ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ / 11/10/07 / Μάθημα 4

$\nu \in \mathbb{N}$, $z^{n}=1$ τότε $\rho_\kappa = e^{i\frac{2\pi\kappa}{n}}$, $\kappa=0,\dots,n-1$

Αν $\rho = e^{\frac{i2\pi}{n}}$, $\rho^0, \rho^1, \rho^2, \dots, \rho^{n-1}$ ...

Ασκήσεις (1) $\rho_0+\rho_1+\dots+\rho_{n-1}=;$

(2) $\rho_0^{\lambda}+\rho_1^{\lambda}+\dots+\rho_{n-1}^{\lambda}=;$

ΛΥΣΗ

1) Για $n=1$ $\rightsquigarrow$ το άθροισμα είναι 1

για $n\geq 2$

$$z^n-1=0$$
$$\parallel$$
$$(z-z_0)(z-z_1)\cdots(z-z_{n-1})$$
$$-z_0-z_1-\dots-z_{n-1}=0 \quad \text{(από Vieta)}$$

αλλιώς, για $n\geq 2$

$$\rho^0+\rho^1+\dots+\rho^{n-1}$$

$$\frac{\alpha^N-\beta^N}{\alpha-\beta}=\alpha^{N-1}\cancel{\beta}+\alpha^{N-2}\beta^{1}+\dots+\cancel{\alpha}\beta^{N-2}+\beta^{N-1}$$

$$S=\rho^0+\rho^1+\dots+\rho^{n-1}$$
$$\rho\cdot S=\rho+\rho^2+\dots+\rho^n$$

$$S(1-\rho)=1-\rho^n \Rightarrow S=\frac{1-\rho^n}{1-\rho}=0$$

2) $(\rho^0)^{\lambda}+(\rho^1)^{\lambda}+(\rho^2)^{\lambda}+\dots+(\rho^{n-1})^{\lambda}$

$$\parallel$$
$$(\rho^{\lambda})^0+(\rho^{\lambda})^1+(\rho^{\lambda})^2+\dots+(\rho^{\lambda})^{n-1}$$

Αν $\rho=\rho^{\frac{i2\pi}{\nu}}$, $\lambda\in\mathbb{Z}$. ~~Πότε~~ το $\rho^{\lambda}=1$; (αν και μόνο αν $\lambda\equiv 0 (\mathrm{mod}\, n)$)

$$\rho^\lambda = \left(e^{\frac{i2\pi}{n}}\right)^\lambda = e^{i\frac{\lambda}{n}\cdot 2\pi} = 1 = e^{i0}$$

$$\cancel{i2\pi}\cdot\frac{\lambda}{n} = \cancel{i2\pi}m \quad , m\in\mathbb{Z}$$

$$\frac{\lambda}{n} = m \Rightarrow \boxed{\lambda = nm}$$

Αν λ = πολλαπλάσιο του n, τότε $\rho^\lambda = 1$

$$(\rho^\lambda)^0 + (\rho^\lambda)^1 + \dots + (\rho^\lambda)^{n-1} = \begin{cases} n, & \text{αν } \lambda \text{ πολ/σιο του } n \\ 0, & \lambda \neq 0 \bmod n \end{cases}$$

(αφού αν $\lambda \neq 0 (\bmod n)$ έχουμε από το αξιοσημείωτο πηλίκο

$$\frac{(\rho^\lambda)^n - 1}{\rho^\lambda - 1} = \frac{(\rho^n)^\lambda - 1}{\rho^\lambda - 1} = 0$$

$\alpha\lambda$

$e^z = w$, $w\neq 0$, $\log w = \ln|w| + i(\mathrm{Arg}\,w + 2\kappa\pi)$, $\kappa\in\mathbb{Z}$

Έστω $w_1, w_2 \neq 0$ ισχύει(;;;) $\underbrace{\log(w_1\cdot w_2) = \log w_1 + \log w_2}$,

Σαν σύνολο να είναι ίσα.

(Αν θεωρήσω $\log i = \log 1 + \log i$ σα καταλήγω σε άτοπο αφού υπάρχει ένα ολόκληρο σύνολο ίσο με $\log i$. Εξετάσαμε την ισότητα σαν ισότητα συνόλων)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $z_1 \in \log w_1$

$z_2 \in \log w_2$

$\Rightarrow z_1 + z_2 \in \log w_1 w_2$

$e^{z_1} = w_1$ και $e^{z_2} = w_2$

$\Rightarrow e^{z_1+z_2} = w_1\cdot w_2$

Πράγματι όμως αυτό ισχύει αφού $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$

Αντίστροφα: Αν $z_3 \in \log w_1 w_2$, $z_1\in \log w_1$

Θα δείξω ότι $z_3 - z_1 \in \log w_2$

(13)

Τότε $e^{z_3} = w_1 w_2$ και $e^{z_1} = w_1$ $\Big\}$ $\dfrac{e^{z_3}}{e^{z_1}} = w_2$ ✓

$e^{z_3 - z_1} = w_2$

Για να κάνουμε Ανάλυση θέλουμε ν' ασχολούμαστε με μονότιμες συναρτήσεις κι όχι με σύνολα. Θα θεωρούμε (επιλέγουμε) πχ για την $\log w$ έναν "αντιπρόσωπο".

Τότε βέβαια η σχέση $\log w_1 w_2 = \log w_1 + \log w_2$ μπορεί να μην ισχύει για τα επιλεγμένα μας στοιχεία.

Αν θέλω f συνεχής, αφού $\log w = \ln|w| + i(\mathrm{Arg}\,w + 2k\pi)$ θα επιλέξω το κατάλληλο $\mathrm{Arg}\,w$.

