άλλη η ψ=χ-1.
Ζωή: β=2 α –3
Ε: Ωραία. Τι έχουμε κάνει λοιπόν μέχρι τώρα;
Έχουμε πάρει, λοιπόν για να μην επαναλάβω πάλι και πηγαίνουμε γύρω γύρω, πηγαίνω κατευθείαν σ' αυτό που είπε ο Κωνσταντίνος. Δηλαδή οι συντεταγμένες του σημείου Α που είναι το κοινό σημείο των δύο ευθειών επαληθεύουν τις δύο εξισώσεις. Εγώ τώρα θα κάνω το δικηγόρο του διαβόλου, Λυδία. Δεν βλέπω ακόμα να έχουμε βρει το σημείο.
Λυδία: Το ξαναλέτε;
Ε:Δηλαδή τότε λέω, μας είπε ο Κωνσταντίνος το σημείο τομής κλπ κλπ και φτάσαμε εδώ. Τότε το β=α-1. Η Ζωή μας είπε για την μία ευθεία θα είναι αυτό εδώ( δείχνει). Για την άλλη ευθεία θα είναι β=2 α –3. Να το θέσω διαφορετικά.

Εγώ δεν βλέπω κανένα σημείο εδώ. Δηλαδή πάλι πρέπει να κάνω τη γραφική παράσταση στο καρτεσιανό επίπεδο για να βρω το σημείο. Δεν ξέρω.
Θεοδώρα εσύ τι λες; Ε;
Θεοδώρα: εεεε
Ε: Δεν βλέπεις κάτι;
Για διάβασε λίγο τις σχέσεις βρε Θεοδώρα.
Θεοδώρα: β=2 α….
Ε: Α, στοπ.
Άλλος μαθητής: Α κύριε εε και στα δύο υπάρχει β ίσον.
Ε: Ωραία, και στα δύο λοιπόν λέμε β ίσον.
Πώς το λέμε αυτό στα μαθηματικά;
Μαθητής: Ισότητα.
Ε:Ναι. Τυχαία; Ε; Σάντυ να φέρω και κανέναν καφέ;
Σάντυ: Όχι
Ε:Ε; Έλα. Ωραία λοιπόν.
Δεν έχεις κάτι να παρατηρήσεις εσύ;
Δεν έχεις τα ματάκια σου μήπως; Ε;
Σάντυ: Ε, το ένα είναι β=α, το άλλο είναι β=2 α.
Ε: Ωραία. Και όχι μόνο α και 2 α αλλά και κάτι άλλο.
Τότε;
Κάπου θέλω να καταλήξω εγώ. Αυτό είναι που με νοιάζει.
Σάντυ: Το ότι η μία έχει διπλή κλίση από την άλλη.
Ε: Θα μπορούσαμε να το πούμε, αλλά αυτό δεν έχει να κάνει με το σημείο τομής. Η παρατήρησή σου είναι καλή αλλά τη βρίσκουμε λίγο άσχετη με αυτό που ψάχνουμε. Άμα σε ρωτούσα κάτι για τη κλίση θα’λεγες, ναι αυτό, αλλά για το σημείο τομής που σε ρωτάω, πρόσεξε τι θα απαντήσεις.
Σε ρωτάω ποιο είναι το σημείο τομής και μου απαντάς ότι η μία έχει διπλή κλίση από την άλλη.
Βγάζεις νόημα;
Σάντυ: Όχι
Ε: Άρα είσαι σαφής;
Σάντυ: Όχι
Ε: Είσαι ακριβής;
Σάντυ: Όχι.
Ε: Άρα κάτι δεν πάει καλά Αντώνη. Στέλιο.
Στέλιος: Το άλλο.
Ε: Τι το άλλο;
Στέλιος: Το β.
Ε: Το β. Αύριο θα μάθουμε και το γ, όμως (γέλια από κάτω) και μετά το δ, στο υπόσχομαι αυτό.
Ποιος δεν έχει μιλήσει καθόλου; Άννα;
Άννα: Είναι και τα δύο ίσα.
Ε: Τα πρώτα μέλη τι είναι βρε παιδιά;
Τάξη: Ίσα.
Ε: Άρα συμπέρασμα;
Τάξη: Άρα ότι θα βγει θα…
Ε: Ακριβώς.
Δηλαδή από δω (δείχνει) τι έχει; β .
Από δω (δείχνει) τι έχει; β .

Τι είναι τα πρώτα μέλη;
Τάξη: Ίσα.
Ε: Άρα αυτό που θα βγει τι πρέπει να' ναι;
Τάξη: Το ίδιο.
Ε: Συνεπώς;
Χριστιάνα: Το αποτέλεσμα που θα βγει, θα ισχύει…
Ε: Δηλαδή ποιο θα είναι το αποτέλεσμα για το ένα β;
Χριστιάνα: Το α-1
Ε: Ναι.
Χριστιάνα: Και το άλλο θα είναι 2 α-3.
Ε: Τι πρέπει να είναι αυτά μεταξύ τους;
Χριστιάνα: Ίσα.
Ε: Το ένα αποτέλεσμα, έτσι, λέει θα είναι το α-1, το άλλο 2 α-3 και τι λέει ότι πρέπει να είναι Χριστιάνα αυτά μεταξύ τους; Ίσα.
Άρα λοιπόν εδώ τώρα τι έχουμε; Νικόλα!
Νικόλας: α-1=2α-3
Ε: Αυτό τώρα τι είναι αγόρι μου;
Νικόλας: Τι είναι;
Ε: Τι είναι; Ξέρω εγώ.
Η συμμαθήτριά σου πανέξυπνη έφτασε μέχρι εδώ.
Έλα τι ψάχνουμε να βρούμε;
Νικόλας: Το σημείο τομής.
Ε: Το σημείο τομής. Δηλαδή το α και το β. Σ' ακούμε λοιπόν Μάρκο.
Μάρκος: (σκέφτεται) Αυτά είναι ισότητες.
Ε: Δηλαδή τι είναι;
Μάρκος: Βγαίνει το ίδιο αποτέλεσμα.
Ε: Προχώρα το τότε. Ε τι ; Θα το καμαρώνω;
Μάρκος: Αντικαθιστώ το α μ' έναν αριθμό.
Ε: Τι; Μ' όποιον θέλω;
Μάρκος: Μ' όποιον του ταιριάζει.
Ε: Πως θα τον βρω αυτόν που ταιριάζει;
Μάρκος: Με την εφαπτομένη.
Ε: Τι δουλειά έχει παιδί μου η εφαπτομένη; Ε; Λυδία;
Λυδία: Εξίσωση.
Ε: Εξίσωση βρε είναι αυτό.
Τι την κάνουμε την εξίσωση Λυδία;
Λυδία: Θα τη λύσουμε.
Ε: Ε λύσε τη παιδί μου.
Λυδία: Θα φέρουμε το 2 α από την άλλη πλευρά.
Ε: Λέει η Λυδία κάτι, πετάγεται ο Αναγνωστόπουλος: Δηλαδή χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους. Είναι πολύ καλός όμως έτσι; Σήμερα είσαι πάρα πολύ καλός. Να προσέχεις έτσι πιο συχνά. Έλα Λυδία.
Λυδία: α-2 α = -3+1
Ε: Ωραιότατα. Συνέχισε Λυδία.
Λυδία: -α=-2
Ε: -α=-2
Λυδία: α=2
Ε: 2. Τελειώσαμε όμως τώρα Θεοδώρα;
Θεοδώρα: Όχι.

