ΜΠΑΔΙΧΗ | 23 | 10/07 | Μάθημα 7 (30)

Τετάρτη 1-3 Π32

$\mathbb{R}^2$ διαν. χώρος επί του $\mathbb{R}$.

$e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ γραμμική (ως προς $\mathbb{R}$)

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta y \\ \gamma x + \delta y \end{pmatrix}$$

$$T(p+q) = T(p) + T(q)$$
$$T(\lambda p) = \lambda \cdot T(p) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Όμως $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$

$T: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ γραμμική ως προς $\mathbb{C}$

$$T(p+q) = T(p) + T(q)$$
$$T(z \cdot p) = z \, T(p) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$T(z) = T(z \cdot 1) = z \cdot T(1)$$
$$\| $$
$$\alpha \cdot z, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad \alpha = T(1)$$

- Η δεύτερη απεικόνιση είναι της μορφής του πρώτου είδους
- Για να είναι ένας πίνακας του πρώτου είδους και του δεύτερου:

Έστω $A = d + ie$, $d, e \in \mathbb{R}$

$w = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$

$$T(w) = (d+ie)(x+iy) = dx - ey + (dy + xe)i \equiv$$
$$\equiv \begin{pmatrix} dx - ey \\ ex + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -e \\ e & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

→ Ένας 2×2 πραγματικός πίνακας ορίζει απεικόνιση γραμμική ως προς $\mathbb{C}$ $\iff$ τα διαγώνια στοιχεία είναι ίσα και τα αντιδιαγώνια αντίθετα.

$F: U \to \mathbb{R}^m$ συνάρτηση

$U \subset \mathbb{R}^n$, $p \in U$

Τότε η F λέγεται διαφορίσιμη (ή παραγωγίσιμη) στο p (ως προς τις πραγματικές μεταβλητές) αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση (ως προς $\mathbb{R}$) $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ώστε $$\frac{F(q)-F(p)-T(q-p)}{\|q-p\|} \xrightarrow[q \to p]{} 0 \in \mathbb{R}^m$$

Τότε η T λέγεται διαφορικό της F στο p.

$$dF$$

$V \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$

$F: U \to \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$, $F=(u,v)$

$$T = \begin{pmatrix} u_x(p) & u_y(p) \\ v_x(p) & v_y(p) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} h \\ s \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u_x(p) & u_y(p) \\ v_x(p) & v_y(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ s \end{pmatrix}$$

Έστω $F=(u,v): U \to \mathbb{R}^2$ συνάρτηση με $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοιχτό και $p \in U$.

Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

i) Υπάρχει στο $\mathbb{C}$ το $\lim_{q \to p} \frac{F(q)-F(p)}{q-p}$ (μιγαδική παράγωγος της F στο p)

ii) Η F είναι διαφορίσιμη στο p ως προς τις πραγματικές μεταβλητές και το διαφορικό είναι γραμμικό ως προς $\mathbb{C}$

iii) Η F είναι διαφορίσιμη ως προς τις πραγματικές μεταβλητές στο p και $u_x(p) = v_y(p)$, $u_y(p) = -v_x(p)$

(Αφού F διαφορίσιμη και T $\mathbb{C}$-γραμμικό)

$$\Rightarrow T(q-p) = A(q-p) \text{ και } \frac{F(q)-F(p)-T(q-p)}{\|q-p\|} = \frac{F(q)-F(p)-A(q-p)}{\|q-p\|} \xrightarrow[q\to p]{} 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{|F(q)-F(p)-A(q-p)|}{\|q-p\|} \xrightarrow[q \to p]{} 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{F(q)-F(p)-A(q-p)}{q-p}\right| \xrightarrow[q\to p]{} 0$$

$$\Rightarrow \frac{F(q)-F(p)-A(q-p)}{q-p} \xrightarrow[q\to p]{} 0 \iff \frac{F(q)-F(p)}{q-p} \xrightarrow[q\to p]{} A \in \mathbb{C}$$

