ΜΠΑΛΙΚΗ / 08/11/07 / Μάθημα 12

Πρόταση Η δυναμοσειρά $\sum \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$ έχει ακτίνα σύγκλισης ∞ και ορίζει ακέραια συνάρτηση ~~που~~ στην συμπίπτει με την e^z $\left(e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)\right)$.

Απόδειξη: $\lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim (n+1) \to \infty$.

Θεωρούμε την ακέραια συνάρτηση $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$

$g(0) = 1$, $g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} z^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k = g(z)$$

$$\left(\frac{g(z)}{e^z}\right)' = \frac{g'(z) e^z - e^z g(z)}{e^{2z}} = \frac{g(z) e^z - e^z g(z)}{e^{2z}} = 0$$

Άρα $\frac{g(z)}{e^z} = c$

$g(0) = e^0 = 1 \Rightarrow c = 1$

Άρα $g(z) = e^z$

---

(1) $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$

(2) $e^{-i\theta} = \cos\theta - i \sin\theta$

(3) $\overline{(e^{i\theta})} = \cos\theta - i\sin\theta$

Από (1) κ (2)

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - \frac{1}{e^{i\theta}}}{2i}$$

Από (1) κ (3): $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + \overline{(e^{i\theta})}}{2}$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - \overline{(e^{i\theta})}}{2i}$$

Βάζοντας όπου θ έναν z μιγαδικό:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + \overline{(e^{iz})}}{2}$$

Για να έχω cos z ολόμορφο ορίζω $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

Και όμοια $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

Όμως $e^{w} = 1 + w + \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3!} + \dots$

ΟΠΟΤΕ:

$$\left.\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + iz - \frac{z^2}{2} - \frac{iz^3}{3!} + \dots \\ e^{-iz} &= 1 - iz - \frac{z^2}{2} + \frac{iz^3}{3!} + \dots \end{aligned}\right\} \text{(*)}$$

ΑΡΑ →

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \dots, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} - \dots, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

[ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ]

Αν $\theta \in \mathbb{R}$:

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$|\cos\theta|^2 + |\sin\theta|^2 = 1$

Για $z \in \mathbb{R}$:

$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$;

$|\cos z|^2 + |\sin z|^2 = 1$;

Η σχέση δεν ισχύει

Άσκηση Δείξτε ότι υπάρχει $z \in \mathbb{C}$ ώστε $\cos z = 80$.

$e^{iz} = w$ | $e^{iz} = w$

$\frac{w + \frac{1}{w}}{2} = 80$

$\exists$ z ώστε $e^{iz} = w$ όπου για το w για το οποίο $\frac{w + \frac{1}{w}}{2} = 80$

α τρόπος

Για το $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$

Η $\cos^2 z + \sin^2 z$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$

Η 1 είναι ολόμορφη ως προς z στο $\mathbb{C}$

→ Από Θεώρημα μοναδικότητας (Αρχή αναλυτικής συνέχισης).

β τρόπος: $\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 =$

$= \frac{1}{4}\left\{\cancel{e^{i2z}} + \cancel{e^{-i2z}} + 2 - \cancel{e^{i2z}} - \cancel{e^{-i2z}} + 2\right\} = 1$

$\forall \mathbb{C}$

$(\cos\theta)' = -\sin\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$

Για z εν $\mathbb{C}$:

$(\cos z)' = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left\{e^{iz} i - i e^{-iz}\right\} = -\frac{1}{2i}\underbrace{\left\{e^{iz} - e^{-iz}\right\}}_{-\sin z} =$

(ισχύει γενικά → $e^{iz} = \cos z + i \sin z$) (Αρχή αναλυτικής συνέχισης)

→ Και $(\sin z)' = \cos z$

Επιπλέον: $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(z \pm w) = \cos z\cos w \mp \sin z \sin w$