Ε: Τι πρέπει να βρούμε;
Θεοδώρα: Το β.
Ε: Το β. Πως θα το βρούμε κορίτσι μου το β;
Θεοδώρα: Αντικαθιστώντας το α που βρήκαμε.
Ε: Πάρα πολύ ωραία.
Αυτό τώρα το α που βρήκαμε, το 2, ξέρετε τι είναι; Είναι αυτό που έψαχνε ο Μάρκος.
Θυμόσαστε που είπε: θα βρω έναν αριθμό να ταιριάζει;
Αυτό που είπε δηλαδή ο Μάρκος, να ταιριάζει ο αριθμός.
Ποιος είναι ο αριθμός;
Όλοι μαζί:: Το 2.
Ε: Το 2. Δηλαδή αν όπου α βάλλεται εδώ το 2(δείχνει) και εδώ το 2 (δείχνει), θα βρείτε δύο αριθμούς που θα είναι τι;
Όλοι μαζί: Ίσοι.
Ε: Ίσοι. Εντάξει.
Τι είπες Θεοδώρα ότι θα κάνουμε;
Θεοδώρα: β=2-1
Ε: Ωραία.
Αν πήγαινες στην άλλη τι θα γινόταν;
Θεοδώρα: β=2x2-3
Ε: Θα έβρισκες άλλο αποτέλεσμα;
Θεοδώρα: Όχι, το ίδιο.
Ε: Το ίδιο.
Τελειώσαμε;
Θεοδώρα: Όχι.
Ε: Όχι.
Τι ψάχνουμε;
Όλοι μαζί: Σημείο.
Γιάννης: Το σημείο τομής είναι (2,1).
Ε: (2,1). Και βέβαια. Υπάρχει αν θέλετε και η γραφική επαλήθευση, που είναι στη πρώτη σελίδα του φύλλου εργασίας μας. Μπορούμε να τη δούμε κιόλας, (2,1).
Το' χουμε πει κιόλας. Ωραία. Και λέει τώρα (η άσκηση):
Μπορείς να περιγράψεις τι ακριβώς έχεις κάνει προκειμένου να βρεις το σημείο τομής δύο ευθειών;
Τι έχουμε κάνει δηλαδή;
Τι κάναμε;
Γιατί προφανώς αν ζητηθεί κάτι τέτοιο, έτσι, δεν θα το πάτε εσείς: αυτό, αυτό, αυτό. Δομημένα στο μυαλό μας.
Πολλοί μαζί: Θα ζητηθεί;
Ε: Δεν ξέρω αν θα ζητηθεί. Τα' χουμε πει πολλές φορές αυτά. Μην επανερχόμαστε στο ίδιο, και γυρίζουμε γύρω, γύρω. Λοιπόν Σπύρο, για λίγο συμμάζεψέ τα.
Σπύρος: Πήραμε τις δύο εξισώσεις των ευθειών που τέμνονται.
Ε: Ωραία.
Σπύρος: Και είπαμε ότι το σημείο που τέμνονται είναι Α με συντεταγμένες (α,β).
Ε: Ωραία
Σπύρος: Θεωρήσαμε
Ε: Γράψτε, περίμενε λίγο να προλαβαίνουν να γράφουν. (Υπαγορεύει) Θεωρήσαμε ένα σημείο(α,β)……(το επανέλαβε τρεις φορές). Σπύρο!
Σπύρος: Λοιπόν, για να επαληθεύσουμε τις εξισώσεις αντικαταστήσαμε τις συντεταγμένες με το χ και ψ.

Ε: Ωραία, Τώρα υποτίθεται ότι απευθύνεσαι στους συμμαθητές σου.
Εγώ όταν απευθύνομαι στη τάξη μου έτσι κάνω;
Όλα μαζί τα λέω;
Βήμα, βήμα.
Τι κάναμε λοιπόν μετά;
Σπύρος: Μετά αντικαταστήσαμε στις εξισώσεις το ψ και το χ με τις συντεταγμένες.
Ε: (υπαγορεύει) Αντικαταστήσαμε λοιπόν, πολύ ωραίος ο Σπύρος, Αντικαταστήσαμε το ψ και το χ με τις συντεταγμένες.
Σπύρος:Μετά επειδή το ψ ήταν ίσο αφού είχαμε το ίδιο σημείο.
Ε: Πολύ ωραία.
Εφόσον έχουμε λοιπόν το ίδιο σημείο ( το επαναλαμβάνει τρεις φορές), δεν θα είναι όμως το ψ.
Το ψ τι είπες ότι το έκανες;
Σπύρος: Το αντικατέστησα.
Ε: Το β είναι το ίδιο.
Ωραία.
Εφόσον λοιπόν τα πρώτα μέλη είναι ίσα, Σπύρο
Σπύρος: Αφού τα πρώτα μέλη είναι ίσα θα είναι και τα δεύτερα μέλη ίσα και σχηματίζουν μια εξίσωση.
Ε: Πολύ ωραία, την οποία και την βλέπουμε. Συνεχίζουμε. (υπαγορεύει) Εφόσον λοιπόν τα πρώτα μέλη είναι ίσα θα είναι και τα δεύτερα. Καταστρώνουμε την εξίσωση, την οποία και επιλύουμε. Βρίσκουμε έτσι τα α και β. Ωραία.
Λοιπόν για το άλλο μάθημα στη σελίδα 14 θα κάνετε……..(κουδούνι)