Λέμε ότι:
$A = F'(p)$

Στον πίνακα του διαφορικού είχαμε
$$\begin{pmatrix} u_x(p) & u_y(p) \\ v_x(p) & v_y(p) \end{pmatrix} \begin{matrix} = -v_x(p), \\ = u_x(p) \end{matrix}$$

$$A = F'(p) = u_x(p) + i v_x(p)$$

Ιακωβιανή ορίζουσα: $u_x^2(p) + v_x^2(p)$
$$J = |F'(p)|^2$$

Όταν 1, 2, 3 ισχύουν τότε $F'(p) = \lim_{q\to p} \dfrac{F(q)-F(p)}{q-p} = u_x(p) + i v_x(p)$ ~~και~~ $J = |F'(p)|^2$

Παραδείγματα

Σε ποια σημεία υπάρχει μιγαδική παράγωγος στις παρακάτω συναρτήσεις;

1) $z \to z$ 2) $z \to z^2$ 3) $z \to \bar{z}$

(από πριν:
$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow T$ γραμμικό και ως προς $\mathbb{R}$ και ως προς $\mathbb{C}$)

(1) $f(z) = z$

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{z-z_0}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} 1 = 1.$$

Άρα ∃ η μιγαδική παράγωγος παντού.

Αλλιώς: Αν $z = x+iy$
$f(z) = z = x+iy = u+iv$, $u = x$, $v = y$ και $\begin{pmatrix} u_x = 1 & u_y = 0 \\ v_x = 0 & v_y = 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ συνθήκη 3 $\Rightarrow$ ✓
Κ-R. παντού

2) $f(z)=z^2$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{z^2-z_0^2}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0} z+z_0=2z_0$$

Δ άρα παντού έχει μιγαδική παράγωγο.

$z=x+iy \quad , x,y\in\mathbb{R}$

$z^2=x^2-y^2+2ixy$

$u=x^2-y^2 \qquad v=2xy$

$$\left|\begin{matrix} u_x=2x & u_y=-2y \\ v_x=2y & v_y=2x \end{matrix}\right|$$

άρα έχω μιγαδική παράγωγο και

$f'(z)=2x+i2y=2z$.

3) $f(z)=\bar{z}$

$z=x+iy \qquad u=x$

$f(z)=x-iy \qquad v=-y$

$$\left|\begin{matrix} u_x=1 & u_y=0 \\ v_x=0 & v_y=-1 \end{matrix}\right|$$

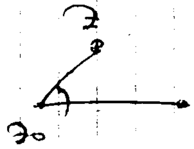
$\Downarrow$ δεν έχει μιγαδική παράγωγο σε κανένα σημείο.

__αλλιώς__

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\bar{z}-\bar{z}_0}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{\overline{(z-z_0)}}{z-z_0}$$

$z-z_0=|z-z_0|\,e^{i\theta}=r\cdot e^{i\theta} \quad , r=|z-z_0|$

Οπότε $\overline{z-z_0}=r\cdot e^{-i\theta}$



$\dfrac{\overline{z-z_0}}{z-z_0}=e^{-i2\theta} \quad , \lim e^{-2i\theta}=;$

Αν υπήρχε θα υπήρχε και σε κάθε περιοχή του $\mathbb{C}$.

Α θεωρώ μονοπάτι ώστε $\theta=$ σταθερό.

Α θεωρώ μονοπάτι με $\theta=\tilde{\theta}\neq\theta \to \lim e^{-2i\theta}=e^{-i2\tilde{\theta}}$ $\quad \lim e^{-2i\theta}=e^{-i2\theta}$ Άρα $\nexists \lim$

λ) $F(z) = |z|^2$

$z = x+iy$, $F(z) = x^2+y^2$

$u = x^2+y^2$, $v = 0$

$$\begin{vmatrix} u_x = 2x & u_y = 2y \\ v_x = 0 & v_y = 0 \end{vmatrix}$$

Για να έχω μιγαδική παράγωγο πρέπει $\underline{x=y=0}$

Άρα αυτή υπάρχει μόνο στο $z_0=0$.

↓ και $F'(0)=0$.

Για $z_0 \neq 0$ δεν υπάρχει μιγαδική παράγωγος.

$F:\Omega\to\mathbb{C}$ συνάρτηση

$z_0\in\Omega$.