Αν α^β, $\alpha \neq 0$,

$e^{\beta \log \alpha}$ $\longrightarrow$ Πώς θα το ορίσουμε δεδομένου ότι $\alpha^1 = \alpha$.

για $\beta = 1$: $e^{1(\log \alpha)} = e^{\log \alpha} = \alpha$.

$\log \alpha = \mathrm{Log}\,\alpha + i2k\pi$.

Για $\beta = 2$: $e^{2(\log \alpha)} = \left(e^{\log \alpha}\right)^2 = \alpha \cdot \alpha$

Πχ $i^i = e^{i \log i}\, e^{i i(\pi/2 + 2k\pi)} = \underbrace{e^{-\pi/2} \cdot e^{-2k\pi}}_{\text{σύνολο}}$ $\quad \left(\log i = i(\pi/2 + 2k\pi)\right)$

• Αν $\beta \in \mathbb{Q}$, $\beta = \dfrac{p}{q}$ και $(p,q) = 1$ $(p \in \mathbb{Z},\ q \geq 1,\ q \in \mathbb{N})$.

α^β περιέχει ακριβώς q στοιχεία $\quad \left(\log \alpha = \mathrm{Log}\,\alpha + 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}\right)$

$\alpha^\beta = e^{\beta \log \alpha} = e^{\frac{p}{q} \cdot \log \alpha} = e^{\frac{p}{q}(\mathrm{Log}\,\alpha + i2k\pi)} =$

$= e^{\frac{p}{q} \cdot \mathrm{Log}\,\alpha} \cdot e^{i2\pi \cdot \frac{kp}{q}}$

$e^{i2\pi \frac{k_1 p}{q}} = e^{i2\pi \frac{k_2 p}{q}} \iff \dfrac{\cancel{i2\pi}(k_1 - k_2)p}{q} = \cancel{i2\pi}\,l$, $l \in \mathbb{Z}$

$(\kappa_1-\kappa_2)p = lq \iff q \mid \kappa_1-\kappa_2$

• Αν $\beta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

$$\alpha^{\beta} = e^{\beta(\log_0\alpha + 2\kappa\pi i)} = e^{\beta\log_0\alpha}\cdot e^{i2\pi\kappa\beta}$$

$$e^{i2\pi\kappa_1\beta} = e^{i2\pi\kappa_2\beta} \iff \cancel{e}^{\cancel{i2\pi}(\kappa_1-\kappa_2)\beta} = \cancel{i2\pi}\, l$$

Αν $\kappa_1 \neq \kappa_2 \Rightarrow \beta = \dfrac{l}{\kappa_1-\kappa_2}$ <u>Άτοπο</u>

Άρα αν $\kappa_1\neq\kappa_2 \Rightarrow e^{i2\pi\kappa_1\beta} \neq e^{i2\pi\kappa_2\beta}$ και άρα αριθμήσιμο πλήθος μιγαδικών αριθμών

• Αν $\beta \in \mathbb{C}-\mathbb{R}$

$$\alpha^{\beta} = \underbrace{e^{\beta\log_0\alpha}}_{\neq 0}\cdot e^{\beta 2\pi i\kappa}$$

$$|\alpha^{\beta}| = |e^{\beta\log_0\alpha}|\cdot \overset{(\neq 0)}{e^{-(\mathrm{Im}\beta)\cdot 2\pi\kappa}}$$

$$e^{-(\mathrm{Im}\beta)\cdot 2\pi\kappa} = \left[e^{-(\mathrm{Im}\beta)\cdot 2\pi}\right]^{\kappa}$$

$\rightarrow$ πάλι έχουμε άπειρα αριθμήσιμα το πλήθος στοιχεία

Αν $z = x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$

$w = \alpha + i\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$|z-w| = \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$$

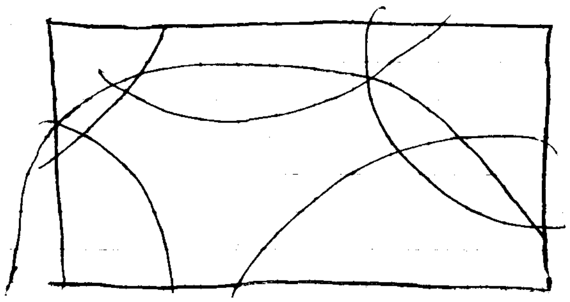
$z_n \in \mathbb{C}$, $z\in\mathbb{C}$

$$z_n \to z \iff |z_n - z| \to 0 \iff \begin{array}{l}\mathrm{Re}\,z_n \to \mathrm{Re}\,z\\ \mathrm{Im}\,z_n \to \mathrm{Im}\,z\end{array}$$

(X, d) μ.χ. Τότε X πλήρης $\Leftrightarrow$ για κάθε φθίνουσα ακολουθία κλειστών $F_n \subset X$ με $\operatorname{diam} F_n \to 0$ ισχύει $\bigcap F_n$ = μονοσύνολο.

$\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ πλήρες

Έστω X, ρ συμπαγής μετρικός χώρος και $\bigcup_{i \in I} V_i$ ανοιχτό κάλυμμα X



$X \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$, V_i ανοιχτό

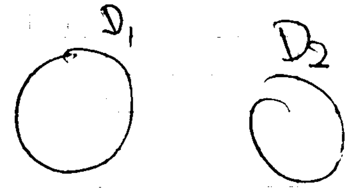
$\exists\ i = 1, \dots, n$ ώστε $X = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$

Τότε $\exists$ ένας Αριθμός (Lebesgue), $\lambda > 0$ ώστε $\forall\ A \subseteq X$ με $\operatorname{diam} A < \lambda$ να υπάρχει i_0 : $A \subset V_{i_0}$

A συνεκτικό αν και μόνο αν τα μόνα υποσύνολα του A που στη σχετική τοπολογία είναι ταυτόχρονα ανοιχτά και κλειστά είναι το $\emptyset$ και το A.

ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ. Δεν υπάρχουν ανοιχτά μη κενά $X, Y \subset A$ ξένα ώστε $X \cup Y = A$.

Αν A_i συνεκτικά $\xrightarrow{x_0 \in \cap A_i ?}$ $\cup A_i$ συνεκτικό



$u : D_1 \cup D_2 \to \mathbb{R}$

$u_x = 0 = u_y$

$\Rightarrow$ Δεν σημαίνει ότι η u είναι σταθερή

$\to$ αν όχι συνεκτικό

Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό

Τότε (1) $\Leftrightarrow$ (2)

(1) Ω συνεκτικό

(2) $\forall\ P, Q \in \Omega$ υπάρχει πολυγωνική γραμμή $\Gamma \subset \Omega$ με ~~πλευρ~~ πλευρές παράλληλες σε άξονες που να ξεκινά στο P και να τελειώνει στο Q.

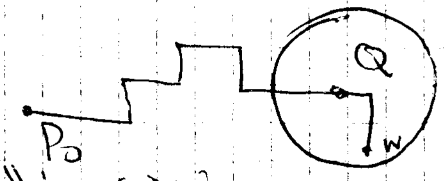
ΟΡΙΣΜΟΣ : $\Omega \subset \mathbb{C}$ λέγεται τόπος αν και μόνο αν είναι ανοιχτό, συνεκτικό

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(1) $\to$ (2) $\quad S = \{ Q \in \Omega : \exists\ \Gamma$ πολ. γραμμή $\subset \Omega$ με πλευρές $\parallel$ άξονες που ενώνει P_0 με $Q \}$

• $S \neq \emptyset$ ($P_0 \in S$)

• S ανοιχτό



Αν $B(q,\varepsilon)$ ανοιχτός δίσκος

$\forall\, w \in B(q,\varepsilon) \to \exists$ πολ. γραμμή από w.

• S κλειστό. Έστω $q \in \Omega \setminus S$

$\exists\ B(q,\varepsilon) \subseteq \Omega$ (αφού Ω ανοιχτό)

Τότε ισχυριζόμαστε ότι $B(q,\varepsilon) \subseteq \Omega \setminus S$.

Αν όχι, $\exists\ w \in B(q,\varepsilon)$ το οποίο να ενώνεται με πολ. γραμμή με το P_0.

Τότε όμως θα ενώνεται και το q. Άτοπο.

Άρα S κλειστό.

S ανοιχτό & κλειστό $\Rightarrow S = \mathbb{C}$.

Αντίστροφα: Έστω $p \in \Omega$. Υποθέτουμε ότι $\forall\, q \in \Omega$ υπάρχει πολυγωνική γραμμή $\Pi_q \in \Omega$ από το p στο q. Τότε $\Omega = \bigcup_{q \in \Omega} \Pi_q$.

Επειδή $\bigcap \Pi_q = \{p\} \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ Ω συνεκτικό ως ένωση συνεκτικών με μή κενή τομή (καθώς Π_q είναι συνεκτικό)

ΕΠΟΜΕΝΩΣ: ΟΠΟΙΟΣ ΧΩΡΟΣ ΓΙΑ ΤΟΠΟ ΕΧΕΙ ΤΗΝ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΜΕ ΤΙΣ ΠΟΛΥΓΩΝΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ!

MΙΓΑΔΙΚΗ / 16/10/07 / Μάθημα 5

Ω τόπος, $u: \Omega \to \mathbb{R}$ συνάρτηση.

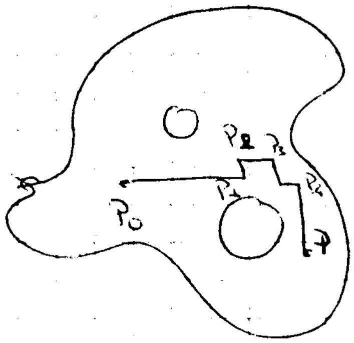
$u_x = u_y \equiv 0$ στο Ω

Τότε u σταθερή στο Ω

Απόδειξη

Θα δείξουμε ότι αν $P_0, P \in \Omega$ (τυχαία)

τότε $u(P_0) = u(P) = c$.



Ω τόπος $\Rightarrow \exists$ πολυγωνική γραμμή $p: P_0 \to P$

$P_0 - P_1 \to$ συνάρτηση μόνο του x, $u_x = 0 \Rightarrow P_{P_0 - P_1} = c$. και άρα $u(P_0) = u(P_1)$

Ομοίως $P_1 - P_2 \to$ συνάρτηση του y, $u_y = 0 \Rightarrow P_{P_1 - P_2} = c$ $u(P_1) = u(P_2)$

Έτσι φτάνω στο ~~P~~ $\Rightarrow u(P) = u(P_0)$

Συνεκτική συνιστώσα του $x_0 \to$ η ένωση όλων των συνεκτικών που περιέχουν το x_0

$\downarrow$ Αν y άλλο σημείο

Συνεκτική συνιστώσα του x_0 = συνεκτ. συνιστώσα του y

(ή)

συνεκτική συνιστώσα του x_0 $\cap$ συνεκ. συνιστώσα του y $= \phi$.