**1η διδασκαλία της Εκπαιδευτικού Β   (Τάξη:Α΄ Γυμνασίου)**

Ε:Σήμερα λοιπόν έχουμε τα τετράπλευρα. Για να μου πείτε είδη τετραπλεύρων. Ιωάννα, πες ένα.
Ιωάννα: Τραπέζιο
Ε: Τραπέζιο. Μαρία;
Μαρία: Ο Ρόμβος.
Ε: Ο Ρόμβος. Χρήστο;
Χρήστος: Το τετράγωνο.
Ε: Το τετράγωνο. Αγγελική;
Αγγελική: Το παραλληλόγραμμο.
Ε: Το παραλληλόγραμμο. Ελένη;
Ελένη: Συμπληρώνουμε το παραλληλόγραμμο.
Ε: Συμπληρώνουμε το παραλληλόγραμμο τι;
Ελένη: ……
Ε: Δεν σε άκουσα πες το δυνατά (ελαφρώς εκνευρισμένη φωνή)
Ελένη: (δεν μπορεί να πει)
Ε: Γιάννη;
Γιάννης: Το ισοσκελές τραπέζιο. Το σύνολο των πλευρών.
Ε: Το ισοσκελές τραπέζιο, μπράβο. Κυριάκο;
Κυριάκος: Ο Ρόμβος
(το είπαμε φωνάζουν από κάτω)
Ε: Έλα να δούμε, Λεωνίδα;
Λεωνίδας: Ένα σκαληνό.
Ε: Όχι, σκαληνό λέμε στα τρίγωνα. Έλα πες το καλά. Έλα θα στο πάρει η Ελευθερία. Ένα τι; Πως το λέμε;
Ελευθερία: Τυχαίο.
Ε: Τετράπλευρο. Τυχαίο τετράπλευρο δεν το λέμε;
Ε: Λοιπόν για να δούμε. Να δούμε τις ιδιότητες που έχουν αυτά. Ας αρχίσουμε, κατ' αρχήν θα μου πείτε ποιο είναι το τετράπλευρο που έχει τις λιγότερες ιδιότητες. Τις λιγότερες ιδιότητες. Ποιο; Γρηγόρη;
Γρηγόρης: Το τυχαίο τετράπλευρο.
(Κάποιος πετάγεται αμέσως μετά το Γρηγόρη και λέει 'το τραπέζιο')
Ε: Το τραπέζιο(τονίζει με έμφαση). Το τυχαίο είναι το τυχαίο και τα άλλα είναι ειδικές κατηγορίες. Το τραπέζιο ποια ιδιότητα έχει Δήμητρα;
Δήμητρα: Ε, Μόνο δύο πλευρές είναι παράλληλες.
Ε: Αν σου πει κάποιος τι είναι τραπέζιο τι θα του πεις;
Δήμητρα: Είναι το τετράπλευρο που οι δύο του πλευρές είναι παράλληλες.
Ε: Είναι το τετράπλευρο που οι δύο του πλευρές είναι παράλληλες. Γιώργο, ισοσκελές τραπέζιο ποιο λέγεται;
Γιώργος: Αυτό που έχει δύο ίσες πλευρές.
Ε: Όχι.
Γιώργος: Αυτό που έχει δύο παράλληλες πλευρές.
Ε: Αφού είναι τραπέζιο θα τις έχει τις παράλληλες.
Γιώργος: Θα είναι και ίσες.
Ε: Όχι. Μίνα;
Μίνα: Τα δύο παράλληλα σκέλη του
Ε: (διακόπτει) Όχι δεν είναι παράλληλα τα σκέλη του
Μίνα: Τα δύο απέναντι σκέλη του

Ε: Όχι
Μίνα: Έχει δύο ίσες γωνίες.
Ε: Όχι. Βασιλική;
Βασιλική: Έχει δύο πλευρές παράλληλες.
Ε: Είπαμε το τραπέζιο έχει δύο πλευρές παράλληλες δε θα το ξαναπούμε αυτό. Ποιο τραπέζιο είναι ισοσκελές; Στέλιο;
Στέλιος: Αυτό που έχει δύο από τις τέσσερις πλευρές του ίσες.
Μαθήτρια1: Το τραπέζιο είναι το τετράπλευρο που έχει τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες.
Ε: Το ισοσκελές τραπέζιο είναι αυτό το τραπέζιο που έχει τις μη παράλληλες όχι τις δύο τυχαία. Δεν μπορεί οι βάσεις να είναι και ίσες. Θα πούμε τις μη παράλληλες πλευρές ίσες. Αμέσως μετά το τραπέζιο που έχει τις δυο πλευρές παράλληλες ποιο είναι το σχήμα που έχει και τις άλλες δύο πλευρές παράλληλες;
Μαθήτρια1: Το παραλληλόγραμμο
Ε: Το παραλληλόγραμμο. Τι είναι παραλληλόγραμμο;
Μαθήτρια1: Είναι το τετράπλευρο που έχει ανά δύο τις πλευρές παράλληλες.
Ε: Είναι το τετράπλευρο που έχει ανά δύο τις πλευρές παράλληλες. Έχει καμιά άλλη ιδιότητα αυτό; Εκτός από τις πλευρές και τις γωνίες γίνεται τίποτα; Θοδώρα;
Θεοδώρα: (δεν ακούγεται)
Ε: Όχι το παραλληλόγραμμο έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες. Σε σχέση με τις γωνίες συμβαίνει τίποτα; Αναστασία;
Αναστασία: Οι γωνίες είναι ανά δύο ίσες.
Ε: Ποιες ανά δύο;
Αναστασία: Ανά δύο παράλληλες.
Ε: Παιδιά το παραλληλόγραμμο πόσες γωνίες έχει; Κωσταντίνα;
Κωσταντίνα: Τέσσερις.
Ε: Τέσσερις. Δεν καταλαβαίνεται ποιες είναι οι δύο; Δε μπορείτε να τις φανταστείτε; Ποιες; Η μια και η… ;
Μαθήτρια2: Η απέναντι.
Ε: Η απέναντι. Έχουν τις απέναντι γωνίες ίσες. Τι άλλο συμβαίνει εκεί; Αν φέρεις μία διαγώνιο, Βασιλική, τι θα γίνει;
Βασιλική: Οι διαγώνιοι διχοτομούνται.
Ε: Διχοτομούνται. Το καταλαβαίνεται αυτό τι θα πει; Ε; Δηλαδή Γρηγόρη τι θα πει αυτό; Αν έχω ένα παραλληλόγραμμο εδώ και φέρω τις διαγώνιές του, τι θα πει; Ότι αυτό το σημείο, αυτό το σημείο χωρίζει τη καθεμιά σε τι;
Γρηγόρης: Σε δύο ίσα μέρη.
Ε: Έτσι. Μετά ποιο τετράπλευρο έχω; Αγγελική.
Αγγελική: Έχουμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο
Ε: Ωραία. Που τι παραπάνω έχει από το προηγούμενο;
Αγγελική: Όλες οι γωνίες του είναι ίσες. Και όλες οι γωνίες του είναι ορθές.
Ε: Είναι ορθές. Αν σου πούνε ανεξάρτητα από το προηγούμενο ‘πες τι είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο’, τι θα πεις;
Αγγελική: Θα πω ότι είναι ένα τετράπλευρο
Ε: Ωραία…
Αγγελική: … που έχει τις πλευρές του ανά δύο παράλληλες
Ε: Πολύ ωραία
Αγγελική:…και όλες οι γωνίες του είναι ορθές.
Καθ: Εξαιρετικά. Αγγελική, μετά από το ορθογώνιο ποιο βλέπουμε να έχει σειρά; Έχει σημασία να τα θυμόμαστε και με τη σειρά. Μετά το ορθογώνιο τι το κάνουμε;