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

1) $\exists\, F'(z_0)\in\mathbb{C}$

2) $\exists\, \varphi_{z_0}:\Omega\to\mathbb{C}$ συνάρτηση συνεχής στο z_0 ώστε

$$F(z)-F(z_0) = (z-z_0)\cdot\varphi_{z_0}(z) \quad \forall\, z\in\Omega$$

Όταν τα προηγούμενα ισχύουν τότε $F'(z_0)=\varphi_{z_0}(z_0)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1) ⇒ 2)

$\exists\, F'(z_0)$ άρα $\lim_{z\to z_0}\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}=F'(z_0)\in\mathbb{C}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi_{z_0}:\Omega\to\mathbb{C}$

$$\varphi_{z_0}(z)=\begin{cases}\dfrac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}, & z\in\Omega,\ z\neq z_0\\ F'(z_0), & z=z_0\end{cases}$$

2) ⇒ 1)

$z\in\Omega$, $z\neq z_0$

$$\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} = \frac{\cancel{(z-z_0)}\cdot\varphi_{z_0}(z)}{\cancel{z-z_0}} = \varphi_{z_0}(z) \xrightarrow[z\to z_0]{} \varphi_{z_0}(z_0)\in\mathbb{C}$$

Άσκηση

→ Θ. Συνθέσεως

$\exists f'(z_0)$

$\Leftrightarrow \exists \varphi: \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής στο z_0 ώστε $f(z)-f(z_0)=(z-z_0)\cdot\varphi(z)$ $\forall z\in\Omega$

τότε $\varphi(z_0)=f'(z_0)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν $\exists f'(z_0)$ τότε η f είναι συνεχής στο z_0

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)-f(z_0)] = \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}(z-z_0) = \underbrace{\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}_{=f'(z_0)}\cdot\underbrace{\lim_{z\to z_0}(z-z_0)}_{=0}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ: $\Omega\subset\mathbb{C}$ ανοικτό $\alpha\in\Omega$. $f,g:\Omega\to\mathbb{C}$ που έχουν μιγαδική παράγωγο στο α. $\lambda\in\mathbb{C}$ τότε

i) $f+g$, λf, $f\cdot g$ έχουν μιγαδ. παράγωγο στο α και

$(f+g)'(\alpha)=f'(\alpha)+g'(\alpha)$, $(\lambda f)'=\lambda f'(\alpha)$, $(fg)'(\alpha)=f'(\alpha)g(\alpha)+f(\alpha)g'(\alpha)$.

ii) $\frac{f}{g}$ έχει μιγαδική παράγωγο στο α και $\left(\frac{f}{g}\right)'(\alpha)=\frac{f'(\alpha)g(\alpha)-f(\alpha)g'(\alpha)}{g^2(\alpha)}$

Απόδειξη

για το $(f\cdot g)$ με παρατήρηση Καραθεοδωρή.

$f(z)-f(\alpha)=(z-\alpha)\varphi(z)$, φ συνεχής στο α και $\varphi(\alpha)=f'(\alpha)$

$g(z)-g(\alpha)=(z-\alpha)\psi(z)$, ψ συνεχής στο α και $\psi(\alpha)=g'(\alpha)$

πολ/με κατά μέλη

$$f(z)g(z)-f(\alpha)g(\alpha)+2f(\alpha)g(\alpha)-g(\alpha)f(z)-f(\alpha)g(z)=$$
$$=(z-\alpha)^2\varphi(z)\psi(z).$$

$$\Rightarrow f(z)g(z)-f(\alpha)g(\alpha)=(z-\alpha)^2\varphi(z)\psi(z)+g(\alpha)\underbrace{\big(f(z)-f(\alpha)\big)}_{=(z-\alpha)\varphi(z)}+f(\alpha)\underbrace{\big(g(z)-g(\alpha)\big)}_{=(z-\alpha)\psi(z)}$$

$$\Rightarrow f(z)g(z)-f(\alpha)g(\alpha)=(z-\alpha)\underbrace{\left[(z-\alpha)\varphi(z)\psi(z)+g(\alpha)\varphi(z)+f(\alpha)\psi(z)\right]}_{=\omega(z)}$$

