(150)

# Μάθημα 26

## Μιγαδική Ανάλυση

15/1/08

$\left.\begin{array}{l} \Omega \text{ κυρτός τόπος} \\ f: \Omega \to \mathbb{C} \text{ ολόμορφη} \\ f(z) \neq 0,\ \forall z \in \Omega \end{array}\right\} \Rightarrow \exists g$ ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ ώστε $f = e^{g}$ στο $\Omega$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}$ αν θέσουμε $y_n = e^{\frac{1}{n}g}$ είναι ολόμο[ρφη]

και $(y_n)^n = f$.

(δηλ. η $f$ έχει ∃ ολόμορφο λογάριθμο + ολόμορφες n-οστές ρίζες)

Αυτό ισχύει και αν $\Omega$ απλά συνεκτικό.

Παρατ.: Αν $\Omega$ δεν είναι κυρτό, τα προηγούμενα δεν ισχύουν:

π.χ. $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = \frac{1}{z}$

Αποδ.: Θεωρούμε την $\frac{f'}{f}$ στο $\Omega$, που είναι ολόμορφη. Άρα, έχει παράγουσα, έστω $F$. Δηλ.: $F' = \frac{f'}{f}$

Ψάχνω $c =$ σταθ $\in \mathbb{C}$: αν θέσω $g = F + c$, να έχω $e^{g} = f$.

Θέλω: $e^c e^f = f \Rightarrow e^c = \frac{f}{e^f}$, άρα θέλω η $\frac{f}{e^f}$ να είναι σταθ. και μη μηδενική.

Αρκεί Ν.Δ.Ο. $\frac{f}{e^f}$ = σταθ.

$$\left(\frac{f}{e^f}\right)' = \frac{f'\cdot e^f - f(e^f)'}{e^{2f}} = \frac{f'\cdot e^f - e^f f' f}{e^{2f}}$$

$$= \frac{f'\cdot e^f - e^f\cdot f'}{e^{2f}} = 0$$

> Σε κάθε τόπο, αν έχω log έχω και $\sqrt[n]{\ }$. Αν έχω άπειρες $\sqrt[n]{\ }$, τότε έχω και log.

Άσκηση Αν f ακέραια συνάρτηση, τότε η f έχει πυκνή εικόνα ή η f είναι σταθερή.

Απόδ.: Αν $f(\mathbb{C})$ όχι πυκνό, τότε:

$\exists\, D(w,\delta) = \{z : |z-w| < \delta\}, \delta > 0 :$

$f(\mathbb{C}) \cap D(w,\delta) = \emptyset$.

Άρα, $\forall z \in \mathbb{C} : |f(z) - w| \geq \delta > 0$.



Άρα, $\frac{1}{f-w}$ ακέραια και $\frac{1}{|f(z)-w|} \leq \frac{1}{\delta}$.

Άρα, $\frac{1}{f-w}$ ακέραια και φραγμένη $\Rightarrow$

$\xrightarrow{\text{Liouville}} \frac{1}{f-w}$ σταθερή $\rightarrow$ f σταθερή.

Άσκηση ~~Άλλος τρόπος~~ $\rightarrow f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη

Το τε, $f(\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z})$ πυκνό ή f σταθερή.

Απόδ.: $\mathbb{Z}$: μεμονωμένες ανωμαλίες

Έστω ότι το $f(\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z})$ δεν είναι πυκνό. Τότε, $\exists\, D(w,\delta) = \{z : |w-z| < \delta\}$, $\delta > 0$ :

$D(w,\delta) \cap f(\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}) = \emptyset$.

$\forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z} : |f(z) - w| \geq \delta > 0$

Άρα, $\frac{1}{f-w}$ ολόμ. στο $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ και

$$\left|\frac{1}{f(z)-w}\right| \leq \frac{1}{\delta}, \text{ φραγμένη.}$$

Κάθε $n \in \mathbb{Z}$ είναι μεμονωμένη ανωμαλία για την $\frac{1}{f-w}$ και επειδή αυτή η ποσότητα μένει φραγμένη $\Rightarrow$ η ανωμαλία είναι επουσιώδης.

