146

ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ / 10/01/08 / Μάθημα 25

Πολλαπλότητα Πόλων

Έστω το α είναι πόλος για την f

1) $\exists$ $N_1 \geq 1$ και φ ολόμορφη σε δίσκο με κέντρο α με $\varphi(\alpha) \neq 0$ και $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-\alpha)^{N_1}}$ σε δίσκο εκτός από το $z=\alpha$

2) Το σύνολο $\{n<0 : d_n \neq 0\}$ είναι μη κενό και πεπερασμένο

Θέτουμε $N_2 = -\text{ελάχιστο}\{n<0 : d_n \neq 0\}$

Τότε $N_1 = N_2$ μοναδικό και ονομάζεται πολλαπλότητα του πόλου α για την f.

Απόδειξη

$$\varphi(z) = \underset{\neq 0}{c_0} + c_1(z-\alpha) + c_2(z-\alpha)^2 + \dots$$

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-\alpha)^{N_1}} = \frac{c_0}{(z-\alpha)^{N_1}} + \frac{c_1}{(z-\alpha)^{N_1-1}} + \dots \Rightarrow \underline{N_1 = N_2}$$

Μοναδικότητα $\Rightarrow$ από μοναδικότητα αναπτύγματος Laurent για το N_2.

Άλλος τρόπος: Έστω $f(z) = \frac{\tilde{\varphi}(z)}{(z-\alpha)^{\tilde{N}_1}} = \frac{\varphi(z)}{(z-\alpha)^{N_1}}$

με $N_1 > \tilde{N}_1$ τότε πολλαπλασιάζοντας με $(z-\alpha)^{N_1}$ έχουμε:

$$\tilde{\varphi}(z)\cdot(z-\alpha)^{N_1-\tilde{N}_1} = \varphi(z) \overset{(z\to\alpha)}{\Longrightarrow}$$

$$\varphi(\alpha) = 0 \quad \text{Άτοπο γιατί } \varphi(\alpha) \neq 0$$

Παρατήρηση:

Η πολλαπλότητα του πόλου α για την $f(z)$ είναι ίση με την πολλαπλότητα της ρίζας α για την $1/f$.

Αν α πόλος ή επουσιώδης ανωμαλία για την f τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, ώστε $(z-\alpha)^n \cdot f(z)$ να έχει επουσιώδη ανωμαλία στο α.

Αν όμως α ουσιώδης ανωμαλία για την f, τότε και η $(z-\alpha)^N \cdot f(z)$ έχει ουσιώδη ανωμαλία στο α για κάθε $n \in \mathbb{Z}$

Παραδείγματα:

$e^{\frac{z+1}{z-1}}$

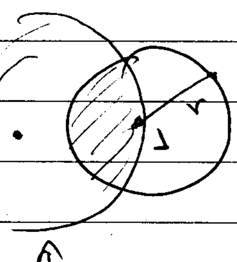
Αν $z: x\in\mathbb{R}$, $\quad x\to 1^+$: $e^{\frac{x+1}{x-1}} \to e^{+\infty} = \infty$

$\quad\quad\quad\quad\quad x\to 1^-$: $e^{\frac{x+1}{x-1}} \to e^{-\infty} = 0$

αλλιώς

$$e^{\frac{z-1+2}{z-1}} = e^{1+\frac{2}{z-1}} = e\cdot e^{\frac{2}{z-1}} = e\left[1+\frac{2}{z-1}+\frac{2^2}{2(z-1)^2}+\dots+\frac{2^n}{n!(z-1)^n}+\dots\right]$$

άπειροι αρνητικοί όροι



ημιδίσκος

Από γνωστό θεώρημα, η εικόνα του $B(1,r)$ είναι πυκνή στο $\mathbb{C}$, άρα μη φραγμένη.
Η $(z-1)e^{\frac{z+1}{z-1}}$ έχει πάλι ουσιώδη ανωμαλία.
Θέτω $g(z)=(z-1)e^{\frac{z+1}{z-1}}$. Τότε $g(B(1,r))$ πυκνό άρα μη φραγμένο.

Στο ημιδίσκο η f είναι φραγμένη:

$$\left|e^{\frac{z+1}{z-1}}\right| = e^{\mathrm{Re}\frac{z+1}{z-1}} = e^{\mathrm{Re}\frac{(z+1)(\bar z-1)}{|z-1|^2}} = e^{\mathrm{Re}\frac{|z|^2+\bar z-z}{|z-1|^2}} = e^{\frac{|z|^2-1}{|z-1|^2}} \le e^0 = 1$$

Άρα είναι φραγμένη στον ημιδίσκο.