Τώρα τελειώσαμε με τη παραλληλία και τις ορθές γωνίες. Τώρα τι άλλο κάνουμε; Ποιο σχήμα γίνεται μετά; Αν πάρω τις πλευρές του να είναι ίσες, τι σχήμα θα γίνει; ( κάποιοι μιλάνε στην Αγγελική) Αφήστε τη λίγο. Αγγελική, το παραλληλόγραμμο να γίνει με πλευρές ίσες.
Αγγελική:( δεν απαντάει)
Ε: Θα γίνει τετράγωνο;
(απευθύνεται στη τάξη) Ποιο με πλευρές ίσες γίνεται τετράγωνο;
(σηκώνει χέρι η Αγγελική) Ναι Αγγελική;
Αγγελική: Το ορθογώνιο.
Ε: Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο γίνεται τετράγωνο.
Το παραλληλόγραμμο τι θα γίνει με ίσες πλευρές;
Πριν από το τετράγωνο ποιο ξέρουμε;
Ποιο σχήμα;
Αγγελική: Το ρόμβο.
Ε: Το ρόμβο, έτσι μπράβο Αγγελική. Τι είναι ο ρόμβος; Από την αρχή να το πεις. Είναι ένα…;
Αγγελική: Είναι ένα τετράπλευρο με ίσες πλευρές
Ε: Ναι, και τι άλλο θα έχει; Πρέπει πρώτα να είναι Παραλληλόγραμμο και ύστερα να έχει ίσες πλευρές. Άρα τι πρέπει να είναι οι ίσες πλευρές; Ανά δύο…; .
Αγγελική: Να είναι ανά δυο παράλληλες.
Ε: Παράλληλες.
Ενώ το τετράγωνο;
Ποιος θα πει τι είναι, Γιάννη, το τετράγωνο;
Γιάννης: Τετράγωνο είναι το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις πλευρές και όλες τις γωνίες ίσες.
Ε: Ναι, και τι άλλο έχει; Παιδιά μην ξεχνάτε αυτό.
Τι είναι οι γωνίες επιπλέον;
Τι είναι οι γωνίες στο τετράγωνο Ιωάννα;
Ιωάννα: Ορθές.
Ε: Ορθές. Για να δούμε τώρα. Για να σας ρωτήσω και ακούτε. Ο Ρόμβος είναι παραλληλόγραμμο; Είναι είδος παραλληλογράμμου;
Όλοι μαζί: Ναι
Ε: Ναι. Στο παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοι τι κάνουν είπε ο Γρηγόρης;
Μαθήτρια3: Διχοτομούνται.
Ε: Διχοτομούνται. Άρα στο ρόμβο θα διχοτομούνται; Για να το σκεφτείτε. Αναστασία;
Αναστασία: Ναι.
Ε: Ναι, γιατί ;
Αναστασία: Γιατί είναι παραλληλόγραμμο.
Καθ: Έτσι, γιατί είναι παραλληλόγραμμο. Καταλαβαίνεται; Έχει σημασία. Είναι παραλληλόγραμμο και θα συμβαίνουν οι ιδιότητες όλες του παραλληλογράμμου. Στο τετράγωνο αλήθεια θα συμβαίνει το ίδιο; Δηλαδή στο τετράγωνο οι διαγώνιοι θα διχοτομούνται;
Μαθήτρια4: Ναι
Ε: Ναι. Έτσι. Λοιπόν τι ασκήσεις είχαμε; Ποιος θα’ ρθει για καμιά άσκηση; Ε; Μάριε θέλεις να έρθεις; Έλα. Διάβασε Ελευθερία άσκηση 1 σελίδα 284.
Ελευθερία: (διαβάζει)
Ε: Γράφε Μάριε $Α=45^o$, ΑΒ=5εκ, ΑΔ=3εκ.
(Ο Μάριος γράφει)

Ε: Όχι έτσι τα εκατοστά αλλά cm. Να το κατασκευάσεις τώρα. Για να δούμε.
Μάριος: (Σχεδιάζει ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ= 5 εκ.). Θα πάρω γωνία $45^{o}$ ( τη μετράει με το μοιρογνωμόνιο)
Ε: Έτσι ωραία. Ωραία έβαλες το μοιρογνωμόνιο. Που είναι το 45; Το 45 είναι ανάμεσα στο 40 και στο 50. Το 45 είναι το μισό ποιανής;
Μάριος: Της ορθής.
Ε: Έτσι, ωραία.
Τώρα τι θα κάνουμε; Τι λέει Ελευθερία;
Ελευθερία: Να σχεδιάσετε παραλληλόγραμμο.
Μάριος: Θα φέρω κάθετη στην ΑΒ.
Ε: Πως θα τη βάλουμε τη κάθετη;
Μάριος: Εδώ(δείχνει) και την ονομάζω Βχ.
Ε: Έτσι μπράβο. Και μετά;
Μαρία: Φέρνω κάθετη στη κάθετη Βχ για να σχηματιστεί παράλληλη.
Ε: Έρσι ποιο γράμμα λείπει;
Μαρία: Γ και Δ
Ε: Τι άλλο λέει Ελευθερία;
Ελευθερία: Να σχεδιάσετε τα ύψη του παραλληλογράμμου.
Ε: Πόσα ύψη έχει το παραλληλόγραμμο; Αυτό που έχεις φέρει μήπως είναι ύψος;
Μαρία: Ναι.
Ε: Αν το κάνω αυτό διακεκομμένο θα είναι το υ1.
Μαρία: (γράφει υ1)
Ε: Ποιος θα έρθει να πει το δεύτερο ύψος; Ελευθερία. (Η Ελευθερία σηκώνεται). Αυτό (δείχνει) είναι το ένα ύψος, το εύκολο. Στο $2^{o}$ όλοι μπερδευόμαστε λίγο. Τι ονομάζουμε ύψη στα παραλληλόγραμμα;
Ελευθερία: Νομίζω ότι ονομάζουμε την απόσταση που βρίσκεται(σταματάει)
Ε: Την απόσταση ποια;
Ελευθερία: Των δύο πλευρών.
Ε: Ποιων;
Ελευθερία: Των ΔΓ και ΑΔ.
Ε: Τι είναι αυτές οι πλευρές;
Ελευθερία: Παράλληλες.
Ε: Άρα; Το ύψος είναι η απόσταση των… ;
Ελευθερία: Παραλλήλων.
Ε: Των παραλλήλων. Πόσες παράλληλες έχουμε; Δύο ζευγάρια. Άρα θα είναι και δυο… ;
Ελευθερία: Τα ύψη.
Ε: Τα ύψη. Έτσι και θα έχουμε υ1 και υ2.
(Η Ελευθερία σχεδιάζει)
Ε: Βάλε τις ορθές γωνίες.
(Η Ελευθερία τις βάζει)
Έτσι μπράβο.
Άρης: Είναι λάθος αν δεν κάνουμε τη μία γωνία στην άλλη;
Ε:Δεν κατάλαβα τι λες Άρη. Εννοείς αυτή τη γωνία που είναι $45^{o}$ ;
Άρης: (διακόπτει) Όχι, όχι
Ε: Έλα στο πίνακα.
Άρης: Να, να αυτό εδώ πέρα. (το σχεδιάζει και το δείχνει στο σχήμα)
Ε: Πάρα πολύ ωραία. Λέει αν είναι λάθος να φέρουμε αυτό εδώ το ύψος. Για να δούμε.