(159)

Άρα, $\frac{1}{f-w}$ ακέραια.

$\frac{1}{f(m)-w} = \lim_{z\to m} \frac{1}{f(z)-w} \to \left|\frac{1}{f(m)-w}\right| \le \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{f-w}$ φραγμένη από το $\frac{1}{\delta}$ στο $\mathbb{C} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{f-w}$ σταθ. $\Rightarrow f$ σταθερή.

→ Έστω $c$ μεμονωμένη ανωμαλία για την $f$. Οπότε, $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-c)^n$ στο $D(c,0,r)$.

Ορισμός: Ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $f$ στο $c$:

$$Res(f,c)=a_{-1}.$$

Θεώρημα: Έστω $\Omega$ (η απλά συνεκτικός) ανοικτός τόπος και $z_1,\dots,z_u \in \Omega$ διάφορα ανά δύο. Έστω $f: \Omega\setminus\{z_1,\dots,z_u\}\to\mathbb{C}$, ολόμορφη.

Έστω $\gamma$ κατά τμήματα $C^1$ κλειστή καμπύλη στο $\Omega\setminus\{z_1,\dots,z_u\}$. Τότε,

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\cdot \sum_{j=1}^{u} Res(f,z_j)\cdot Ind(\gamma,z_j)$$

(160)

Θέτουμε $f_j=\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(f,z_j)\cdot(z-z_j)^n$,

όταν $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f,z_j)\cdot(z-z_j)^n = f(z)$, στο $D(z_j,0,r_j)$, $r_j>0$.

Συγκλίνει στο $\mathbb{C}\setminus\{z_j\}$, όπου ορίζει ολόμορφη συνάρτηση.

Άρα, η $f-f_j$ έχει επουσιώδη ανωμαλία στο $z_j$.

Θεωρώ την $h: f-f_1-f_2-\dots-f_u$, ολόμορφη στο $\Omega$.

Άρα, $f=f_1+f_2+\dots+f_u+h$.

Και:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma f_1(z)dz+\dots+\int_\gamma f_u(z)dz+\int_\gamma h(z)dz$$

$\int_\gamma h(z)dz = 0$ (Θεώρημα, $h$ ολόμορφη στο $\Omega$).

λόγω της [illegible]

$$\int_\gamma f_1(z)dz = \int_\gamma c_{-1}(f,z_1)\frac{dz}{z-z_1} = c_{-1}(f,z_1)\cdot\int_\gamma \frac{dz}{z-z_1} =$$

$$= Res(f,z_1)\cdot 2\pi i\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{dz}{z-z_1} =$$

$$= 2\pi i\, Res(f,z_1)\cdot Ind_\gamma(z_1)$$

1) → Αν $c$ επουσιώδης ανωμαλία $Res(f,c)=0$

2) Αν c πόλος τάξεως κ·

$$f(z)=\sum_{n=-\kappa}^{\infty} a_n (z-c)^n$$

$$(z-c)^{\kappa} f(z) = a_{-\kappa}+a_{-\kappa+1}(z-c)+\dots+a_{-1}(z-c)^{\kappa-1}+\dots$$

για αυτήν το c είναι επουσιώδης ανωμαλ.

Άρα, $a_{-1}=\operatorname{Res}(f,c)=\dfrac{d^{\kappa-1}[(z-c)^{\kappa} f(z)]}{dz^{\kappa-1}}\cdot\dfrac{1}{(\kappa-1)!}=$

παράγωγος στο $z=c$ / $(\kappa-1)!$

$$=\frac{1}{(\kappa-1)!}\cdot\lim_{z\to c}\frac{d^{\kappa-1}[(z-c)^{\kappa} f(z)]}{dz^{\kappa-1}}$$

3) Αν c ουσιώδης ανωμαλία για την f
Πρέπει να υπολογίσω το ανάπτυγμα και να πάρω το $a_{-1}$.