Αν $\Omega \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ανοικτό, τότε κάθε συνεκτική συνιστώσα του Ω είναι ανοικτό σύνολο

ανοικτό

αλ

αλ

~~Το~~ Το πλήθος των συνιστωσών στο $\mathbb{R}^2$ είναι το πολύ άπειρο αριθμήσιμο. ($\mathbb{Q}^2$ πυκνό)

αλ

Ερώτημα αν $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Μπορεί το A να γραφτεί σαν αριθμήσιμη ένωση ξένων δίσκων;

$\to$ ΟΧΙ, δεν γίνεται με δίσκους

Γίνεται όμως με συνιστώσες!!!

Δηλ. κάθε A ανοικτό γράφεται σαν αριθμήσιμη ένωση ξένων ανοικτών συνεκτικών συνιστωσών.

Αν $A \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in A$ και $f: A \to \mathbb{C}$ συνάρτηση.
Τότε η f λέγεται συνεχής στο $z_0 \Leftrightarrow$
$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ $(\delta = \delta_{f, z_0, \varepsilon})$ ώστε $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ $\forall\, z \in A$ με $\rho(z, z_0) < \delta$.
$\Leftrightarrow$ Για κάθε $z_n \to z_0$ $(|z_n - z_0| \to 0)$ ισχύει $f(z_n) \to f(z_0)$

ΣΥΝΕΧΗΣ ΕΙΚΟΝΑ ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΥ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΕΚΤΙΚΟ

$f: A \to f(A) \subset \mathbb{C}$. f συνεχής, A συνεκτικό.
Τότε $f(A)$ συνεκτικό.
Έστω ότι $f(A)$ μη συνεκτικό. Τότε $\exists\ V_1, V_2$ ανοιχτά στο $f(A)$ ξένα ώστε $V_1 \cup V_2 = A$
$f^{-1}(V_1)$ ανοιχτό στο A αφού f συνεχής. Ομοίως $f^{-1}(V_2)$ ανοιχτό.
$f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) = \phi$ και $f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2) = A$. Άτοπο διότι A μη συνεκτικό. Άτοπο.

Εφαρμογή $\to$ Θ. Ενδιαμέσων για $f: A \to \mathbb{R}$ συνεχή, A συνεκτικό.

$\alpha\lambda$

Έστω $K \subseteq \mathbb{C}$ συμπαγές και έστω ~~...~~ $N \subseteq \mathbb{C}$ συμπαγές.
$K \cap N = \phi \Rightarrow d(K, N) > 0$
$$d(K,N) = |z_0 - w_0| \text{ για κάποιο } z_0 \in K,\ w_0 \in N$$

Αν $K \subseteq \mathbb{C}$ συμπαγές, $L \subseteq \mathbb{C}$ κλειστό $K \cap L = \phi$. ισχύουν τα ίδια
Αν $K, L \subseteq \mathbb{C}$ κλειστά, δεν ισχύει. ΠΧ $\quad K = xx'$ κλπ, $L = \frac{1}{x}$

$\alpha\lambda$

X σύνολο
$f_n: X \to \mathbb{C}$ συνάρτηση
$f: X \to \mathbb{C}$ συνάρτηση

Λέμε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα επί του X αν $\underbrace{\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|}_{L(n)} \to 0$

Αν f_n ομοιόμορφα συνεχείς ~~…~~ τότε f ομ. συνεχής

$x_0 \to$ συνέχεια των f_n.

$$\left| f(x) - f(x_0) \right| \le \left| f(x) - f_n(x) \right| + \left| f_n(x) - f_n(x_0) \right| + \left| f_n(x_0) - f(x_0) \right| \le$$

$$\le 2L(n) + \left| f_n(x) - f_n(x_0) \right|$$

Διαλέγω n_0 ώστε $L_n < \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall n \geq n_0$

$$< \frac{2\varepsilon}{3} + \left| f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) \right|$$

Όπου για το δ της f_{n_0} για $\varepsilon/3$ έχουμε τελικά $\underline{\left| f(x) - f(x_0) \right| < \varepsilon}$

Άρα ομοιόμορφο όριο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η ακολουθία $f_n : X \to \mathbb{C}$ συναρτήσεων λέγεται ομοιόμορφα Cauchy αν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, n_\varepsilon$ ώστε για $n, m \geq n_\varepsilon$ να ισχύει

$$\sup_{x \in X} \left| f_n(x) - f_m(x) \right| < \varepsilon$$

Αν αυτό ισχύει ~~(⇔)~~ $\exists\, f : X \to \mathbb{C}$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X.

Δηλ. πλήρης ο χώρος των συναρτήσεων.

ΘΕΩΡΗΜΑ: (Κριτήριο Weierstrass)
Αν έχω $f_n : X \to \mathbb{C}$ συναρτήσεις και $\sup_{x \in X} |f_n(x)| \le M_n$ και

$\sum_n M_n < +\infty$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο X.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί να δείξω ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι ομοιόμορφα Cauchy.

$(n < m)$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{m} f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| \le \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{m} M_k$$

Αυτό ισχύει $\forall x \in X$.

Επομένως $\sup_{x \in X} \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| \le \sum_{k=n+1}^{m} M_k < \varepsilon$ όταν $m > n > n_\varepsilon$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ DIRICHLET

Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x)\beta_n(x)$

όπου: $\alpha_n : X \to \mathbb{R}^+$, $\alpha_n(x) \geq \alpha_{n+1}(x)$ (δηλ. α_n φθίνουσα)

και $\alpha_n \to 0$ ομοιόμορφα (στο X)

και $b_n : X \to \mathbb{C}$ και $\exists\, M < \infty$ ώστε $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k(x)$ να

ικανοποιούν $|S_n(x)| \leq M \quad \forall n \;\forall x \in X$

Τότε i) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x)\beta_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του X.