Που θα πάει όμως αυτό;
Πήγαινέ το πήγαινέ το κι άλλο παιδί μου. Έτσι.
Τώρα  είτε είναι αυτό είτε είναι αυτό, δεν είναι ίδια τα ύψη παιδιά;
Είναι τα ύψη μεταξύ δύο παραλλήλων, έτσι παιδιά; Ωραία.
Λέει να τα βρείτε. Τα μετράτε και τα βρίσκετε.
Έτσι παιδιά; Μίνα έλα στο πίνακα. Ελένη διάβασέ της τη δεύτερη άσκηση.
Ελένη: (διαβάζει)
Ε: Βάλε βήτα μικρό 3 εκατοστά και βήτα κεφαλαίο 5 εκατοστά.
Να φτιάξεις ένα τραπέζιο.
(οι μαθητές είναι ανήσυχοι και γίνετε συζήτηση περί αυτού με τη καθηγήτρια.)
Ε: Πως θα την φέρεις τη κάθετη παιδί μου;
Μίνα: ( τη σχεδιάζει)
Ε: Έτσι μπράβο. Κάνε και ένα ύψος πιο πολύ στη μέση.
Να μην έχεις την  αίσθηση ότι το ύψος το παίρνουμε στην άκρη.
Μίνα: ( το σχεδιάζει)
Ε: Έτσι μπράβο. Σβήσε το άλλο. Ωραία. Και τώρα τι θα φέρουμε;
Μίνα: Την άλλη βάση.
Ε: Ωραία. Και τι θα είναι το ύψος στην άλλη βάση;
Μίνα: Κάθετο.
Ε: Έτσι μπράβο.
Μίνα: ( σχεδιάζει)
Ε: Πόσο θα είναι αυτή;
Μίνα: 3 εκατοστά.
Ε: Και φτιάξτο τώρα. Έλα τελείωσες.
Ένωσέ τα  πιο γρήγορα, ονόμασέ τα και είσαι έτοιμη.
Να μάθετε να κάνετε όλα αυτά.
Ποιος θα’ ρθει να κάνει και το ρόμβο;
Έλα Ελένη να κάνεις το ρόμβο.
Μίνα περίμενε, έχεις αφήσει μια πλευρά που δεν την ένωσες.
Ποια είναι η πλευρά;
Μίνα: Η ΑΔ.
Ε: Έτσι το άλλο είναι ύψος. Έλα Ελένη σβήσε την άλλη άσκηση.( Η Ελένη σβήνει)
Διάβασε Αλέξανδρε την άσκηση την άλλη.( αναμονή)
Έλα βρήκες που είναι; Έλα.
Αλέξανδρος: Την 3;
( φωνάζουν από κάτω)
(αναμονή)
Ε: Έλα να προλάβω να σας πω και λίγο εμβαδόν.
Λοιπόν κάθισε Ελένη γιατί και ο Αλέξανδρος αργεί και για να σας πω και λίγο εμβαδόν.
Δεν θα προλάβω αν πούμε και τη τελευταία άσκηση.
Κλείστε τα βιβλία.
Όταν ακούτε τη λέξη εμβαδόν, τι σημαίνει εμβαδόν; Ε; Αγγελική;
Αγγελική: Το σύνολο των πλευρών.
Ε: Το σύνολο των πλευρών τι είναι Αγγελική;
Αγγελική: ( δεν μπορεί να απαντήσει)
Ε: Ελευθερία;
Ελευθερία: Περίμετρος.
Ε: Έτσι μπράβο. Εμβαδόν τι είναι Ελένη;