$\omega(z)$ συνεχής στο α και $(fg)'(\alpha)=\omega(\alpha)=g(\alpha)\underbrace{\varphi(\alpha)}_{=f'(\alpha)}+f(\alpha)\underbrace{\psi(\alpha)}_{=g'(\alpha)}$

Σύνθεση συναρτήσεων

$\Omega, G \subset \mathbb{C}$ ανοιχτά, $\alpha \in \Omega$

$f: \Omega \to G$ $\exists\, f'(\alpha)$, $g'(f(\alpha))$

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & G \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Τότε $\exists\, (g\circ f)'(\alpha) = f'(\alpha)\cdot g'(f(\alpha))$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$f(z) - f(\alpha) = (z-\alpha)\,\varphi(z)$ φ συνεχής στο α και $\varphi(\alpha) = f'(\alpha)$.

$g(w) - g(f(\alpha)) = (w - f(\alpha))\,\psi(w)$, ψ συνεχής στο $f(\alpha)$ και $\psi(f(\alpha)) = g'(f(\alpha))$

Για $w = f(z)$: $g(f(z)) - g(f(\alpha)) = (f(z) - f(\alpha))\,\psi(f(z)) =$

$$= (z-\alpha)\,\underbrace{\varphi(z)\cdot\psi(f(z))}_{\omega(z)}$$

$\omega(z)$ συνεχής (σύνθεση και γινόμενο συνεχών)

$(g\circ f)'(\alpha) = \omega(\alpha) = \varphi(\alpha)\cdot\psi(f(\alpha)) = f'(\alpha)\cdot g'(f(\alpha))$

2η απόδειξη

$$\frac{g(f(z)) - g(f(\alpha))}{z-\alpha} \overset{\text{αν } f(z)\neq f(\alpha)}{=} \frac{g(f(z)) - g(f(\alpha))}{f(z) - f(\alpha)} \cdot \frac{f(z) - f(\alpha)}{z-\alpha} \quad \text{κτλ.}$$

όμως $f(z) \neq f(\alpha) = ;;;$

$A = \{z \in \Omega : f(z) \neq f(\alpha)\}$ $B = \{z \in \Omega : f(z) = f(\alpha)\}$

$A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \Omega$

$\alpha \in \Omega$, άρα $\exists$ ακολουθία z_n στο A ή στο B (ή και στα δύο) ώστε $z_n \to \alpha$

Περιπτώσεις:

α) α σ.σ.σ. του A και α όχι σ.σ. του B

β) α σ.σ.σ. του B και α όχι σ.σ.σ. του A

γ) α σ.σ.σ. και του A και του B

• Για το α → $\displaystyle\lim_{\substack{z\to\alpha \\ z\in\Omega}} = \lim_{\substack{z\to\alpha \\ z\in A}}$ → άρα μπορώ να διαιρέσω και να συνεχίσω την απόδειξη

• Αν ισχύει το β, $\lim\limits_{\substack{z\to\alpha \\ z\in\Omega}} = \dots = \lim\limits_{\substack{z\to\alpha \\ z\in B}} = 0$

Και $f'(\alpha)\cdot g'(f(\alpha)) = ;$ Όμως και $f'(\alpha)=0$ Άρα $0=0$ και οκ

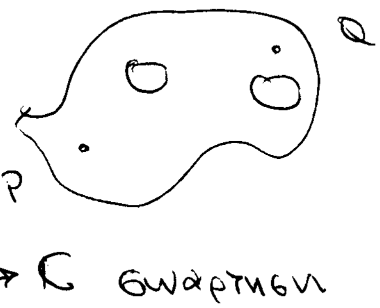
• Αν ισχύει το γ Κοιτάμε χωριστά τα $\lim\limits_{\substack{z\to\alpha \\ z\in A}}$ και $\lim\limits_{\substack{z\to\alpha \\ z\in B}}$ κι εξετάζουμε αν είναι ίσα.

$\lim\limits_{\substack{z\to\alpha \\ z\in B}} = 0$. Αρκεί λοιπόν $\lim\limits_{\substack{z\to\alpha \\ z\in A}} = 0$. ⟵ μετά???