$\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$

$\downarrow$ ολόμορφη εκεί που δεν μηδενίζεται το $\cos z$

Σίγουρα ρίζες $\Rightarrow k\pi + \pi/2$

Υπάρχουν άλλες;

$\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{iz} = -\dfrac{1}{e^{iz}} \Leftrightarrow e^{2iz} = -1 = e^{i\pi} \quad \Leftrightarrow$

$\cancel{i}2z = \cancel{i}\pi + 2k\pi \cancel{i} \quad \Leftrightarrow$

$\boxed{z = k\pi + \pi/2}$

Επομένως δεν υπάρχουν άλλες ρίζες

κλπ

- $\cosh z = \frac{1}{2}(e^{z}+e^{-z}) = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots$
- $\sinh z = \frac{1}{2}(e^{z}-e^{-z}) = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$

$(\cosh z)' = \sinh z \quad$ και $\quad (\sinh z)' = \cosh z$

$(\cosh z)^2 - (\sinh z)^2 = 1$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος με $0 \notin \Omega$. Μία συνάρτηση $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ λέγεται κλάδος (συνεχής) του ορίσματος αν είναι συνεχής στο Ω και $\forall z \in \Omega$ ισχύει $\varphi(z) \in \operatorname{Arg} z$

(δηλ. $z = |z| \cdot e^{i\varphi(z)}$).

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος με $0 \notin \Omega$. Μία συνάρτηση $\Phi : \Omega \to \mathbb{C}$ λέγεται κλάδος (συνεχής) του λογαρίθμου στο Ω αν είναι συνεχής στο Ω και ~~τότε~~ $\forall z \in \Omega$ ισχύει $\varphi(z) \in \log z$ (δηλ. $z = e^{\varphi(z)}$ $\forall z \in \Omega$)

Προβλήματα: Υπάρχουν πάντα τέτοιοι κλάδοι. Όταν υπάρχουν πόσοι είναι αυτοί και πώς συνδέονται;

Αν υπάρχει συνεχής κλάδος λογαρίθμου f, αυτός λόγω του κριτηρίου από παρατήρηση Καραθεοδωρή, είναι ολόμορφος στο Ω και $\varphi'(z) = 1/z$.

* Τα προβλήματα που θέσαμε είναι ισοδύναμα. Δηλ. θα τώρα αν υπάρχει συνεχής κλάδος της γωνίας θα υπάρχει και του λογαρίθμου και αντίστροφα.

Πράγματι, $\log z = \ln|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi)$ $(z \neq 0)$

→ Αν έχω συνεχές ξεδιάλεγμα της γωνίας έχω και του $\log z$.

Αν έχω φ παίρνω $\log z = \ln|z| + i\varphi(z)$

Αν έχω την φ θέτω $\varphi = \operatorname{Im}\varphi$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω τόπος Ω, $0 \notin \Omega$ για τον οποίο υπάρχουν κλάδοι συνεχείς του ορίσματος φ και του λογαρίθμου f. Τότε:

i) $\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ είναι συνεχείς κλάδοι του ορίσματος και $f + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ είναι συνεχείς κλάδοι του λογαρίθμου

ii) Δεν υπάρχουν άλλοι.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Έστω $\tilde{\varphi}$ ένας άλλος συνεχής κλάδος του ορίσματος. $\varphi(z)$ και $\tilde{\varphi}(z) \in \operatorname{Arg}(z)$

$\Rightarrow \exists\ \kappa \in \mathbb{Z}$ ωστε $\tilde{\varphi}(z) - \varphi(z) = 2\kappa(z)\cdot\pi$ (το κ εξαρτάται απ' το z)

$\kappa(z) = \dfrac{\tilde{\varphi}(z) - \varphi(z)}{2\pi}$

$\kappa : \Omega \to \mathbb{Z}$ συνεχής ως διαφορά και πηλίκο συνεχών.

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Και Ω συνεκτικό άρα $\kappa(\Omega)$ συνεκτικό.