Ελένη: Η έκταση.
Ε: Εμβαδόν τριγώνου είπε η Ελένη είναι η έκταση.
Συμφωνούμε σ' αυτό;
Πολλοί μαζί: Ναι.
Ε: Έτσι. Αλλιώς πως τη λέμε τη λέξη εμβαδόν Μανόλη;
Μανόλης: Επιφάνεια.
Ε: Επιφάνεια. Πάρα πολύ ωραία.
Δε μου λέτε, δείτε το.
Αν έχω ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ( το σχεδιάζει).
Αν έχω ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και φέρω μία διαγώνιο, μάλλον πριν φέρω τη διαγώνιο, αν αυτό το ΔΓ το ονομάσω βάση  και αυτό ύψος, εσείς τι ξέρετε γι' αυτά τα δυο; Γρηγόρη.
Γρηγόρης: Αν πολλαπλασιάσουμε τη βάση με το ύψος δίνει εμβαδόν.
Ε: Συμφωνείτε ότι αυτό είναι γνωστό από το δημοτικό;
Εμείς τώρα προχθές τι μάθαμε;
Το ορθογώνιο Θοδώρα είναι ένα είδος παραλληλογράμμου;
Θεοδώρα: Ναι.
Ε: Ναι ή όχι;
Θεοδώρα: Ναι.
Ε: Αν φέρω δηλαδή τώρα τη μία διαγώνιό του σε τι το χωρίζει;(δείχνει τη Θεοδώρα)
Θεοδώρα: Σε δύο ορθογώνια τρίγωνα.
Ε: Σε δύο ορθογώνια τρίγωνα, που είναι ίσα λέτε μεταξύ τους; Ε, Κυριάκο;
(αναμονή)
Άμα είναι ίσα δυο σχήματα θα έχουν και ίδιο εμβαδόν λες;
Κυριάκος: Ναι
Ε: Άμα πάρεις δύο πίνακες που έχουν τις διαστάσεις τους ίσες δεν θα έχουν και ίδιο εμβαδόν;
Κυριάκος: Ναι.
Ε: Άρα λοιπόν μπορούμε να πούμε το κάθε τριγωνάκι εδώ ας πούμε ΑΒΓ ισούται με ½ βάση επί το ύψος; Ε;
Πολλοί μαζί: Ναι
Ε: Άρα λοιπόν να, όταν θέλω να πω εμβαδόν γράφω το τρίγωνο σε μια παρένθεση και είναι σα να γράφω τη λέξη 'Ε'. Αλλιώς λοιπόν το εμβαδόν το παριστάνω με ΑΒΓ μέσα σε παρένθεση. Άρα λοιπόν πάρα πολύ γρήγορα το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου είναι 1/2βάση επί ύψος. Ναι αλλά εγώ δεν θέλω να μάθω του ορθογωνίου τριγώνου αλλά γενικώς τίνος; Των τριγώνων. Το ορθογώνιο τρίγωνο είναι μία υποπερίπτωση. Άρα λοιπόν τι πρέπει να πάρω εγώ; Ένα τυχαίο τρίγωνο. Για να δούμε λοιπόν. Παίρνω ένα τυχαίο τρίγωνο.(Το σχεδιάζει). Για δείτε λίγο. Μπορώ να πω Κωσταντίνα ότι το εμβαδόν του δίνεται από αυτόν το τύπο;(δείχνει $Ε_{ΑΒΓ}$=1/2βχυ) Μπορώ να το πω; (η  Κωσταντίνα δεν απαντάει) Γιώργο;(δεν απαντάει) Ελένη μπορώ να πω αυτό το τύπο γι' αυτό το τρίγωνο;
Ελένη: Αν φέρουμε το ύψος
Ε: (διακόπτει) Όχι αν φέρουμε.
Που ξέρουμε να φέρουμε;
Δεν ξέρουμε να φέρουμε.
Αγγελική, εγώ άλλο ρωτώ.
Αυτός ο τύπος αν σου δώσουν εδώ μια βάση, αυτός ο τύπος ισχύει γι' αυτό το τρίγωνο;
Τι λες;

Αγγελική: Αν φέρουμε το ύψος.
Ε: Αν φέρουμε το ύψος.
Για να φέρουμε όμως το ύψος.
Φέρνουμε ένα ύψος.(το σχεδιάζει) Δέλτα.
Αυτό είναι το ύψος(δείχνει).
Αν δηλαδή πω 1/2 βάση επί ύψος, θα είναι το εμβαδόν αυτουνού;
Πολλοί μαζί: Ναι.
Ε: Εγώ ας πούμε δεν το καταλαβαίνω.
Εσείς γιατί το καταλαβαίνετε;
Εσύ Γρηγόρη το καταλαβαίνεις;
Γρηγόρης: Όχι.
Ε: Όχι. Γιατί εδώ είπαμε βάση και ύψος. Αυτή ήταν η βάση και το ύψος και έβγαινε το εμβαδόν το από πάνω.
Εδώ είναι η βάση αυτή και το ύψος είναι μες τη μέση.
Πως θα βγει δηλαδή το εμβαδόν;
Το συνολικό εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ σαν επιφάνεια ισούται με ποιες επί μέρους επιφάνειες; Μανόλη;
Μανόλης: εεεεε
Ε: Έτσι όπως έχω φέρει το ύψος δε χωρίστηκε αυτή η επιφάνεια στα δυο;
Μανόλης: Ναι
Ε: Σε ποια; Δεν ακούω
Μανόλης: (ΑΒΔ)+(ΑΔΓ)
Ε: Συμφωνείτε ότι ολόκληρο αυτό το εμβαδόν(δείχνει) χωρίστηκε σε δύο άλλα εμβαδά;
Πολλοί μαζί: Ναι
Ε: Και γιατί το χωρίσατε; Μήπως αυτά όμως ξέρω να τα υπολογίζω; Γιατί;
Μαθητής5: Επειδή τα δύο τρίγωνα που σχηματίζουν τα εμβαδά είναι ορθογώνια.
Ε: Είναι ορθογώνια.
Και στα ορθογώνια ξέρω ότι ισχύει αυτός ο τύπος.
Άρα Γρηγόρη με τι θα ισούται αυτό το τρίγωνο το εμβαδόν του;
Γρηγόρης: Με ½ βάση επί ύψος
Ε: Με ½ ποια είναι η βάση του;
Γρηγόρης: Αυτή εκεί(δείχνει)
Ε: Έχει όνομα. Ποια είναι η βάση του σ' αυτό το τρίγωνο;
Γρηγόρης: ΒΔ
Ε: ΒΔ. Έτσι. Επί…;
Γρηγόρης: Επί ΑΔ.
Ε: Επί ΑΔ. Συμφωνείτε ότι αυτό τώρα είναι αυτό;
Αγγελική το από δω τρίγωνο ή το από δω τρίγωνο τι είναι;(δεν απαντάει)
Είναι ½ αφού είναι ορθογώνιο, η βάση του ποια είναι;
Αγγελική: ….
Ε: Όχι, σ' αυτό το τρίγωνο ποια είναι η βάση του;
Στο τρίγωνο ΑΔΓ ποια είναι η βάση του;
Αγγελική: ΒΓ
Ε: Η ΒΓ είναι του μεγάλου του τριγώνου. Σ΄ αυτό το τρίγωνο ποια είναι η βάση;
Αγγελική: ΔΓ
Ε: ΔΓ. Και ποιο είναι το ύψος;
Αγγελική: Το ΑΔ.