Επομένως "στη μισή γειτονιά" του 1 είναι φραγμένη η f.
Όταν το z τείνει στο 1 μόνο μέσα από τον ημιδίσκο δίσκο το όριο της g υπάρχει (μηδενική επί φραγμένη), αλλά συνολικά δεν υπάρχει (ουσιώδης ανωμαλία της g στο 1).

Άσκηση:

1) Έστω $g: \mathbb{C}-\{0\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και φραγμένη. Τότε g σταθερή.
(υπόδειξη → επουσιώδης ανωμαλία)

2) $g: \mathbb{C}-\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και φραγμένη $\Rightarrow$ σταθερή

3) $g: \mathbb{C}-\{0\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη. Να βρεθούν οι ολόμορφες $f: \mathbb{C}-\{0\} \to \mathbb{C}$ ώστε $|f(z)| \leq |g(z)|$ $\forall\, z \neq 0$

!!! Προσοχή → Το μηδέν μπορεί να μην είναι μεμονωμένη ανωμαλία για την $\frac{f}{g}$, $g \not\equiv 0$ (μπορεί όλες οι ρίζες της g να συσσωρεύονται στο μηδέν. Αλλιώς οι ρίζες της g στην αρχή αναλυτικής συνέχισης ή στο 0 ή στο ∞ θα συσσωρεύονται)

Στα σημεία που η g μηδενίζεται (πολλαπλότητα το πλήθος) η $\frac{f}{g}$ έχει μεμονωμένη ανωμαλία και μάλιστα επουσιώδη, καθώς $\left|\frac{f}{g}\right| \leq 1$

Άρα τελικά η $\frac{f}{g}$ ολόμορφη και φραγμένη στο $\mathbb{C}-\{0\}$

Τώρα το 0 είναι μεμονωμένη ανωμαλία (και επουσιώδης). Άρα τελικά $\frac{f}{g}$ ακέραια και φραγμένη και συνεπώς σταθερή.

$\frac{f}{g} = c$, $|c| \leq 1$

$f = c \cdot g$, $|c| \leq 1$

4) $g: \mathbb{C}-\{\mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη $g \not\equiv 0$. Να βρεθούν οι ολόμορφες f στο $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ ώστε $|f(z)| \leq |g(z)|$ $\forall\, z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$

→ όπως πριν.

Αρχικά οι ακέραιοι θα είναι μεμον. ανωμαλίες

Ω τόπος

f, g ολόμορφη στο Ω

$g \not\equiv 0$.

Τότε $\frac{f}{g}$ ολόμορφη ολόμορφη στο $\Omega - \{z \in \Omega : g(z) = 0\}$

Αν $z_0 \in \Omega$ με $g(z_0)=0$ τότε η $\frac{f}{g}$ έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο z_0.

Τότε το z_0 δεν μπορεί να είναι ουσιώδης ανωμαλία για την $\frac{f}{g}$.

Αν $f(z_0)\neq 0$ τότε $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\infty \Rightarrow$ πόλος

Έστω $f(z_0)=0$ και $f\not\equiv 0$

Έχουμε $f(z)=(z-z_0)^{N_1}\cdot q(z)$ με q ολόμορφη στο Ω και $q(z_0)\neq 0$,

$N_1 \to$ η πολλαπλότητα της ρίζας

Άρα $g(z)=(z-z_0)^{N_2}\cdot \omega(z)$ όπου $\omega(z_0)\neq 0$, ω ολόμορφη στο Ω

$$\frac{f(z)}{g(z)}=(z-z_0)^{N_1-N_2}\cdot\frac{q(z)}{\omega(z)} \xrightarrow{z\to z_0} \frac{q(z_0)}{\omega(z_0)}\in\mathbb{C}-\{0\}$$