Επομένως κ σταθερή

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν ε είναι μία ημιευθεία με αρχή το O.

Τότε στο $\mathbb{C} - \varepsilon$ υπάρχουν ~~κλάδοι~~. (Έχω φ ώστε $-\pi < \varphi(z) < \pi$)

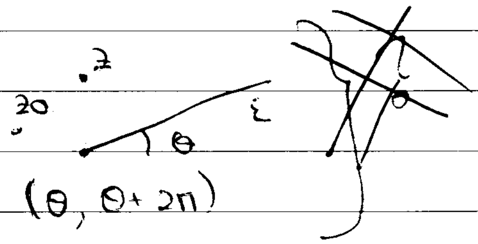
Δίσκο $D(0, r_1, r_2) = \{z : r_1 < |z| < r_2\}$ δεν υπάρχει

στο $\mathbb{C} - \{0\} = D(0, 0, \infty)$ δεν υπάρχει

ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

Έστω ε ημιευθεία με αρχή το O

Αν $z \in \Omega = \mathbb{C} - \varepsilon$



Θέτω $\varphi(z)$ το μοναδικό όρισμα του z στο $(\theta, \theta + 2\pi)$

$z = |z| e^{i\varphi(z)}$

Έστω και z_0 και υποθέτουμε ότι η φ δεν είναι συνεχής στο z_0.

Υπάρχει z_n στο Ω με $z_n \to z_0$

Αφού $\varphi(z_n)$ φραγμένη στο $(\theta, \theta + 2\pi)$

Αν φ όχι συνεχής υπάρχει υπακολουθία $\varphi(z_{\kappa_n}) \to l \neq \varphi(z_0)$

$\varphi(z_{\kappa_n}) \in (\theta, \theta + 2\pi)$

Άρα $l \in [\theta, \theta + 2\pi]$

$$z_{\kappa_n} = |z_{\kappa_n}| \cdot e^{i\varphi(z_{\kappa_n})}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$z_0 = |z_0| \quad e^{il}$$

Συνεπώς $l \in \operatorname{Arg} z_0$ και $\varphi(z_0) \in \operatorname{Arg} z_0$

Άρα $\varphi(z_0) - l = 2\kappa\pi \quad \kappa \in \mathbb{Z}$

Και $\varphi(z_0) \in (\theta, \theta+2\pi)$ $\qquad -\pi < \varphi(z) < \pi$

$\theta \in [\theta, \theta+2\pi]$

Άρα $\varphi(z_0) - \theta = 2k\pi \Rightarrow k=0$. Άτοπο.

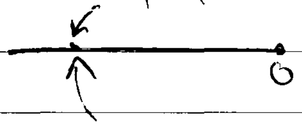
Άρα φ συνεχής

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

1) Δεν ισχύει ότι $\varphi(z_1 z_2) = \varphi(z_1) + \varphi(z_2)$

πχ αν αφαιρέσω τον αρνητικό άξονα και πάρω $z_1 = z_2 = i$, $\varphi(z_1) = \pi/2$

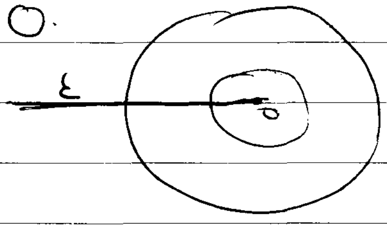
2) Έχω αφαιρέσει αρνητικό ημιάξονα και $-\pi < \varphi(z) < \pi$



$\lim_{z \to -1} \varphi(z)$ δεν υπάρχει

3) Έστω δακτύλιος με κέντρο στο O.

Έστω ότι υπάρχει συνεχής κλάδος της γωνίας στο $D(0, r_1, r_2) \Rightarrow$ άτοπο.