Ε: Το ΑΔ. Για να πάμε λοιπόν τώρα εδώ και να γράψουμε το ΑΔ με το ύψιλον το μικρό ( το γράφει). Αυτοί οι δυο τώρα εδώ είναι δύο προσθετέοι. Ένας και άλλος ένας. Τι ίδιο έχουνε; Ποιο έχουν ίδιο; Ποια έχουν ίδια Τόνια;
Τόνια: Τη πλευρά ΑΔ, το ύψος
Ε: Το ύψος και ποιο άλλο; Και το ½ . Υπήρχε μία που την είχαμε μάθει στην αρχή, που τη λέγαμε επιμεριστική ιδιότητα. Και άμα διάλεγες αυτούς τους δυο τους ίδιους, άμα δηλαδή διάλεγες αυτόν μαζί μ' αυτόν μέσα στη παρένθεση τι έπαιρνες, θυμάται κανείς; Μπορείς να μου το φτιάξεις; Ε; Για προσπαθήστε λίγο. Μίνα;
Μίνα: Δεν είμαι σίγουρη. ΒΔ+ΔΓ
Ε: ΒΔ+ΔΓ. Για να το σκεφτούμε ανάποδα. Η επιμεριστική ιδιότητα για να βγει η παρένθεση τι κάνω; Πολλαπλασιάζω αυτό μ' αυτό. Αν πολλαπλασιάσω αυτό μ' αυτό δεν βγαίνει αυτό;(δείχνει). Και αν πολλαπλασιάσεις αυτό μ' αυτό δεν βγαίνει το άλλο; Όμως Αναστασία εσύ που συμφωνείς, αυτό το άθροισμα ποια πλευρά είναι;
Αναστασία: εεε ΒΔ
Ε: Κοίταξέ το στο σχήμα και διάβασέ το παιδί μου.
Αναστασία: Είναι η πλευρά β.
Ε: Είναι η πλευρά β. Και τι έβγαλα δηλαδή;
Ότι το εμβαδόν πάλι και να μην είναι ορθογώνιο με τι ισούται;(δείχνει το Γρηγόρη)
Γρηγόρης: Ότι το εμβαδόν ισούται πάλι με ½ βάση επί ύψος.
Ε: Έτσι. Καταλάβατε;
Τι σας είπα;
Πως ξεκινήσαμε και φτάσαμε ως εδώ;
Τι σας είπα στην αρχή, Κέλλυ;
Κέλλυ: Παίρνουμε ένα τυχαίο τρίγωνο και το χωρίζουμε με το ύψος σε δύο ορθογώνια τρίγωνα.
Ε: Των οποίων γνωρίζω τι:
Κέλλυ: ½ επί βάση επί ύψος.
Ε: Έτσι μπράβο, αυτό είναι. Συνεχίζουμε. Για να πάμε να δούμε.
Ξεκίνησα από εδώ, που εδώ ένα πράγμα το έχω αποδείξει;
Που το έχω εδώ δεδομένο και το θεώρησα ότι ισχύει;(δείχνει το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που είναι χωρισμένο σε 2 ίσα τρίγωνα από τη διαγώνιο). Ελευθερία;
Ελευθερία: Πήρα ότι τα δύο τρίγωνα είναι ίσα.
Ε: Πήρα λέει ότι τα δύο τρίγωνα είναι ίσα.
Γιατί τα δύο αυτά τρίγωνα είναι ίσα;
Το ξέρω ότι αυτά τα τρίγωνα είναι ίσα, Κυριάκο;
Κυριάκος: εεε
Ε: Το είπαμε χθες.
Γιατί αυτό το τρίγωνο και αυτό είναι ίσα;
Πότε δυο τρίγωνα είναι ίσα; Ελένη;
Ελένη: Όταν έχουν τις 3 πλευρές τους ίσες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.
Ε: Και τις αντίστοιχες γωνίες στα τρίγωνα;
Γρηγόρης: Μόνο οι πλευρές.
Ε: Μόνο οι πλευρές στα τρίγωνα. Αυτό που είπες Ελένη ισχύει για ποια;
Ελένη: Για τα ισοσκελή..
Ε: Όχι, όχι. Η Ελένη είπε για να είναι ίσα δυο σχήματα πρέπει να έχουν τις πλευρές και τις γωνίες τους ίσες.(μιλάει ο Γρηγόρης αλλά δεν ακούγεται) Λέει ο Γρηγόρης συμβαίνει μόνο στα τρίγωνα. Αυτό που είπε η Ελένη που συμβαίνει; (κανείς)
Το ξεχάσαμε αυτό, ε;

Ελευθερία θυμάσαι;
Ελευθερία: Στα παραλληλόγραμμα.
Ε: Όχι στα πολύγωνα.
Γενικώς τα πολύγωνα πρέπει να έχουν και πλευρές και γωνίες ίσες.
Ενώ στα τρίγωνα αρκεί μόνο τι;
Μαθητής6: Οι αντίστοιχες πλευρές να είναι ίσες.
Ε: Έτσι. Εδώ οι αντίστοιχες ήταν ίσες;
Μαθητής6: Ναι.
Ε: Άρα αυτό το ξέρατε.
Ότι τα τρίγωνα ήταν ίσα.
Ποιο πήραμε εδώ σα δεδομένο; Ε;
Μαθητής6: Ότι το ορθογώνιο έχει εμβαδόν βάση επί ύψος.
Ε: Δηλαδή κυρία μας τα λέτε όλα καλά.
Αλλά γιατί το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι βάση επί ύψος;
Αυτό προς στιγμήν δεν το έχουμε αποδείξει.
Το παίρνουμε δεδομένο.
Το κάνουμε αυτό στα μαθηματικά για να στηριχτούμε εδώ και να βγάλουμε κάποια αποτελέσματα για τα υπόλοιπα. Και κάποια στιγμή θα το δούμε αυτό πως το υπολογίζουμε. Θέλει παραπάνω λίγο. Θα το δούμε στις άλλες τάξεις.
Τι θέλεις Βασιλική;
Βασιλική: Θέλω να ρωτήσω ότι αν θέλουμε να βρούμε το εμβαδόν ενός τριγώνου, θα κάνουμε όλα αυτά;
Ε: Όχι βέβαια. Αυτό το κάναμε για να το αποδείξουμε. Εμείς τώρα τι θα λέμε; Και στο ορθογώνιο και στο οξυγώνιο τρίγωνο το εμβαδόν με τι ισούται Βασιλική αποδείξαμε;
Βασιλική: (δεν απαντάει)
Ε: Ε, Ελένη;
Ελένη: Με ½ β επί υ.
Ε: Μας πειράζει αν αυτό είναι ισοσκελές εδώ ή αν είναι ισόπλευρο;
Πολλοί μαζί: Όχι
Ε:Για να δούμε μόνο αν είναι τι;
Αμβλυγώνιο. Γιατί παίρνω το αμβλυγώνιο;
Γιατί αν αυτή είναι η βάση, το ύψος τι θα κάνει εδώ στο αμβλυγώνιο; Ε;
Γρηγόρης: Βγαίνει έξω.
Ε: Βγαίνει έξω το ύψος. ( το σχεδιάζει). Οπότε για να δούμε τώρα εδώ. Εδώ λοιπόν έγινε το ορθογώνιο που εκεί το είχαμε μέσα.
Εκεί είχα δυο ορθογώνια, εδώ έγιναν δυο ορθογώνια;
Γρηγόρης: Όχι.
Ε: Όχι; Πόσα έγιναν;
Γρηγόρης: Ένα.
Ε: Για πες το αυτό το ένα.
Γρηγόρης: ΓΑΔ
Ε: Το ΓΑΔ. Αυτό είναι ορθογώνιο.
Μόνο αυτό είναι ορθογώνιο, Αλέξανδρε;
Αλέξανδρος: Δεν θέλω να πω αυτό. Θέλω να ρωτήσω.
Ε: Όχι. Θα πεις αυτό λίγο τώρα και μετά θα ρωτήσεις.
Αλέξανδρος: (δεν απαντάει)
Ε: Ε; Γιάννη;
Γιάννης: Το ΒΑΓ