Οπότε αν $N_1>N_2 \to$ επουσιώδης και μάλιστα ρίζα

αν $N_1<N_2 \to$ πόλος

αν $N_1=N_2 \to$ τείνει στο $\mathbb{C}$, επουσιώδης και όχι ρίζα

Μια τέτοια συνάρτηση $\frac{f}{g}$ λέγεται μερόμορφη

η όπου f, g ολόμορφες

Οι μερόμορφες συναρτήσεις δεν έχουν ουσιώδεις ανωμαλίες

$\propto$

Ο τύπος f, g πολυώνυμα στο Ω, $g\not\equiv 0$

$$\frac{\alpha_0+\alpha_1 z+\ldots+\alpha_N z^N}{t(z-p_1)^{k_1}\cdots(z-p_k)^{N_k}}$$ ρητή συνάρτηση

Οι ρητές συναρτήσεις είναι μερόμορφες

Άσκηση

Έστω $\mathbb{C}-\{z_1,z_2,\dots,z_n\}$ και $f:\mathbb{C}-\{z_1,\dots,z_n\}\to\mathbb{C}$ ολόμορφη.
Υποθέτουμε ότι κάθε z_i είναι ή πόλος ή ουσιώδης ανωμαλία.
$\alpha\in\mathbb{C}-\{z_1,\dots,z_n\}$ τότε σε ένα μικρό δίσκο κέντρου α η f αναλύεται σε δυναμοσειρά. Τότε η ακτίνα σύγκλισης είναι $R=\min\limits_{k=1,\dots,n}|\alpha-z_k|$

Ξέρουμε ότι $R\geq \min\limits_{k=1,\dots,n}|z_k-\alpha|$

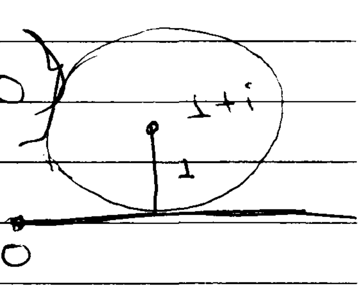
Έστω ότι $R>\min\limits_{k=1,\dots,n}|\alpha-z_k|$ (Θα καταλήξουμε σε άτοπο.)

Τότε η δυναμοσειρά θα ορίζει ολόμορφη συνάρτηση g σε δίσκο που περιέχει το z_0 (από την ελάχιστη απόσταση)
Η g με την f θα συμπίπτουν στο μικρό δισκάκι
Από αρχή αναλυτικής συνέχισης → συμπίπτουν παντού.
Άρα το z_0 ό,τι είδος ανωμαλίας είναι για την f, θα είναι και για την g.
Για την g όμως είναι επουσιώδης. Άτοπο

αλ

Αυτό δεν ισχύει γενικά (ότι δηλαδή η ακτίνα είναι η απόσταση απ' το σύνορο O)

Έστω $\log$ στο $\mathbb{C}-\{$ημιευθεία απ' το $O\}$



Έστω $\alpha=1+i$
Τότε η ακτίνα σύγκλισης είναι $\sqrt{2}$ ενώ η απόσταση απ' το σύνορο είναι 1

Το άπειρο ως μεμονωμένη ανωμαλία

Το άπειρο λέγεται μεμονωμένη ανωμαλία για την f αν υπάρχει $D(c, r, +\infty)$, $c \in \mathbb{C}$, $r>0$ ώστε f ολόμορφη στο $D(c, r, +\infty)$

Τότε έχουμε ανάπτυγμα Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-c)^n$ όπου $a_n = a(f, c, n)$

Παρατήρηση:

Αν υπάρχει ένα τέτοιο c, τότε όλα τα c κάνουν και ειδικότερα μπορώ να πάρω $c=0$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Το είδος της ανωμαλίας στο ∞ ορίζεται να είναι το είδος της ανωμαλίας στο 0 της $f\left(\frac{1}{z}\right)$

(Γενικότερα το c για την $f\left(\frac{1}{z-c}\right)$)

Ανάπτυγμα Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad |z|>r$$

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{-m} z^m$$

Η e^z έχει ουσιώδη ανωμαλία στο ∞

Τελικά μόνο όταν δεν $f=(z-a)^n$;

Άσκηση: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια και 1-1, τότε η f είναι γραμμική, $f = Az+B$, $A \neq 0$

τότε ουσιώδης ανωμαλία στο άπειρο

Απόδειξη

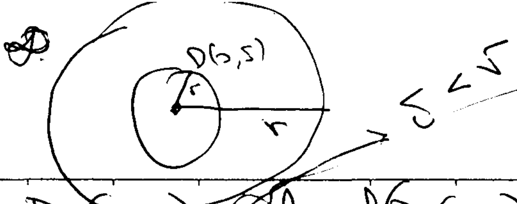
Αφού f ακέραια, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$