2) $\forall N \left|\sum_{n=N}^{\infty} \alpha_n(x)\beta_n(x)\right| \leq 2M\cdot\alpha_N(x)$

~~Απόδειξη~~

1) $\sum_{l=n}^{m} \alpha_l(x)\beta_l(x) = \sum_{l=n}^{m} \alpha_l(x)\left[S_l(x) - S_{l-1}(x)\right] =$

$= \sum_{l=n}^{m} \alpha_l(x)\cdot S_l(x) - \sum_{l=n}^{m} \alpha_l(x) S_{l-1}(x) =$

Θέτω $l-1 = k$ οπότε το δεύτερο άθροισμα γίνεται $\sum_{k=n-1}^{m-1} \alpha_{k+1}(x)\cdot S_k(x)$

$= \sum_{l=n}^{m} \alpha_l(x)\cdot S_l(x) - \sum_{l=n-1}^{m-1} \alpha_{l+1}(x)\cdot S_l(x) =$

$= \alpha_m(x)\cdot S_m(x) - \alpha_n(x)\cdot S_{n-1}(x) + \sum_{l=n}^{m-1} S_l(x)\left[\alpha_l + \alpha_{l+1}(x)\right]$

Αν πάρω απόλυτες τιμές (μη την αρχή) έχω

$\leq \alpha_m(x)\cdot M + \alpha_n(x)\cdot M + \sum_{l=n}^{m-1} M\left(\alpha_l(x) + \alpha_{l+1}(x)\right) =$

τηλεσκοπικό άθροισμα

$= M\left\{\cancel{\alpha_m(x)} + \alpha_n(x) + \alpha_n(x) - \cancel{\alpha_m(x)}\right\} = 2M\,\alpha_n(x) < \varepsilon$

(αφού $\alpha_n \to 0$)

→ οπότε συγκλίνει ομοιόμορφα πράγματι.

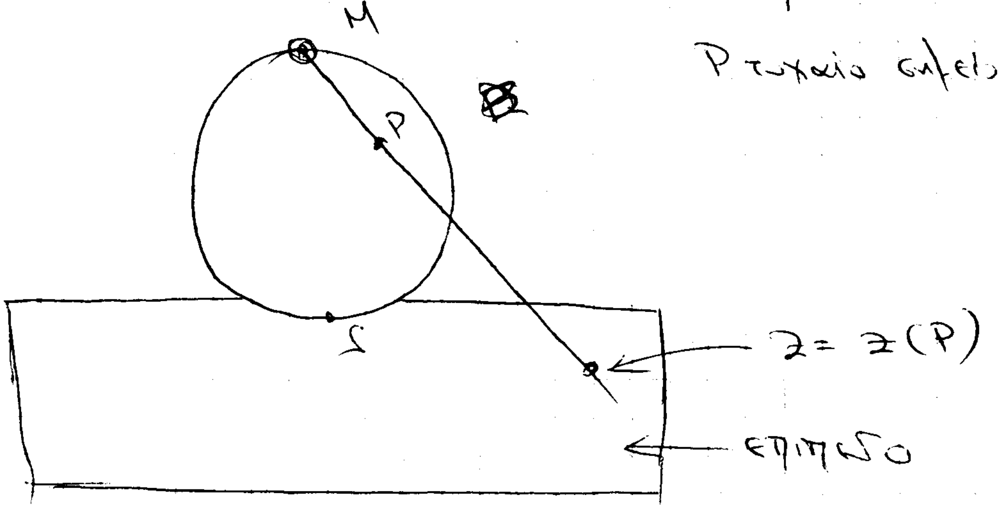
2) Από το (1) ένα μερ. άθροισμα φράσσεται από το $2M\alpha_n(x)$ $\forall m$.

Αν πάρω $m \to \infty$ προκύπτει το ζητούμενο

[ΣΤΕΡΕΟΓΡΑΦΙΚΗ ΠΡΟΒΟΛΗ]

Σφαίρα στον τρισδιάστατο χώρο, που ακουμπάει στο επίπεδο, με M να το εξαιρώ.

P τυχαίο σημείο. Τομή με επίπεδο Ω.



Η f που αντιστοιχεί κάθε σημείο της σφαίρας στο επίπεδο, είναι 1-1, επί και συνεχής. Επίσης f^{-1} συνεχής.
Έχουμε λοιπόν έναν ομοιομορφισμό.
Η σφαίρα μείον τον Β. Πόλο και το επίπεδο είναι ομοιόμορφα.
Για να γίνει συμπαγής η σφαίρα πρέπει να προσθέσω ένα σημείο το M.
Έτσι για να κάνω το $\mathbb{C}$ συμπαγές αρκεί να προσθέσω ένα μοναδικό άπειρο.

Έτσι $z_n \to \infty \iff |z_n| \to +\infty$

$z_n \in \mathbb{C}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1) Έστω $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. $a_n = z^n$. Συγκλίνει, πού, ιδιαίτερα, αν $z \in$ στον μοναδιαίο δίσκο: Συγκλίνει, Σ. συσσωρεύσεως. Γενική Μελέτη.

όχι

$\Leftrightarrow |z|<1$ στο $(0,0)$

$\neq$ $|z| \geq 1$ όχι

2) $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1 + z + z^2 + \dots$, συγκλίνει ή όχι, ομοιόμορφα ή όχι.