1) $\Omega\subset\mathbb{C}$ ανοιχτό, $\alpha\in\Omega$
$f:\Omega\to\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ και $\exists f'(\alpha)$.
Τότε $f'(\alpha)=0$.

$f = u+iv$ όπου $v=0$. (f παίρνει πραγματικές τιμές).
~~Αφ~~ αφού $\exists f'(\alpha) \Rightarrow u_x = v_y$ και $u_y=-v_x$
Όμως $v=0 \Rightarrow u_x=0,\ u_y=0$. Και από Θ. Cauchy-Riemann:
$f'(\alpha)=u_x(\alpha)+iv_x(\alpha) = 0$

2) $g: \Omega\to\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$, $\Omega\subset\mathbb{C}$ ανοιχτό συνεκτικό (τόπος)
$\exists\ g_x, g_y$ και $g_x\equiv 0$, $g_y\equiv 0$
$\Rightarrow g$ σταθερή στο Ω



<u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u> $\Omega\subset\mathbb{C}$ ανοιχτό και $f:\Omega\to\mathbb{C}$ συνάρτηση
Η f λέγεται ολόμορφη στο Ω αν $\forall z\in\Omega$ υπάρχει σε $\mathbb{C}$ το $f'(z)$

<u>Ερώτηση</u>: Τι γίνεται αν Ω όχι ανοιχτό
↳ Θεωρώ μεγαλύτερη ανοιχτή περιοχή στην οποία είναι ολόμορφη

3) Ω τόπος

$f: \Omega \to \mathbb{C}$ συνάρτηση

$f'(z)=0 \quad \forall z \in \Omega$

$\Rightarrow f$ σταθερή

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $f=u+iv$

$u=\mathrm{Re} f, \quad v=\mathrm{Im} f$

$u_x=v_y$

$u_y=-v_x$

$f'(z)=u_x+iv_x=0 \Rightarrow u_x=v_x=0.$

4) Ω ανοιχτό $\subset \mathbb{C}$

f, g ολόμορφες στο Ω, $\lambda \in \mathbb{C}$.

$\Rightarrow f+g, \ \lambda f, \ fg$ ολόμορφες στο Ω.

$\Rightarrow f/g$ ολόμορφη στο $\Omega \setminus \{z \in \Omega : g(z)=0\}$

$\{z \in \Omega : g(z)=0\} = g^{-1}(\{0\})$

Ολόμορφα όλα τα πολυώνυμα κι οι ρητές συναρτήσεις

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ακέραια λέγεται μία συνάρτηση ολόμορφη σ' όλο το $\mathbb{C}$.
(πχ. τα πολυώνυμα)

$e^z=e^x(\cos y+i\sin y), \quad z=x+iy, \quad x,y \in \mathbb{R}$

$u=e^x\cos y, \quad v=e^x\sin y$

$u_x=e^x\cos y \qquad u_y=-e^x\sin y$

$v_x=e^x\sin y \qquad v_y=e^x\cos y$

$\left.\begin{matrix} u_x=v_y \\ u_y=-v_x \end{matrix}\right\}$ Άρα $\exists$ η μιγαδική παράγωγος $\forall z$.

$(e^z)'=u_x+iv_x=e^x\cos y+ie^x\sin y=e^z$

Άσκηση: Οποιαδήποτε συνάρτηση f ακέραια με $f'(z)=f(z)$ και $f(0)=1$ είναι η e^z.

Λύση άσκησης:

Πρέπει: $\frac{F(z)}{e^z} \equiv 1 \Leftarrow \frac{F(z)}{e^z}$ σταθερή εν $\mathbb{C}$ και $\frac{F(0)}{e^0} = \frac{1}{1} = 1$

$$\left(\frac{F(z)}{e^z}\right)' = \frac{\overbrace{F'(z)}^{/\!/\, F(z)} \cdot e^z - F(z)e^z}{(e^z)^2} = 0$$

Άσκηση: $\Omega \subset \mathbb{C}$ τόπος. $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη

1) Αν $f(\Omega) \subset \mathbb{R} \Rightarrow f$ σταθερή

2) Αν $f(\Omega)$ περιέχεται σε ευθεία $\Rightarrow f$ σταθερή.

