ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ / 20/11/07 / Μάθημα 14

$\alpha < \beta$, $[\alpha, \beta]$

$f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ συνεχής

Ορίζω $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta [\operatorname{Re} f(t)]\,dt + i \int_\alpha^\beta [\operatorname{Im} f(t)]\,dt$

$c = c_1 + i c_2 \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\int_\alpha^\beta c f(t)\,dt = c \int_\alpha^\beta f(t)\,dt = (c_1 + i c_2)\left(\int_\alpha^\beta u\,dt + i \int_\alpha^\beta v\,dt\right) =$$

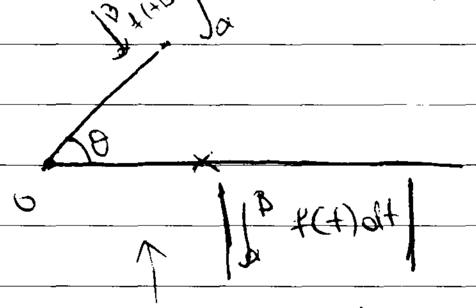
$$\left(\begin{array}{l} \operatorname{Re} f = u, \ \operatorname{Im} f = v \\ c f = (c_1 + i c_2)(u + i v) = c_1 u - c_2 v + i(c_2 u + c_1 v) \end{array}\right)$$

$$\int_\alpha^\beta c f(t)\,dt = c \int_\alpha^\beta f(t)\,dt$$

Πρόταση $\displaystyle\left|\int_\alpha^\beta f(t)\,dt\right| \leq \int_\alpha^\beta |f(t)|\,dt$

Απόδειξη: Αν $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = 0$ τότε προφανές

Έστω $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,dt \neq 0$



στροφή, με $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$ $\quad (c = e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R})$

Υπάρχει λοιπόν $c \in \mathbb{C}$ ώστε $\left|\int_\alpha^\beta f(t)\,dt\right| = c\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$

$$\left|\int_\alpha^\beta f(t)\,dt\right| = \int_\alpha^\beta [c f(t)]\,dt = \int_\alpha^\beta Re(c f(t))\,dt \leq$$

$$= \left|\int_\alpha^\beta Re(c f(t))\,dt\right| \leq \int_\alpha^\beta |Re(c f(t))|\,dt \leq$$

$$\leq \int_\alpha^\beta |c f(t)|\,dt = \underbrace{|c|}_{=1} \cdot \int_\alpha^\beta |f(t)|\,dt$$

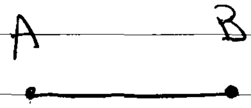
<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Καμπύλη ονομάζεται κάθε συνεχής συνάρτηση $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ ορισμένη σε κάποιο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $\alpha < \beta$

- Η γ ονομάζεται κλειστή καμπύλη αν $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$
- Η καμπύλη $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, $\alpha < \beta$ ονομάζεται κλάσης C^1 αν $\gamma'(t) = (Re\gamma)'(t) + i(Im\gamma)'(t)$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$
- Η καμπύλη $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ με $\alpha < \beta$ λέγεται κατά τμήματα C^1 (στο $[\alpha, \beta]$) αν υπάρχει διαμέριση $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1} < \alpha_n = \beta$ ώστε $\gamma|_{[\alpha_j, \alpha_{j+1}]}$ να είναι κλάσης C^1 στο $[\alpha_j, \alpha_{j+1}]$ $\forall j = 0, \dots, n-1$

<u>Προσοχή</u>: Η γ είναι παντού συνεχής, η $\gamma'(t)$ υπάρχει παντού t διάφορο των $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ και είναι συνεχής εκεί.
~~Σε~~ Στα σημεία α_j υπάρχουν η δεξιά και αριστερή παράγωγοι χωρίς όμως απαραίτητα να είναι ίσες, η αριστερή παράγωγος είναι το όριο εξ' αριστερών. Το ίδιο και στο δεξιά.

<u>Παραδείγματα</u>:

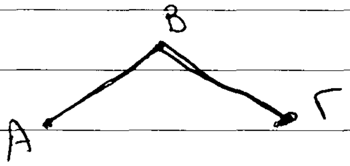
1)



$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = tB + (1-t)A$

$\gamma'(t) = B - A$ σταθερή, άρα η γ είναι C^1.