στο $\frac{1}{1-z}$, αν $|z|<1$

z^n ακολουθία

Για $z=0,1$ $\quad z^n\to 0$, $z^n\to 1$

Αν $t>0$, t^n.

$|z|<1 \Rightarrow |z^n|\to 0 \Leftrightarrow |z^n-0|\to 0 \Leftrightarrow z^n\to 0$

$|z|=1 \Rightarrow |z^n|=1\to 1$

$|z|>1 \Rightarrow |z^n|\to +\infty \Rightarrow z^n\to \infty$

Για $|z|=1$, $z=e^{i2\pi t}$, $t\in\mathbb{R}$ $\quad$ (Συγκλίνει; ~~[illegible]~~ Πότε 2 όροι είναι ίσοι;)

$z^n=e^{i2\pi nt}$, $z^m=e^{i2\pi mt}$

$z^n=z^m \Leftrightarrow e^{i2\pi nt}=e^{i2\pi mt} \Leftrightarrow (n-m)t=k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=\frac{k}{n-m}$, αν $n\neq m$ ⇒ δηλ. ⇔ t ρητός

• Αν t ρητός (π.χ. $t=\frac{1}{2}$)

$t=\frac{p}{q}$, $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}^*$ και $(p,q)=1$. $\quad z^n=e^{i2\pi\frac{p}{q}\cdot n}$

Ισχύει $\left(e^{i2\pi\frac{p}{q}n}\right)^q=1$

↳ αποτελούν τις q-οστές ρίζες της μονάδας.

$\left(\frac{p}{q}=\frac{k}{n-m} \Leftrightarrow p(n-m)=qk \Leftrightarrow q\mid n-m\right)$

↓ Άρα η z^n παίρνει περιοδικά q τιμές και αυτά τα σημεία είναι τα μόνα σ.σ.σ.

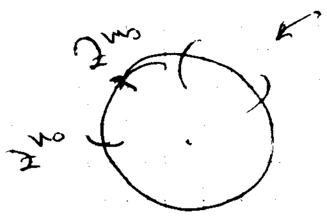
• Αν $t\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $z=e^{i2\pi t}$, $z^n=e^{i2\pi nt}$

Εδώ κάθε 2 όροι της ακολουθίας είναι διαφορετικοί.

(Αφού δείξαμε ότι αν $z^n=z^m$ τότε t ρητός)

Τότε τα σ.σ. είναι όλη η περιφέρεια.

Θεωρώ τυχαίο τόξο στην περιφέρεια.



Έστω μήκος τόξου $\varepsilon>0$

• Αν $2\pi t<\varepsilon$, προφανώς η z^n "μπαίνει" στο τόξο

• Διαφορετικά θεωρώ z^{n_0}, z^{m_0}, $n_0>m_0$ και $z^{n_0-m_0}$ με απόσταση (γωνία) $z^{n_0-m_0}<\varepsilon$. Τότε ο $\left(z^{n_0-m_0}\right)^n$ θα "μπαίνει" στο ε

Αρκεί να βρω 2 τέτοια όρια που να είναι πολύ κοντά (23)

$\text{γωνία}(z^{n_0}, z^{n_1}) = \text{γωνία}(z^{n_0-n_1}, 1)$

Παίρνετε $z=e^{i2\pi t}$, $|z|=1$

Επειδή z^n φραγμένη, υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Σε ε περιοχή έπρεπε να βρω άπειρους όρους. Άρα βρίσκω 2 όρους πολύ κοντά.

__Συμπέρασμα__ $\Rightarrow$ αν $z=e^{i2\pi t}$, t άρρητος $\Rightarrow$ πυκνό το σύνολο των θέσεων

αν t ρητός $\Rightarrow$ πεπερασμένο

Αν I τόξο στο μοναδιαίο κύκλο,
ορίζουμε πλήθος$\{n\in\mathbb{N} : n\le N,\ z^n\in I\}$

Αν $I_1\cup I_2 =$ κύκλος, άθροισμα 1

ισχύει πως;

$\Rightarrow$ Επισκέπτομαι ένα τόξο με συχνότητα ανάλογη προς το μήκος του

__ΣΥΝΟΨΙΖΟΝΤΑΣ:__

$|z|<1 \Rightarrow z^n\to 0$ $\rightarrow$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο 0

$|z|>1 \Rightarrow z^n\to\infty$ $\rightarrow$ αποκλίνει ομοιόμορφα στο ∞

$z=1 \Rightarrow z^n=1\to 1$

Δεν συγκλίνει:

- $|z|=1$ με $z=e^{i2\pi t}$, $t\in\mathbb{Q}-\{1\}$ $\rightarrow$ έχει πεπερασμένο πλήθος σημείων συσσώρευσης
- $t\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ $\rightarrow$ πυκνό το σύνολο των σημείων συσσώρευσης στην περιφέρεια

Για την ακολουθία συναρτήσεων: $f_n(z)=z^n$

$f_n(z)=z^n$ συγκλίνει $\{z: |z|<1\}\cup\{1\}$

στην $f:\{z: |z|<1\}\cup\{1\}\to\mathbb{C}$

$f(z)=0$, όταν $|z|<1$

$f(1)=1$

Σε ποια σύνολα η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα;

Αν $A \subset \{z : |z|<1\} \cup \{1\}$

Θεωρώ $A - \{1\} = B \subset \{z : |z|<1\}$

$B \subset \{z : |z|<1\}$ Για να έχω ομοιόμορφη σύγκλιση:

$$\sup_{z\in B} |f_n(z) - f(z)| \overset{z^n \to 0 \text{ στο } B}{=} \sup_{z\in B} |z^n| = \sup_{z\in B} |z|^n = \left(\sup_{z\in B}|z|\right)^n$$

Επομένως, αν $\sup_{z\in B}|z| = 1 \Rightarrow$ δεν έχω ομ. σύγκλιση αφού $\not\to 0$.