Αν ε ευθεία μπορώ να θεωρήσω $T = Aw + B$, $A \neq 0$ ώστε $T(\varepsilon) = \mathbb{R}$.

Αν $g = Af + B$, τότε g ολόμορφη

Επομένως $g =$ σταθερή $c \Rightarrow f = \frac{c-B}{A}$ σταθερή

3) Αν $f(\Omega)$ περιέχεται στη μοναδιαία περιφέρεια $T = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$ τότε f σταθερή

$|f(z)|^2 = 1$, $\bar{f}(z) \cdot \underset{\neq 0\ \forall z.}{f(z)} = 1 \quad \forall z \in \Omega$

Άρα:

$\bar{f}(z) = \frac{1}{f(z)}$ ολόμορφη

$\mathrm{Re} f = \frac{f + \bar{f}}{2}$ ολόμορφη στο Ω

$\Downarrow$ από το (i) ότι $\mathrm{Re} f$ σταθερή

Ομοίως, $\mathrm{Im} f = \frac{f - \bar{f}}{2i}$ ολόμορφη $\Rightarrow$ απ' το (i) σταθερή.

Άρα η f είναι σταθερή

4) Αν $f(\Omega)$ περιέχεται σε περιφέρεια τότε f σταθερή

Αν φ η περιφέρεια: $T \to Az + B$, $z \in \varphi$

Άρα θεωρώ $g = Af + B$ τότε $g \in$ μοναδιαία κι απ' το 3 έπεται το ζητούμενο

5) Αν Re f, Im f είναι κλάσης C^1 και $[f(\Omega)]^\circ = \emptyset$ τότε f σταθερή. (40)

Δοκιμάστε: το διαφορικό είναι 0.

$f = u + iv$

$\varphi = |f'|^2$

Αν στο z_0, $f'(z_0) \neq 0$ τότε (από θεώρημα αντιστροφής) $\exists$ ανοιχτός δίσκος U $(z_0 \in U)$ ώστε $f(U) \supseteq V$, όπου V περιοχή του $f(z_0)$.

$\exists$ U, V ανοιχτά και συνεχής, $z_0 \in U$, $f: U \to V$ 1-1, f^{-1} συνεχής, διαφορίσιμη, τότε $f(U)$ ανοιχτό

Όμως ~~...~~ V δε μπορεί να ανήκει στο $f(\Omega)$ αφού $[f(\Omega)]^\circ = \emptyset$.

Άρα $f'(z_0) = 0$ $\forall$ z_0 και επομένως f σταθερή

6) $\Omega, G \subset \mathbb{C}$ ανοιχτά

$f: \Omega \to G$ ολόμορφη

$g: G \to \mathbb{C}$ ολόμορφη

Τότε $g \circ f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και $(g \circ f)'(z) = f'(z)\, g'(f(z))$

ΠΡΟΤΑΣΗ: $\Omega, G \subset \mathbb{C}$ ανοιχτά

$f: \Omega \to G$ συνεχής

$g: G \to \mathbb{C}$ ολόμορφη

$g'(w) \neq 0$ $\forall w \in G$

$g(f(z)) = z$ $\forall z \in \Omega$

Τότε η f είναι ολόμορφη ~~...~~ στο Ω και $f'(z) = \dfrac{1}{g'(f(z))}$ $\forall z \in \Omega$

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "f \text{ συνεχής}"] \arrow[dr, "g \circ f = Id"'] & G \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

g ολόμορφη

$g'(w) \neq 0$

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "f \text{ συνεχής}"] \arrow[dr, "e^{f(z)} = z"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "g(z) = e^z"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

$g'(z) \neq 0$

Αν πάρω σε κάποιο ανοιχτό Ω ~~...~~ να βρω f ώστε $g \circ f = Id$ και f συνεχής (εδώ $g = e^z$)

Τότε f ολόμορφη και

$f'(z) = \dfrac{1}{g'(f(z))} = \dfrac{1}{e^{f(z)}} = \dfrac{1}{z}$

Δηλ. αν κάνω συνεχές ξεδιάλεγμα του λογαρίθμου τότε θα είναι και ολόμορφη συνάρτηση.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$g(w) - g(f(\alpha)) = \varphi(w)\,(w - f(\alpha))$$