2)

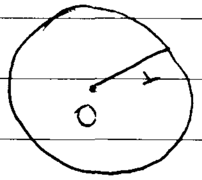


Κατά τμήματα C^1

$\gamma : [0,2] \to \mathbb{C}$

$$\gamma(t) = \begin{cases} tB + (1-t)A, & 0 \le t \le 1 \\ (t-1)\Gamma + (2-t)B, & 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

3)



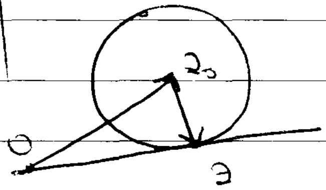
$\gamma\ [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$

$\gamma(t) = e^{it}$

Αν έχω κύκλο z_0 ακτίνα R.

$\gamma\ [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$

$\gamma(t) = z_0 + R \cdot e^{it}$

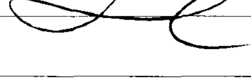


Μήκος καμπύλης: $\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$

(μια κατά τμήματα C^1 καμπύλη έχει πάντα μήκος)

$ds = |\gamma'(t)|\, dt$

για προς αυτό ολοκληρώνω για να βρω το μήκος της καμπύλης σε κάποιο διάστημα



$\gamma(t) = x(t) + iy(t) \equiv (x(t), y(t))$

$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy$

$\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$

$P, Q \quad \gamma([\alpha,\beta]) \to \mathbb{R}$ συνεχής

• $\displaystyle\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_\alpha^\beta \left[P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\right]dt$

(αναπαραμέτρηση με διατήρηση της φοράς δεν αλλάζει το ολοκλήρωμα)

• $\displaystyle\int_\gamma f\,ds = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\cdot|\gamma'(t)|\,dt = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\cdot\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$

(Καμία αναπαραμέτρηση δεν αλλάζει το ολοκλήρωμα)

$f : \gamma([\alpha,\beta]) \to \mathbb{C}$ συνεχής

$\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz, \quad \int_\gamma f(z)\,d\bar{z}, \quad \int_\gamma f(z)\,|dz|$

$|dz| = ds = |\gamma'(t)|\,dt \quad , \alpha<\beta$

$f = u+iv \qquad u = \mathrm{Re} f \;, v = \mathrm{Im} f$

$z = x+iy \;, \; x = \mathrm{Re} z \;, \; y = \mathrm{Im} z$

$f(z)\,dz = (u+iv)(dx+i\,dy) = u\,dx - v\,dy + i(v\,dx + u\,dy)$

$dz = dx + i\,dy$

$\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\gamma v\,dx + u\,dy$

$$\int_\gamma f(z)\,d\bar{z} = \int_\gamma (u+iv)\cdot(dx-i\,dy) =$$
$$= u\,dx - iu\,dy + iv\,dx + v\,dy =$$
$$= u\,dx + v\,dy + (v\,dx - u\,dy)\,i$$

$$\int_\gamma u\,dx + v\,dy + i\int_\gamma v\,dx - u\,dy$$

Πρόταση: $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$

α' τρόπος

$$\int_\alpha^\beta (ux' - vy')\,dt + i\int_\alpha^\beta (vx' + uy')\,dt$$

β' τρόπος: $\int_\alpha^\beta [u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t))][x'(t) + iy'(t)]\,dt$

$$= \int_\alpha^\beta \left(u(\gamma(t))\cdot x'(t) - v(\gamma(t))\cdot y'(t)\right)dt + i\int_\alpha^\beta (vx' + uy')\,dt$$

Άρα έχουμε ισότητα.

Πόρισμα:

$$\left|\int_\gamma f\,dz\right| \le \int_\gamma |f|\,\underset{|dz|}{ds} \le \|f\|_\infty \cdot (\text{μήκος } \gamma)$$

Απόδειξη

Από προηγ. Πρόταση: $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt\right| \le$

$$\le \int_\alpha^\beta |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,dt = \int_\gamma |f|\,\underset{|dz|}{ds}$$

$$\leq \|f\|_\infty \cdot \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)| dt$$

Πόρισμα: $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ κατά τμήματα C^1 καμπύλη