Αν άπειροι συντελεστές $\neq 0$, είναι ~~...~~ μη μηδενικοί

Παίρνω περιοχή του απείρου $D(0, r, +\infty)$

$f(D(0, r, +\infty))$ πυκνό

$\to$ πήγαινε στο 1)



2) Έστω και $D(0,s)$. Αν $f(D(0,s))$ περιέχει ανοιχτό μη κενό.
Τότε τέμνει το πυκνό $f(D(0,r,+\infty))$
Τότε $\exists$ ονν $z_1 \in D(0,s)$, $z_2 \in D(0,r,+\infty)$ ώστε $f(z_1)=f(z_2)$
και $z_1 \neq z_2$ ~~Άτοπο~~ Άτοπο (γιατί f 1-1)

1) Η f είναι 1-1 άρα f μη σταθερή, άρα $f' \not\equiv 0$.
Άρα στο $D(0,s)$ μεμονωμένες ρίζες η f'.
$\exists$ z_0 εκεί ώστε $f'(z_0) \neq 0$

Όμως $|f'(z_0)|^2 =$ Ιακωβιανή $\neq 0$. Θεώρημα αντιστροφής
Άρα η εικόνα της $D(0,s)$ περιέχει ανοιχτό
→ Από Θεώρημα αντιστροφής: $\exists$ U ανοιχτό, $z_0 \in U$ και V ανοιχτό ώστε $F: U \to V$ συνεχής και 1-1 και F^{-1} συνεχώς διαφορίσιμη. Δηλ. F και F^{-1} συνεχείς. Συνεπώς F ανοιχτή, $D(0,r)$ ανοιχτό $\Rightarrow f(D(0,r))$ ανοιχτό $\Rightarrow f(D(0,r))$ περιέχει ανοιχτό δισκάκι.

Αν α μεμονωμένη ανωμαλία για την f
$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-\alpha)^n, \quad 0<|z-\alpha|<r$$

Παρατήρηση: Η $\sum_{-\infty}^{-1} c_n (z-\alpha)^n$ συγκλίνει στο $\mathbb{C}-\{\alpha\}$ και ορίζει μία συνάρτηση $f_1(z)=\sum_{-\infty}^{-1} c_n(z-\alpha)^n$ ολόμορφη στο $\mathbb{C}-\{\alpha\}$.
Ακόμη η $f-f_1$ έχει επουσιώδη ανωμαλία στο α.
Για την f_1:
Αν $W=\frac{1}{z-\alpha}$ μετατρέπεται σε Taylor που συγκλίνει από το r και πέρα. Άρα από Λήμμα Abel, συγκλίνει παντού.
και ορίζει ολόμορφη

Πόρισμα: Αν Ω τόπος και $z_1,\dots,z_n \in \Omega$ και
$f: \Omega \setminus \{z_1,\dots,z_n\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη τότε
υπάρχουν $h: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη στο Ω και
$f_j: \mathbb{C} \setminus \{z_j\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, $j=1,\dots,n$
ώστε $f = f_1 + f_2 + \dots + f_n + h$

ΠΕΡ 149

Απόδειξη
ορίζω τις f_j όπως στην Παρατήρηση

No.
Date

Τελικά θεωρώ την $f - f_1 - f_2 - \dots - f_n = h$ της οποίας όλες οι ανώμαλες είναι επουσιώδεις και άρα h ολόμορφη στο Ω.

Έστω γ κλειστή κατά τμήματα C^1 καμπύλη στο $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = ;$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma f_1(z)\,dz + \dots + \int_\gamma f_n(z)\,dz + \int_\gamma h(z)\,dz$$

$$\int_\gamma f_1(z)\,dz = C_{-1}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_1} = 2\pi i\, C_{-1}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_1}$$

και όμοια για τις άλλες f_j

$$\int_\gamma h(z)\,dz = 0 \text{ αν } \Omega \text{ κυρτό}$$

Το C_{-1} εν ονομάζουμε $\text{Res}(f, z_1)$ (ολοκληρωτικό υπόλοιπο)

Άρα $2\pi i\, C_{-1}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_1} = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \text{Res}(f, z_1)\cdot \text{Ind}(\gamma, z_\gamma)$

$$\left(\int_\gamma f(z)\,dz \overset{\Omega \text{ κυρτό}}{=\!=} 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \text{Res}(f, z_j)\,\text{Ind}(\gamma, z_j) \right)$$