Θεωρώ $\Omega = D(0, r_1, r_2) - \varepsilon$

$\varphi|_\Omega$ κλάδος και $\Omega \subseteq \mathbb{C} - \varepsilon$; $\varphi|_\Omega$

↳ ϕ ο συνεχής κλάδος από το $\mathbb{C} - \varepsilon$

Τότε οι δύο κλάδοι διαφέρουν κατά $2k\pi$

$\phi|_\Omega = \varphi|_\Omega + 2k\pi$

$\left.\begin{array}{l} \varphi|_\Omega \text{ έχει όριο στον άξονα } \varepsilon \\ \text{και η } 2k\pi \text{ έχει όριο} \end{array}\right\} \Rightarrow$ Η $\phi|_\Omega$ έχει όριο στον ε

Άτοπο από Παρατήρηση 2

Επομένως ∄ συνεχής κλάδος στον δακτύλιο ↑ ποιο έχει όριο?

Την ίδια δουλειά που κάνει η ημιευθεία θα την έκανε οποιαδήποτε συνεχής καμπύλη από το O στο άπειρο και θα ορίζαν παρόμοια συνεχής κλάδος

ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ | 13/11/07 | Μάθημα 13

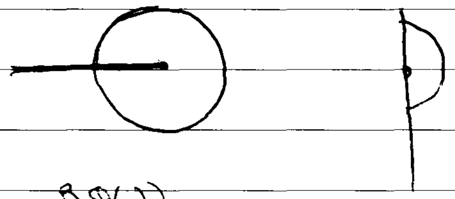
$\alpha \neq 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$\alpha^\beta = e^{\beta \log \alpha}$

$z \to z^\beta$, $w \to \alpha^w$ } Πώς θα τις ορίσουμε ώστε να 'ναι συνεχείς;

$\Omega: z \to z^\beta = e^{\beta \cdot \varphi(z)} \in \mathbb{C}$ όπου φ κλάδος του λογαρίθμου στο Ω, αν υπάρχει

↓ ολόμορφη αφού e^z ολόμορφη, $\varphi(z)$ ολόμορφη → σύνθεση ολόμορφη.



$e^{\beta \varphi(z)}$

$\varphi(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z$ άρα $\beta\varphi(z) = \beta\ln|z| + i\beta\,\mathrm{Arg}\,z$

↳ δηλ. οι γωνίες πολ/νται επί β

$$(z^\beta)' = \left(e^{\beta\varphi(z)}\right)' = e^{\beta\varphi(z)} \cdot [\beta\varphi(z)]' = z^\beta \cdot \beta \frac{1}{z} = \beta \cdot z^{\beta-1}$$

Χρησιμοποιώντας κλάδους του λογαρίθμου ορίσαμε κλάδους του z^β.

Το αντίστροφο μπορεί να γίνει;

↳ η απάντηση είναι <u>ΟΧΙ</u>.

Πχ. για $\beta = 1, 0, 3$

Το $\beta = 1$ z^1 ορίζεται σε όλο το $\mathbb{C}$, αλλά εκεί δεν υπάρχει κλάδος του λογαρίθμου.

Θεωρώ την $z^{1/2}$. Θα δείξω (μαθηματικά) ότι σε δακτύλιο με κέντρο το 0, η $z^{1/2}$ δεν ορίζεται.

Άσκηση: ~~...~~ Έστω $D(0,R)=\{z\in\mathbb{C} : |z|<R\}$, $R>0$.
Δεν υπάρχει συνάρτηση $w: D(0,R)\to\mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε
$w(z)^2 = z \ \forall z\in D(0,R)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $w(z)^2$ και z είναι ολόμορφες και ίσες έχω:

$$2w(z)\cdot w'(z) = 1 \quad \forall z \text{ με } |z|<R$$

όμως για $z=0$ έχω $w(z)^2=0 \Rightarrow w(z)=0$.
Άρα για $z=0$ $\underbrace{2w(z)\cdot w'(z)}_{0} \neq 1$, $0\neq 1$ } ΑΤΟΠΟ

$$w\mapsto \alpha^w = e^{w\log\alpha}$$

Το κάθε διαφορετικό $\log\alpha$ παράγει διαφορετική συνάρτηση.