Και $\left(\sup_{z\in B}|z|\right)^n \to 0$, αν $\sup_{z\in B}|z| < 1$

Επομένως ~~...~~ έχω ομοιόμορφη σύγκλιση στο $B \iff$

$\iff \nexists$ ακολουθία στο B που να προσεγγίζει την περιφέρεια

$\iff \exists\ r<1$ ώστε $B \subset \{z : |z| \le r\}$

Σε μικρότερους δίσκους απ' τον μοναδιαίο έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση

Στον μοναδιαίο $\Rightarrow$ δεν έχουμε

αλλ

$$\sum_{n=0}^{N} z^n = 1 + z + \dots + z^n = \begin{cases} \dfrac{1-z^{N+1}}{1-z}, & z \neq 1 \\ N+1, & z = 1 \end{cases}$$

$\rightarrow$ συγκλίνει στο $\frac{1}{1-z}$ για $|z|<1$

$\rightarrow$ Πότε έχω ομοιόμορφη σύγκλιση; (σε ποια υποσύνολα του μοναδιαίου δίσκου)

$A \subset \{z, |z|<1\}$ με την ιδιότητα:

"η σύγκλιση στο A είναι ομοιόμορφη" $\iff$

$\iff \exists\ r<1$ ώστε $A \subset \{z, |z| \le r\}$

$\iff \sup_{z\in A}|z| < 1$

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω $A \subset \{z : |z| \le r\}$, $r<1 \Rightarrow$ ομοιόμορφη σύγκλιση

Πράγματι, $\sup_{z\in A}|z^n| = \sup_{z\in A}|z|^n = \left(\sup_{z\in A}|z|\right)^n \le r^n$

Αφού $\sum r^n \to \frac{1}{1-r}$, γιατί $r<1$

Άρα από Κρ. του Weierstrass έχω ομοιόμορφη σύγκλιση.

Αντίστροφα, αν $\sup_{z\in A}|z|=1$ θα δείξουμε ότι δεν έχουμε ομ. σύγκλιση.

Λόγω συμπάγειας, υπάρχουν z_q στο A και w, $|w|=1$ ώστε $z_q \to w$.

Έστω ότι έχουμε ομοιόμ. σύγκλιση στο A.

~~Θέλω~~ Τότε η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι ομοιόμορφα Cauchy στο A, δηλ. $\sup_{z\in A}\left|\sum_{k=n}^{m} z^k\right| < \varepsilon \ \forall\, m,n \geq n_\varepsilon$

$$\sup_{q}\left|\sum_{k=n}^{m} z_q^k\right| \leq$$

$q\to\infty$, συγκλίνει από συνέχεια της πολυωνύμου

$$\left|\sum_{k=n}^{m} w^k\right| \leq \varepsilon$$

Άρα τα μερικά αθροίσματα είναι Cauchy και στο w, άρα η σειρά συγκλίνει στο w. Άτοπο.

Εναλλ. ισχύει (διαφορετικός τρόπος απόδειξης)

$$\sup_{z\in A}\left|\sum_{k=n}^{m} z^k\right| = \sup_{z\in \overline{A}}\left|\sum_{k=n}^{m} z^k\right|$$

Όμως $w\in\overline{A}$, άρα πάλι θα έπρεπε να συγκλίνει η σειρά στο w. Άτοπο.

(συγκλίνει ομοιόμορφα $\Leftrightarrow$ ομοιόμορφα Cauchy)

Με τη στερεογραφική προβολή, κύκλοι & ευθείες στο επίπεδο απεικονίζονται σε κύκλους στην περιφέρεια της σφαίρας.

Ορισμός: Γενικευμένη περιφέρεια → κύκλος ή ευθεία στο $\mathbb{C}$.

Κάποια παραδείγματα:

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \nexists$

$\lim_{z \to 0} \frac{1}{z} = \infty$

$z \to w(z) = \frac{1}{z}$ και $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$

Θέτουμε $\left.\begin{array}{l} w(0) = \infty \\ w(\infty) = 0 \end{array}\right\}$ ώστε να είναι συνεχής

Η $w : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

↳ συνεχής, 1-1, επί και $w^{-1} = w$, συνεχής.

• Αν $w(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$

↳ αν η διαίρεση είναι τέλεια, ο μετασχηματισμός $w(z)$ θα είναι $\forall z$ σταθερός και ίσος με το πηλίκο.

↳ Πότε $w(z) \neq$ σταθερό; $\left(\text{αν } \alpha\delta - \beta\gamma = 0 \Rightarrow w'(z) = 0 \Rightarrow w = c \right)$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$

Τότε ο μετασχ. δεν είναι σταθερός και λέγεται μετασχ. Mobius.