$f, f_n : \gamma([\alpha,\beta]) \to \mathbb{C}$ συνεχείς και $f_n \to f$ ομοιόμορφα επί του $\gamma([\alpha,\beta])$. Τότε $\int_\gamma f_n(z)dz \to \int_\gamma f(z)dz$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$0 \leq \left| \int_\gamma f\, dz - \int_\gamma f_n dz \right| = \left| \int_\gamma (f-f_n)(z)\, dz \right| \leq$$

$$\leq \|f-f_n\|_\infty \,(\text{μήκος } \gamma) \to 0$$

$$\| \quad \sup_{t\in[\alpha,\beta]} |(f-f_n)(\gamma(t))| \to 0$$

$$\int_\gamma f(z) dz$$

Αν f ορίζεται σ' ένα ανοικτό σύνολο που περιέχει το γ και στο οποίο σύνολο η f έχει παράγουσα. ($\exists\, F: F' = f$)

τότε $\int_\gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta F'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt =$

$$= \int_\alpha^\beta (F\circ\gamma)'(t)\,dt = F\circ\gamma(\beta) - F\circ\gamma(\alpha)$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$$

$$\left|\int_\gamma f\,dz\right| \le \int_\gamma |f|\,|dz| \le \|f\|_\infty \cdot \text{μήκος της } \gamma$$

• Αν $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοιχτό και γ κατά τμήματα C^1 στο Ω & $f: \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής και η f έχει παράγουσα στο Ω, δηλ $\exists F: F' = f$ & $F: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, τότε $\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha))$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ:
Έστω $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$

1η περίπτωση: $n \ge 0$

2η περίπτωση: $n \le -2$

3η περίπτωση: $n = -1$ $(\mathbb{C}\setminus\{0\})$

Για την 1η περίπτωση, $F = \dfrac{z^{n+1}}{n+1}$, ολόμορφη στο $\mathbb{C}$

Για την 2η περίπτωση, $F = \dfrac{z^{n+1}}{n+1}$, ολόμορφη στο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

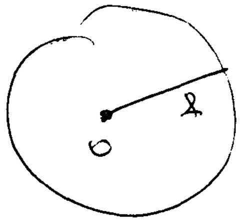
Για την 3η περίπτωση ↘ φαίνεται τοπικά η παράγουσα. Δεν υπάρχει παράγουσα (δεν υπάρχει συνεχές λογάριθμος στο [illegible])

Στην 1η περίπτωση $\int_\gamma z^n\,dz = 0$ $\forall$ κλειστή καμπύλη στο $\mathbb{C}$

Στην 2η " $\int_\gamma z^n\,dz = 0$ $\forall$ " " στο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

Έστω μια καμπύλη κέντρου O περιφέρειας R

$\gamma(t) = Re^{it}$



$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = ;$$

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{Re^{it}}}\cdot i\cancel{Re^{it}}\,dt = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i \ne 0$$

Βρήκα μία καμπύλη στο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ώστε η $f(z)=1/z$ να μην είναι μηδέν άρα συνεπάγεται ότι η $1/z$ δεν έχει παράγουσα στο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

→ Το ~~να εξαρτάται~~ είναι ολοκλήρωμα ~~εξαρτάται~~ μόνο απ' τα άκρα της καμπύλης είναι ισοδύναμο με το να ισούται το ολοκλήρωμα με μηδέν σε κάθε κλειστή καμπύλη.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $f: \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής. Τ.Α.Ε.Ι.:

(1) $\int_\gamma f(z)\,dz$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου στο Ω

(2) Υπάρχει $F: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε $F' = f$ στο Ω

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

2) ⇒ 1) το έχουμε ήδη δείξει

1) ⇒ 2) Σταθεροποιώ z_0 στο Ω. Για z στο Ω θέλω να ορίσω το $F(z)$.

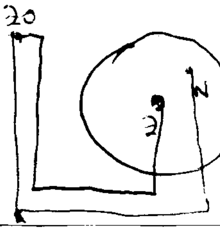
Παίρνω καμπύλη $\gamma(z)$ κατά τμήματα C^1 στο Ω που αρχίζει το z_0 και τελειώνει στο z.