$$(\alpha^w)'=\left(e^{w\log\alpha}\right)' = e^{w\log\alpha}\left[w\log\alpha\right]' = \alpha^w\cdot\log\alpha$$

Αν $\alpha=1$ → έχω την ~~...~~ συνάρτηση 1^w που δεν τις διατηρεί (γωνίες)
Αν $\alpha\neq 1$ → η συνάρτηση διατηρεί τις γωνίες
Συγκεκριμένα:
Για $\alpha=1 \Rightarrow w\mapsto 1^w = e^{w\log 1}$, $\log 1 = 2k\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$
$= e^{w\,2k\pi i}$

Για $k\neq 0$ → τη διατηρεί πάλι τις γωνίες
Για $k=0$ → έχουμε την σταθερή συνάρτηση που δε τις διατηρεί

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $\Omega\subset\mathbb{C}$ τόπος με $0\notin\Omega$
$\forall A\in I$

1) Η $\ln|z|$ έχει αξία αρμονική στο $\underline{\Omega}$.
2) Η $1/z$ έχει παράγουσα στο $\underline{\Omega}$
3) Ορίζεται κλάδος συνεχής (και αντίστοιχα ολόμορφος) του λογαρίθμου στο $\underline{\Omega}$

ΠΟΡΙΣΜΑ

α) Στο $\underline{\Omega} = \mathbb{C}-\{0\}$ και $\underline{\Omega} = D(0,r,R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R, \ 0 \leq r < R < \infty\}$

δεν υπάρχει παράγουσα της $1/z$ ούτε αξία αρμονική της $\ln|z|$.

β) Αν $\underline{\Omega}$ ανοικτός δίσκος που δεν περιέχει το μηδέν τότε στο $\underline{\Omega}$ η $1/z$ έχει παράγουσα και η $\ln|z|$ έχει αξία αρμονική (το $\arg z$) (αφού δεν περιέχει το μηδέν, μπορώ να αφαιρέσω τα ημιεπίπεδα από το 0)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$1 \Rightarrow 2$:

Εξ' υποθέσεως $f(z) = \ln|z| + iv(z)$ είναι ολόμορφη στο $\underline{\Omega}$

$u_x = v_y$

$u_y = -v_x$

$f'(z) = u_x + iv_x = u_x - iu_y$

$u = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) \qquad u_x = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$

$-u_y = -\frac{1}{2}\frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}$

$f'(z) = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\cancel{\bar z}}{z\cancel{\bar z}} = \frac{1}{z}$ Άρα δόξα τω Θεώ.

2) ⇒ 3) $\exists\, f$ ολόμορφη στο Ω ώστε $f' = 1/z$

Θα διαλέξω σταθερά $c \in \mathbb{C}$ ώστε η $f + c$ να είναι ολόμορφος κλάδος του λογαρίθμου στο Ω.

Συνθήκη να έχω $e^{f(z)+c} = z \quad \forall z \in \Omega$

$$e^{f(z)+c} = e^{c} \cdot e^{f(z)}, \quad e^{c} = \frac{z}{e^{f(z)}}$$

$$\left(\frac{z}{e^{f(z)}}\right)' = \frac{e^{f(z)} z' - z\left(e^{f(z)}\right)'}{\left(e^{f(z)}\right)^2} = \frac{z' \cdot e^{f(z)} - z \cdot e^{f(z)} f'(z)}{\left(e^{f(z)}\right)^2} =$$

$$= \frac{e^{f(z)} - \cancel{z} \cdot e^{f(z)} \cdot 1/\cancel{z}}{\left(e^{f(z)}\right)^2} = 0.$$

Άρα $\frac{z}{e^{f(z)}} = k$ σταθερό.