Ο $w(z)$ ορίζεται στο $\mathbb{C} - \{z = -\frac{\delta}{\gamma}\}$ ως $w(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$

Και ορίζουμε επιπλέον:

$w(z) = \infty$, $z = -\delta/\gamma$

$w(z) = \frac{\alpha}{\gamma}$, $z = \infty$

Τότε έχουμε w, 1-1, επί συνεχής

$w^{-1} = ;$ $\quad w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \Rightarrow \gamma w z + w\delta = \alpha z + \beta$

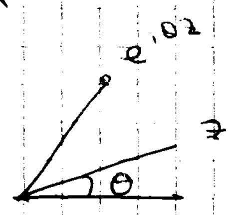
$(\gamma w - \alpha) z = \beta - w\delta$

$z = \frac{\beta - w\delta}{\gamma w - \alpha}$ ↳ επίσης συνεχής

Θα δούμε ότι οι μετασχ. Mobius διατηρούν τις γενικευμένες περιφέρειες και τις γωνίες

• Αν $\lambda > 0$

$z \to \lambda z$, ομοιοθεσία



• Αν $\theta \in \mathbb{R}$

$z \to e^{i\theta} z$

↳ διατηρούνται όλα

• $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$

$z \to \alpha z$

~~$\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$~~ $|\alpha| z = w_1 \to e^{i\theta} w_1 = w = \alpha z$

↳ σύνθεση των 2 προηγ. → η σύνθεση τα διατηρεί κι αυτός ως.

• $z \to \bar{z}$ → ανάκλαση στον xx'

→ τα διατηρεί όλα

→ στις γωνίες δεν διατηρεί την φορά αλλά μόνο το μέτρο

↓

όχι μετασχ. Möbius

$$w(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

• $\gamma = 0 \to \delta \neq 0$

$w = \frac{\alpha}{\delta} z + \frac{\beta}{\delta}$

$z \to \frac{\alpha}{\delta} z = w_1 \to w_1 + \frac{\beta}{\delta} = w$

↓ ομοιοθεσία & στροφή ↳ μεταφορά

• $\gamma \neq 0$ και $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$

$\alpha z + \beta \;|\; \gamma z + \delta$

$\frac{1}{\gamma}\left(\beta\gamma - \frac{\alpha\delta}{\gamma}\right) \;|\; \eta = \frac{\alpha}{\gamma}$

$\parallel$

$\nu \neq 0$

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \eta + \frac{\nu}{\gamma z + \delta}$$

$w_3 = \frac{1}{w_2}$

$z \to w_1 = \gamma z \to w_2 = w_1 + \delta \to$

↳ ομοιοθεσία & στροφή ↳ μεταφορά

$w_4 = \nu \cdot w_3$

↘ ομοιοθεσία & στροφή

$w_5 = w_4 + \Pi$ ↘ μεταφορά

Μελέτη της $w = \frac{1}{z}$

$\alpha \ell$

ευθεία $\alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} = \gamma$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$ $\gamma \in \mathbb{R}$

περιφέρεια $|z|^2 - (\alpha z + \bar{\alpha}\bar{z}) = \gamma$ με $\alpha \in \mathbb{C}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma > -|\alpha|^2$

$$\left(\begin{array}{ll} \alpha = A + Bi & \\ z = x + yi & \alpha z = Ax - By + i(Bx + Ay) \\ & \bar{\alpha}\bar{z} = \quad '' \quad - \quad '' \\ \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} = 2Ax - 2By & \end{array} \right)$$

ευθεία γιατί;

Για την περιφέρεια → το $|z - z_0|^2 = \rho^2 > 0$

$$= |z|^2 + |z_0|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z\bar{z_0}) = \rho^2$$

$$|z|^2 + |z_0|^2 - \bar{z_0}z - z_0\bar{z} = \rho^2$$

↪ περιφέρεια με $\gamma = \rho^2 - |z_0|^2 > -|z_0|^2$

(1) $\alpha \frac{1}{w} + \bar{\alpha}\frac{1}{\bar{w}} = \gamma$, $\alpha \neq 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$

$\alpha\bar{w} + \bar{\alpha}w = \gamma |w|^2$

· αν $\gamma = 0$ → $\alpha\bar{w} + \bar{\alpha}w = 0$ ευθεία

· αν $\gamma \neq 0$ → $|w|^2 - \frac{\bar{\alpha}}{\gamma} w - \frac{\alpha}{\gamma}\bar{w} = 0$, $0 > -\left|\frac{\bar{\alpha}}{\gamma}\right|^2$ ⟺

⟺ $|\alpha| \neq 0$ που ισχύει

άρα περιφέρεια

Επομένως εικόνα ευθείας είναι ή ευθεία ή περιφέρεια

2) $\frac{1}{w\bar{w}} - \left(\frac{\alpha}{w} + \bar{\alpha}\cdot\frac{1}{\bar{w}}\right) = \gamma$ με $\gamma > -|\alpha|^2$

$1 - \alpha\bar{w} + \bar{\alpha}w = \gamma|w|^2$

• αν $\gamma=0$ $\alpha\bar{w}+\bar{\alpha}w=1$ και $\alpha\neq 0$ γιατί $\gamma=0$ και

$\gamma>-|\alpha|^2$

Επομένως ευθεία

• αν $\gamma\neq 0$: $|w|^2+\frac{\bar{\alpha}}{\gamma}\cdot w+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\bar{w}=\frac{1}{\gamma}$

$\frac{1}{\gamma}>-\left|\frac{\bar{\alpha}}{\gamma}\right|^2$

$\gamma>-|\alpha|^2$ που ισχύει, άρα Περιφέρεια.

αρ

$z\to w=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$, $\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}\neq 0$

$\downarrow$

Αν η εικόνα περνά απ' το άπειρο $\to$ ευθεία
Αν η εικόνα δεν περνά απ' το άπειρο $\to$ περιφέρεια

κοιτάμε την ρίζα την παρανομαστή

αρ

Ισχυρισμός: Η $w=\frac{1}{z}$ διατηρεί τις γωνίες.

Εδώ $f(z)=\frac{1}{z}$, θα ισχύει $f'(z)=-\frac{1}{z^2}\neq 0$ άρα γωνίες διατηρούνται