Ορίζω $F(z) = \int_{\gamma(z)} f(\zeta)\,d\zeta$

Αυτό είναι καλά ορισμένο λόγω του (1)

Σταθεροποιούμε $z \in \Omega$ και πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει το $\lim\limits_{w \to z} \dfrac{F(w)-F(z)}{w-z}$ και ισούται με $f(z)$

Έστω $r>0$ και $D(z,r)=\{w\in\mathbb{C} : |z-w|<r\} \subseteq \Omega$



$w \in D(z,r)-\{z\}$

Θεωρώ για $\gamma(w)$ ~~...~~ ένωση της $\gamma(z)$ με το ευθύγραμμο τμήμα z-w (83)

Τότε $F(w)=\int_{\gamma(z)} f(j)\,dj + \int_{[z,w]} f(j)\,dj = F(z) + \int_{[z,w]} f(j)\,dj$

Άρα $\dfrac{F(w)-F(z)}{w-z} = \dfrac{1}{w-z}\cdot\int_{[z,w]} f(j)\,dj = \dfrac{1}{w-z}\int_0^1 f(tw+(1-t)z)\,(w-z)\,dt =$

$j = tw+(1-t)z \quad , t\in[0,1]$

$dj = (w-z)\,dt$

$= \int_0^1 f(tw+(1-t)z)\,dt \simeq f(z)$

Όταν $w\to z$, το $(tw+(1-t)z)$ τείνει στο z και f συνεχής άρα $f(tw+(1-t)z) \to f(z)$

<u>Αυστηρή απόδειξη:</u>

$$\left|\frac{F(w)-F(z)}{w-z} - f(z)\right| = \left|\int_0^1 f(tw+(1-t)z)\,dt - f(z)\right| =$$

$$= \left|\int_0^1 \big(f(tw+(1-t)z) - f(z)\big)\,dt\right| \le \int_0^1 \left| f(tw+(1-t)z) - f(z)\right| dt$$

Παίρνω $|w-z|<\delta$ τότε $\forall\, t\in[0,1]$ $|(tw+(1-t)z)-z|<\delta$

Άρα $\int_0^1 \left| f(tw+(1-t)z) - f(z)\right| dt < \varepsilon \int_0^1 dt = \varepsilon$

(το ε-δ της f συνεχούς) απόδειξη:

$$\left|\frac{F(w)-F(z)}{w-z} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{w-z}\int_{[z,w]} f(\zeta)\,d\zeta - f(z)\right| =$$

$$= \left|\int_{[z,w]} \frac{\big(f(\zeta)-f(z)\big)}{w-z}\,d\zeta\right| \leq \sup_{\zeta\in[z,w]}\left|\frac{f(\zeta)-f(z)}{\cancel{z-w}}\right| \cdot \underset{\cancel{|w-z|}}{\underset{\|}{\text{Μήκος του } [z,w]}} =$$

$$= \sup_{\zeta\in[z,w]} |f(\zeta)-f(z)| \xrightarrow[\text{as } w\to z]{} 0 \quad \text{επειδή } f \text{ συνεχής στο } z$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Cauchy - Goursat

$\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό

$f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και Δ κλειστό τρίγωνο που με το εσωτερικό του περιέχεται στο Ω

Τότε

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$$

↳ θετικά προσανατολισμένο

Απόδειξη του Cauchy.

$f = u+iv$, $u = \mathrm{Re} f$, $v = \mathrm{Im} f$

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta} u\,dx - v\,dy + i\int_{\partial\Delta} v\,dx + u\,dy$$

(Από θεώρημα Green: $\oint_{\partial R} P\,dx + Q\,dy = \iint_R -P_y + Q_x$)

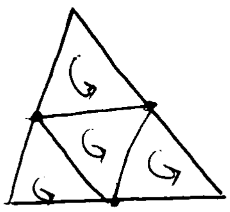
Άρα έχουμε:

$$\iint_\Delta \underbrace{(-u_y - v_x)}_{\equiv\, 0}\,dx\,dy + i\iint_\Delta \underbrace{-v_y + u_x}_{\equiv\, 0} = 0$$

(συνθήκες Cauchy-Riemann αφού f ολόμορφη)

Όμως οι μερικές παράγωγοι δε ξέρω ότι είναι συνεχείς για να εφαρμόσω Θ. Green.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (του Goursat). Έστω $\int_{\partial\Delta} f(z)dz \neq 0$



$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

Υπάρχει τουλάχιστον ένα I_i ώστε

$$\left|\int_{\partial E_1} f(z)dz\right| > 1/4 \left|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\right|$$

Θέτω $E_1 = I_i$ $(E_0 = \Delta)$

Τότε $E_0 \supseteq E_1$ και $\left|\int_{E_1} f(z)dz\right| \geq \frac{1}{4}\left|\int_{E_0} f(z)dz\right|$

Επιπλέον μήκος $\partial E_1 = \frac{1}{2}$ μήκος ∂E_0 και

$\delta(\partial E_1) = \frac{1}{2}\delta(\underset{\partial\Delta}{\underset{\|}{\partial E_0}})$, δ = διάμετρος

Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία στο E_1.