→ Ω ανοικτό
$f,g:\Omega\to\mathbb{C}$ ολόμορφη, όχι σταθερά μηδέν
$a\in\Omega$ ρίζα τάξεως κ για την f
τάξεως m για την g.



Τότε το a είναι μεμονωμένη ανωμαλία για την $f/g$

Αποδ.: (1) Αν $m>\kappa \Rightarrow$ πόλος τάξεως $m-\kappa$.
(2) Αν $m<\kappa \Rightarrow$ το a είναι ρίζα της $\frac{f}{g}$

και άρα επουσιώδης ανωμαλία.

(3) Αν $m=\kappa \Rightarrow$ επουσιώδης ανωμαλία και

$$\boxed{\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f^{(\kappa)}(a)}{g^{(\kappa)}(a)}}$$

Αποδ: $f(z)=(z-a)^{\kappa}\cdot\varphi(z)$, $\varphi(a)\neq 0$
$g(z)=(z-a)^{m}\cdot\psi(z)$, $\psi(a)\neq 0$

Άρα: $\dfrac{f(z)}{g(z)}=(z-a)^{\kappa-m}\cdot\dfrac{\varphi}{\psi}$

Έτσι, προκύπτουν τα (1), (2)

Για το (3): $\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{\varphi}{\psi}$.

Το $\varphi(a)$ είναι ο συντελεστής του $z^{\kappa}$ στο ανάπτυγμα του f, άρα
$\varphi(a)=\frac{1}{\kappa!}\cdot f^{(\kappa)}(a)$, ομοίως:

$\psi(a)=\frac{1}{\kappa!}\cdot g^{(\kappa)}(a)$. Άρα,

(163)

όταν έχω $\frac{0}{0}$ πάντα:

→ Θ.Λ.Ο. $\displaystyle\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a}\frac{f'(z)}{g'(z)}$

Πρόβλημα: για $m>n$ ή $n>m$ ✓.
Για $m=n$:

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$$

και $\displaystyle\lim_{z\to a}\frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{(f')^{(n-1)}(a)}{(g')^{(n-1)}(a)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$.

→ $\text{Res}\left(\sin\frac{1}{z^2}, 0\right) = ?$

μεμονωμένη ανωμαλία

$$\sin w = w - \frac{w^3}{3!} + \frac{w^5}{5!} - \dots$$

Άρα, $\sin\frac{1}{z^2} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!z^6} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^{10}} \dots$

ουσιώδης ανωμαλία.

Άρα, $a_{-1} = 0 \rightarrow \text{Res}\left(\sin\frac{1}{z^2}, 0\right) = 0.$

Άρα, $\displaystyle\int_{|z|=1}\left[\sin\left(\frac{1}{z^2}\right)\right]dz = 0.$

ισχύει όμως για κάθε περιφέρεια.

(164)

→ $\text{Res}\left(e^{1/z}, 0\right) = ?$

$$e^w = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} + \dots \rightarrow \text{Res}\left(e^{1/z}, 0\right) = 1$$

ουσιώδης ανωμαλία.

Άρα: $\displaystyle\int_{|z|=1} e^{1/z}dz = 2\pi i.$

→ $\text{Res}\left(z^2\sin\frac{1}{z}, 0\right) = ?$

$$\sin w = w - \frac{w^3}{6} + \frac{w^5}{5!} - \dots$$

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{z^5} - \dots$$

Άρα: $z^2\sin\frac{1}{z} = z - \frac{1}{6z} + \frac{1}{5!z^3} - \dots$

Άρα $\text{Res}\left(z^2\sin\frac{1}{z}, 0\right) = -\frac{1}{6}$

→ $\text{Res}\left(\frac{\sin z}{z}, 0\right) = ?$

$\frac{\sin z}{z} \xrightarrow[z\to 0]{} 1 \Rightarrow$ αιρούμενη $\Rightarrow 0$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