Ε: Αυτό είναι αμβλυγώνιο.
Ο Γρηγόρης λέει ότι αυτό το ορθογώνιο υπάρχει .
Μήπως υπάρχει και ένα άλλο;
Κάνεις δεν το βλέπει; Στέλιο;
Στέλιος: Το ΓΔΒ.
Ε: Το ΓΔΒ. Το μεγάλο. Το ΓΔΒ και το ΓΑΔ αυτά είναι τρίγωνα ορθογώνια. Το Δ είναι 90 μοίρες και εδώ πάλι το Δ είναι 90 μοίρες.
Οπότε το εμβαδόν αυτού που ψάχνω εγώ, του ΑΒΓ τι σχέση έχει με τα δύο μεγάλα εμβαδά;
Δείτε λίγο. Εδώ το εμβαδόν ήταν αυτό μαζί μ' αυτό συν αυτό.
Εδώ τι μπορώ να πω;
Ότι το εμβαδόν αυτό πως μπορώ να το βγάλω;
Αν από ολόκληρο τι κάνω το μικρό; Βασιλική;
Βασιλική: Το αφαιρέσω.
Ε: Το αφαιρέσω.
Άρα αυτό ισούται με εμβαδόν ΓΔΒ αν αφαιρέσω ΓΔΑ. Ωραία.
Πόσο είναι το εμβαδόν αυτουνού του μεγάλου του ΓΔΒ;
Ποιος θα πει;
Άντρια: Η βάση
Ε: Η βάση, ποια είναι η βάση Αντρια; Τι γελάς;
Ποια είναι η βάση του ΓΔΒ;
Ποια;
Η ΔΒ. Άρα κάνει 1/2ΔΒ επί …;
Να το βάλω υ το ύψος;
Και να αφαιρέσω ποιο;
Ποιο είναι αυτό το μικρό, η βάση;
Ποια είναι η βάση του μικρού;
Του ΑΔΓ;
Τόνια: Τοοο
Ε: Αλεξία;
Αλεξία: ΑΔ
Ε: ΑΔ επί ύψος.
Έχουν ίδιο το ύψος και το ½;
Τι Θα κάνω;
Εκεί τι έκανα;
Αλεξία: Επιμεριστική ιδιότητα.
Ε: Επιμεριστική ιδιότητα.
½ ύψος και μέσα τι θα μείνει;
½ ύψος και μέσα μένει;
ΔΒ-ΑΔ. Ποιος θα μου πει στο σχήμα;
Δημήτρη για δες στο σχήμα αυτή τη παρένθεση.
ΔΒ ολόκληρη πλην ΑΔ ποιο βγάζει;
Ποιο κομμάτι βγαίνει εκεί αν από ολόκληρο αφαιρέσεις αυτό;
Δημήτρης: Το ΑΒ
Ε: Το ΑΒ. Αυτό όμως δεν είναι η βάση του τριγώνου μου; Ε;
Ίσον λοιπόν ½ η βάση μου ΑΒ επί …;
Ίσον λοιπόν ½ η βάση πάλι επί ύψος( 1/2β. υ).
Άρα λοιπόν και αμβλυγώνιο να είναι το τρίγωνο πάλι ο τύπος είναι…;
Άρα γενικώς τι μπορώ να πω ότι έμαθα σήμερα;

Έναν τύπο να βρίσκω το εμβαδόν του τριγώνου.
Αρκεί τι να πάρω;
Τη βάση και το αντίστοιχο …; Ύψος.
Γιατί πόσες βάσεις και πόσα ύψη έχει ένα τρίγωνο; Τρία.
Τώρα εδώ θα καθίσουμε και την άλλη φορά.
Για το άλλο μάθημα θα έχετε…….

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ  II

## Δείγμα ανάλυσης του δεύτερου πεδίου

**1η διδασκαλία Εκπαιδευτικού Α**

ΜΠ: Μαθηματικό περιεχόμενο

ΕΜ: Ενέργειες που ζητάει ο δάσκαλος από το μαθητή να κάνει

ΒΚ: Βαθμός καθοδήγησης

| Ερώτηση | ΜΠ | ΕΜ | ΒΚ |
|---|---|---|---|
| 1.Όταν Δάφνη λέμε σημείο τομής, τι ακριβώς εννοούμε; | Ορισμός | Περιγραφή | |
| 2.Αυτή η έκφραση μας θυμίζει κάτι; | Λεκτική αναπαράσταση | Ανάκληση | Ναι/Όχι |
| 3.Όταν λέμε σημείο τομής μας θυμίζει κάτι; | Λεκτική αναπαράσταση | Ανάκληση | Ναι/Όχι |
| 4.Μας έρχεται κάτι άλλο στο μυαλό ; | Σημασία | Ανάκληση | Ναι/Όχι |
| 5.Μας θυμίζει κάτι αυτό; Νικόλα! | Λεκτική αναπαράσταση | Ανάκληση | Ναι/Όχι |
| 6.Όταν λέμε σημείο τομής, το τομής τι μας θυμίζει; | Λεκτική αναπαράσταση | Ανάκληση | |
| 7.Άρα όταν λέμε σημείο τομής δύο ευθειών τι εννοούμε; | Ορισμός | Εξαγωγή συμπεράσματος | |
| 8.Είχαμε πει Μαρία, Θύμισέ μας λίγο, μια ευθεία περιέχει…..; | Ιδιότητα | Ανάκληση | Συμπλήρωση |