Βρίσκουμε το αντίστοιχο E_2

Έχουμε έτσι $E_0 \supseteq E_1 \supseteq \dots \supseteq E_n \supseteq E_{n+1} \supseteq \dots$

κλειστά τρίγωνα με:

1) $\left|\int_{\partial E_n} f(z)dz\right| \geq \frac{1}{4^n}\int_{\partial\Delta} f(z)dz$

2) μήκος $\partial E_n = \frac{1}{2^n}$ μήκος $\partial\Delta$

3) $\delta(\partial E_n) = \frac{1}{2^n}\delta(\partial\Delta)$

$\bigcap E_n = \{z_0\}$ λόγω πληρότητας

Τώρα, $\left|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\right| \leq 4^n\left|\int_{\partial E_n} f(z)dz\right| \leq 4^n \|f\|_\infty$ μήκος $E_n =$

$= 4^n \|f\|_\infty \frac{1}{2^n}$ μήκος $\partial\Delta$ =

$= 2^n \cdot \|f\|_\infty (\text{μήκος } \partial\Delta) \to \infty$

<u>αλλιώς:</u>

Έστω $\{z_0\} = \cap E_n$. Υπάρχει δ και n_0 ώστε $\forall n \geq n_0$.

$E_n \subseteq B(z_0, \delta)$

Έχουμε: $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$

$$\frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} = \varepsilon_{z_0}(z) \xrightarrow[z \to z_0]{} 0$$

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (z - z_0) \cdot \varepsilon_{z_0}(z)$$

γιατί έχω παράγουσα

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z)dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial E_n} f(z)dz \right| = 4^n \left| \underbrace{\int_{\partial E_n} f(z_0)dz}_{=0} + f'(z_0) \underbrace{\int_{\partial E_n} (z - z_0)dz}_{=0} + \int_{\partial E_n} (z - z_0) \cdot \varepsilon_{z_0}(z)dz \right| \leq$$

$$\leq 4^n \left| \int_{\partial E_n} (z - z_0)\varepsilon_{z_0}(z)dz \right| \leq 4^n \underbrace{(\text{μήκος } \partial E_n)}_{= \frac{1}{2^n} \cdot c} \cdot \underbrace{\delta(E_n)}_{= \frac{1}{2^n} \cdot k} \sup_{z \in \partial E_n} |\varepsilon_{z_0}(z)| =$$

$$\leq c' \sup_{z \in \partial E_n} |\varepsilon_{z_0}(z)| \to 0$$

Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό, $\alpha \in \Omega$

$f : \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής και f ολόμορφη στο $\Omega - \{\alpha\}$.

Δ κλειστό τρίγωνο που με το εσωτερικό του περιέχεται στο Ω.

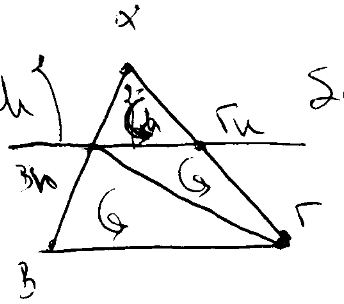
Τότε $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$.

<u>Απόδειξη</u>

· Αν $\alpha \notin \Delta \to$ το ξέρω από πριν.

· Αν $\alpha \in \Delta^\circ$ ή $\alpha \in$ περίγραμμα(Δ) $= ???$

Όλο αυτές οι περιπτώσεις ανάγονται στην περίπτωση "α να είναι κορυφή του τριγώνου". (γιατί;;).



Σε απόσταση h>0 από το α φέρνω παράλληλη στη βγ φέρνω βhγ

$$0 \le \left|\int_{\partial\alpha\beta\gamma} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{\partial\alpha\beta_h\gamma_h} f(z)\,dz\right| \le$$

$$\le \underbrace{\max_{z\in\partial\alpha\beta\gamma}|f(z)|}_{\downarrow \text{ αν } h\to0 \atop C}\cdot \underbrace{\text{μήκος}(\partial\alpha\beta_h\gamma_h)}_{\downarrow \text{ αν } h\to0 \atop 0} \xrightarrow[h\to0]{} 0$$

f συνεχής σε συμπαγές άρα έχει μία μέγιστη τιμή (πεπερασμένη)