<u>Άσκηση</u>: $f : (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \{z_1, \dots, z_n\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και στα z_i έχει πόλους ή επουσιώδεις ανώμαλες. Τότε f ρητή, δηλαδή $f = \frac{p}{q}$, p, q πολυώνυμα, $q \neq 0$

Αν z_1 όχι το άπειρο, το κύριο μέρος της ~~σειράς~~ σειράς είναι: $\sum_{-N_1}^{-1} c_n (z_n - z_1)^n$ (πεπερασμένο γιατί τα z_i είναι πόλοι ή επουσιώδεις)

Αν z_1 είναι το άπειρο, το κύριο μέρος είναι: $\sum_{1}^{N_1} c_n z^n$

Οι ανώμαλες ξεχωρίζονται άρα $f = f_1 + f_2 + \dots + f_n + h$. Τα f_i είναι ρητές όπως είδαμε.

Η h ολόμορφη στο $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ άρα φραγμένη (αφού το $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ είναι συμπαγές) και άρα η σταθερή.

Άρα τελικά η f είναι ρητή

<u>Άσκηση</u>: $f: \underline{\Omega} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ ολόμορφη στον τόπο $\underline{\Omega}$

Το α ⇔ β ⇔ γ

α) $\exists$ g ολόμορφη στο $\underline{\Omega}$ ώστε $f = e^g$

β) Η $\frac{f'}{f}$ έχει παράγουσα στο $\underline{\Omega}$

???

γ) $Ind(f\circ\gamma, 0) = 0$ $\forall \gamma$ κλειστή κατά τμήματα C^1 καμπύλη στο $\underline{\Omega}$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

<u>α ⇒ β</u> $f = e^g$, g ολόμορφη $\Rightarrow f' = e^g g' \Rightarrow f' = f \cdot g' \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{f'}{f} = g'$. Άρα η g είναι παράγουσα της $\frac{f'}{f}$

<u>β ⇒ γ</u>: Αφού η $\frac{f'}{f}$ έχει παράγουσα: $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 0$ $\forall \gamma$. Άρα και $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 0$

Κάνω παραμέτρηση:

$\left(\begin{array}{l} \gamma(t) = z \\ f(\gamma(t)) = f(z) = w \end{array}\right)$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma} \frac{dw}{w} = Ind(f\circ\gamma, 0)$$

β) ⇒ α) $F' = \frac{f'}{f} \overset{?}{\Rightarrow} \exists\, g : f = e^g$

Ψάχνω $c \in \mathbb{C}$ ώστε $g = F + c$

Δηλαδή ψάχνω c ώστε $e^{F+c} = f \Rightarrow e^c = \frac{f}{e^F}$

$e^{F+c} = e^c e^F$

Προφανώς $\left(\frac{f}{e^F}\right)' = \frac{f' e^F - (e^F)' f}{e^{2F}} = \frac{f' e^F - e^F \cdot F' \cdot f}{e^{2F}} = \frac{f' e^F - e^F \frac{f'}{f} f}{e^{2F}} = 0$

Άρα $\frac{f}{e^F}$ = σταθερή e^c και άρα

Βρήκα το c που ήθελα.

γ) ⇒ β) ?

Άσκηση: 1) Αν $\exists\, g$ ολόμορφη στο Ω ώστε $f = e^g$ τότε $\forall n = 1, 2, \ldots$ $\exists\, g_n$ ολόμορφη στο Ω με $(g_n)^n = f$

Απόδειξη

Θέτω $g_n = e^{\frac{1}{n} g}$ και $(g_n)^n = e^{n \cdot \frac{1}{n} \cdot g} = e^g = f$

2) Αν για άπειρα $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν ολόμορφες g_n ώστε $(g_n)^n = f$ τότε υπάρχει ολόμορφη g ώστε $f = e^g$

$f = (g_n)^n$ για άπειρα n

Άρα $\mathrm{Ind}(f \circ \gamma, 0) = \mathrm{Ind}((g_n \circ \gamma)^n, 0) = n \cdot \mathrm{Ind}(g_n \circ \gamma, 0)$

ο δείκτης στροφής είναι ακέραιος. Έχω $k = n \cdot k'$ $\forall n$

Άρα $\boxed{k = 0}$

Επομένως $\mathrm{Ind}(f \circ \gamma, 0) = 0$.