φ συνεχής στο G
$\varphi(f(\alpha)) = g'(\alpha) \neq 0$

Για $w = f(z)$ έχω:

$$g(f(z)) - g(f(\alpha)) = \varphi(f(z))\,(f(z) - f(\alpha))$$

$$(z - \alpha) = \varphi(f(z))\,(f(z) - f(\alpha))$$

αν $\varphi(f(z)) \neq 0$ σε μια περιοχή.

$$\Rightarrow f(z) - f(\alpha) = (z-\alpha) \cdot \underbrace{\frac{1}{\varphi(f(z))}}_{\omega(z)}$$

— όπου $\varphi(f(\alpha)) \neq 0$

Οπότε η $\omega(z)$ κοντά στο α ορίζεται κι είναι συνεχής.

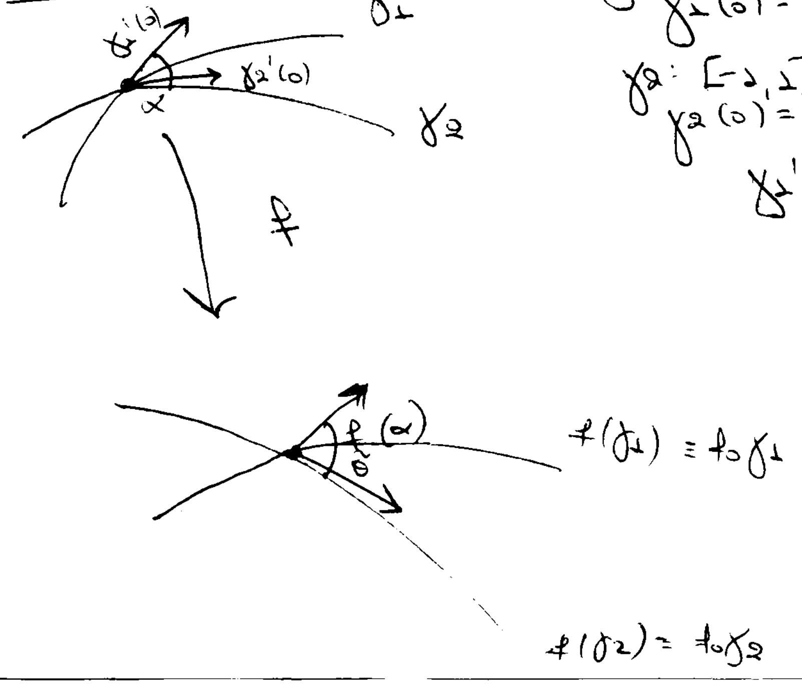
Άρα έχω μιγαδική παράγωγο στο α. (από προτ. Καραθεοδωρή → τοπικά ορίζεται σελ 8 αλλιώς)

$$f'(\alpha) = \omega(\alpha) = \frac{1}{\varphi(f(\alpha))} = \frac{1}{g'(f(\alpha))}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό, $\alpha \in \Omega$. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ συνάρτηση και $\exists\, f'(\alpha) \neq 0$.

Τότε η f διατηρεί τις γωνίες στο α.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



$\gamma_1 : [-1,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(0) = \alpha$, $\gamma_1'(0) \neq 0$

$\gamma_2 : [-1,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2(0) = \alpha$, $\gamma_2'(0) \neq 0$

$\gamma_1'(0) \,\hat{,}\, \gamma_2'(0) = \theta$

$$(f \circ \gamma_1)'(0) = \gamma_1'(0) \cdot f'(\alpha) \neq 0$$

$$(f \circ \gamma_2)'(0) = \gamma_2'(0)\, f'(\alpha) \neq 0$$

$\exists$ εφαπτόμενα διανύσματα και μια $\tilde{\theta}$.