Θεωρώ $z_0 \in \Omega$ συγκεκριμένο. Τότε
$c = \mathrm{Log}\left(z_0 \cdot e^{-f(z_0)}\right)$

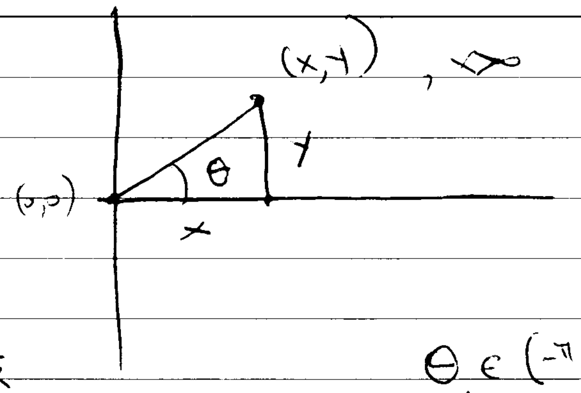
3) ⇒ 1) $\exists\, \varphi$ ολόμορφη στο Ω ώστε $\varphi(z) = \ln|z| + i\, v(z)$
⇒ v συζυγής αρμονική της $\ln|z|$.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν στο τόπο Ω $(0 \notin \Omega)$ ορίζεται συνεχής κλάδος φ του λογαρίθμου, τότε $\varphi'(z) = 1/z$ στο Ω

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Εφχ: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$
τοξεφχ: $\mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$(\text{τοξεφ}\, t)' = \frac{1}{1+t^2}$



Ορίζουμε, $x>0$

$z = x+iy$,

$L(z) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + i\,\text{τοξεφ}\frac{y}{x}$

$\quad\quad\quad\quad\quad u \quad\quad\quad\quad\quad\quad v$

$\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$

$\text{εφ}\,\theta = \frac{y}{x}$

$\theta = \text{τοξεφ}\frac{y}{x}$

↳ συνεχής

$L(z)$ συνεχής και C^∞

~~...~~ και $L(z)$ κλάδος του λογαρίθμου.

Οι u, v είναι διαφορίσιμες.

$u_x = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}x}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$, $u_y = \frac{y}{x^2+y^2}$

$v_x = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $v_y = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{\cancel{x}}{x^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$

Ισχύουν οι Cauchy-Riemann.

Άρα $L(z)$ ολόμορφη

$L'(z) = u_x + i v(x) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = 1/z$

αλλ

Γενίκευση για κάθε τόπο

Αν φ συνεχής κλάδος του λογαρίθμου στο Ω

$z_0 \in \Omega \Rightarrow \varphi'(z_0) = 1/z_0$.

Έστω D ανοιχτός δίσκος με κέντρο z_0 ώστε $D \subset \Omega$

Θα δείξω $(\varphi|D)' = \frac{1}{z}$

Θεωρώ $T: D \to \mathbb{C}$ με $T(z) = \frac{z}{z_0}$

ο D μετακινείται σε δίσκο με κέντρο το $(1,0)$

Άρα είμαστε τώρα στο ίδιο ημιεπίπεδο

τώρα L στο περιορισμένο
αφού έπαιξε στο δεξί ημιεπίπεδο

$$L(T(z)) = L\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

προσθέτω οποιαδήποτε σταθερά και να βγαίνει λογάριθμος ???

$\log z_0 + L\left(\frac{z}{z_0}\right)$ στο D

ολόμορφη

ολόμορφη

$$L'\left(\frac{z}{z_0}\right) = \frac{z_0}{z} \cdot \frac{1}{z_0} = \frac{1}{z}$$

$$e^{\log z_0 + L(z/z_0)} = e^{\log z_0} \cdot e^{L(z/z_0)} = \cancel{z_0} \cdot \frac{z}{\cancel{z_0}} = z.$$