→ $\mathrm{Res}\left(\frac{1}{e^z-1}, 0\right)$.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$e^z - 1 = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots =$$

$$= z\cdot\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \dots\right) = z \cdot \frac{1}{\phi(z)}, \text{ όπου } \phi(0)\neq 0$$

$$\cancel{= z\cdot\left(1+bz^2+\dots\right)}$$

Άρα, $\frac{1}{e^z-1} = \frac{1}{z}\phi(z)$.

$$\phi(z) = 1 + bz + cz^2 + \dots$$

Άρα, $\frac{1}{e^z-1} = \frac{1}{z}\left(1+bz+cz^2+\dots\right) =$

$$= \frac{1}{z} + b + cz + \dots$$

Άρα, $\mathrm{Res}\left(\frac{1}{e^z-1}, 0\right) = 1$.

→ $\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2 \sin z}, 0\right)$

↳ ο πόλος στο 0 είναι πολ/τας 3, αφού όταν $z\to 0$ $\sin z \simeq z$.



$$\frac{1}{z^2\sin z} = \frac{1}{z^3}\cdot\frac{z}{\sin z} = \frac{1}{z^3}\cdot\frac{1}{\frac{\sin z}{z}} = \frac{1}{z^3}\cdot\frac{1}{f(z)},$$

όπου $f(z) = \frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$

$\frac{1}{f(0)} = 1 \neq 0 \Longrightarrow$ έχουμε 3ης τάξεως πόλο στο 0.

Άρα: πολ/ζω με το $z^3$ και παραγωγίζω 2 φορές.

$$\mathrm{Res} = \frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{1}{f}\right)''(0) =$$

$$= \frac{-f''(0)\cdot f^2(0) + 2\cdot(f'(0))^2\cdot f(0)}{2!\cdot f^4(0)} =$$

$$= \frac{1}{6} \quad \left(\text{αφού } f(0)=1,\ f'(0)=0,\ f''(0) = 2!\cdot\frac{-1}{3!} = -\frac{1}{3}\right.$$

No.

Date

Αν $z_0 \in \Omega$ με $g(z_0)=0$ τότε η $\frac{f}{g}$ έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο $z_0$.

Τότε το $z_0$ δεν μπορεί να είναι ουσιώδης ανωμαλία για την $\frac{f}{g}$.

Αν $f(z_0)\neq 0$ τότε $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\infty \Rightarrow$ πόλος

Έστω $f(z_0)=0$ και $f\not\equiv 0$

Έχουμε $f(z)=(z-z_0)^{N_1}\cdot q(z)$ με $q$ ολόμορφη στο $\Omega$ και $q(z_0)\neq 0$, $N_1\to$ η πολλαπλότητα της ρίζας

Άρα $g(z)=(z-z_0)^{N_2}\cdot w(z)$ όπου $w(z_0)\neq 0$, $w$ ολόμορφη στο $\Omega$

$$\frac{f(z)}{g(z)}=(z-z_0)^{N_1-N_2}\cdot\frac{q(z)}{w(z)} \xrightarrow{z\to z_0} \frac{q(z_0)}{w(z_0)}\in\mathbb{C}-\{0\}$$

Οπότε αν $N_1>N_2\to$ επουσιώδης και μάλιστα ρίζα

αν $N_1<N_2\to$ πόλος

αν $N_1=N_2\to$ τείνει στο $\mathbb{C}$, επουσιώδης και όχι ρίζα

Μια τέτοια συνάρτηση $\frac{f}{g}$ λέγεται μερόμορφη

όπου $f,g$ ολόμορφες

Οι μερόμορφες συναρτήσεις δεν έχουν ουσιώδεις ανωμαλίες

Ο τύπος $f,g$ πολυώνυμα στο $\Omega$, $g\not\equiv 0$

$$\frac{\alpha_0+\alpha_1 z+\ldots+\alpha_N z^N}{t(z-p_1)^{k_1}\cdots(z-p_k)^{N_k}}$$ ρητή συνάρτηση

Οι ρητές συναρτήσεις είναι μερόμορφες