συνέχεια.

$$\operatorname{Arg}(\gamma_1'(0)\cdot f'(\alpha)) = \operatorname{Arg}\gamma_1'(0) + \operatorname{Arg} f'(\alpha)$$

$$\operatorname{Arg}(\gamma_2'(0)\cdot f'(\alpha)) = \operatorname{Arg}\gamma_2'(0) + \operatorname{Arg} f'(\alpha)$$

Τότε αφαιρώντας κατά μέλη

$$\operatorname{Arg}(\gamma_1'(0)\cdot f'(\alpha)) - \operatorname{Arg}(\gamma_2'(0)\cdot f'(\alpha)) = \operatorname{Arg}\gamma_1'(0) - \operatorname{Arg}\gamma_2'(0).$$

Συνεπώς διατηρούνται οι γωνίες.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $f = u + iv$ ολόμορφη στο Ω ανοιχτό $\subseteq \mathbb{C}$, $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$, $u, v \in C^2$ στο Ω.

Τότε $u_{xx} + u_{yy} = 0$ στο Ω

$v_{xx} + v_{yy} = 0$ στο Ω.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αφού f ολόμορφη $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} u_{xx} = v_{xy} \\ u_{yy} = -v_{yx} \end{array}$

Τότε:

$u_{xx} + u_{yy} = v_{xy} - v_{yx} = 0$ αφού v C^2.

$v_{xx} + v_{yy} \to$ ομοίως...

Άσκηση: Να βρεθούν όλες οι ακέραιες συναρτήσεις f ώστε

$\operatorname{Re} f = x^2$

Αν $u = x^2$, $u_{xx} = 2$, $u_{yy} = 0$ $\Rightarrow$ $u_{xx} + u_{yy} = 2 \neq 0$.

Άρα $\nexists$ f ολόμορφη με $\operatorname{Re} f = x^2$

ούτε ακέραια αφού $\forall z$ $u_{xx} + u_{yy} \neq 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $u: \Omega \to \mathbb{R}$ κλάσης C^2 με $u_{xx} + u_{yy} = 0$ στο Ω (δηλ. αρμονική). Μία $v: \Omega \to \mathbb{R}$ κλάσης C^2 λέγεται αρμονική συζυγής της u (αν υπάρχει) αν η $f = u + iv$ είναι ολόμορφη στο Ω.

~~Θεώρημα~~ Παρατήρηση. Αν v_1, v_2 δύο αρμονικές συζυγείς της u στον τόπο Ω, τότε $v_1 - v_2 = c$ σταθερά στο Ω.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$u+iv_1$ ολόμορφη στο Ω

$u+iv_2$ ολόμορφη στο Ω

$u-u+i(v_1-v_2) = i(v_1-v_2)$ ολόμορφη στο Ω

$\downarrow$ Παίρνει τιμές στον άξονα $y'y$ των φανταστικών

Έχουμε τόπο μέσω ολόμορφης f να πηγαίνει σε ευθεία.

Από την άσκηση έπεται f σταθερή, άρα $v_1 - v_2 = c$.

→ Η αρμονική συζυγής δεν υπάρχει πάντα.

Αν υπάρχει, κάθε άλλη θα διαφέρει ~~κατά~~ μία σταθερά.

Άσκηση: Έστω $\Omega = \mathbb{C}$, $u = x^2 - y^2$ τότε $v = 2xy + c$, $c \in \mathbb{R}$

$\downarrow$ αρμονική συζυγής.

$\left(f(x+iy) = z^2, \quad z = x+iy \right)$

Λύση

$z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$

$x = \mathrm{Re}\, z = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \mathrm{Im}\, z = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

$$u = \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 = \frac{1}{4}\left[z^2 + \bar{z}^2 + \cancel{2z\bar{z}} + z^2 + \bar{z}^2 - \cancel{2z\bar{z}}\right] =$$

$$= \frac{z^2+\bar{z}^2}{2} = \mathrm{Re}\, z^2$$

Αλλιώς $u = x^2 - y^2$, $u_x = 2x$, $u_y = -2y$

$u_x = v_y$ $\qquad v_y = 2x$, $v_x = 2y$

$u_y = -v_x$

$\Downarrow$

$$v = \int 2y \, dx = 2yx + c(y)$$

$\cancel{2x} = \cancel{2x} + c'(y) \Rightarrow c'(y) = 0$ έπεται $c(y) = c$

Άρα $v = 2xy + c$, $c \in \mathbb{R}$