Μιγαδική Ανάλυση Ι - Ασκήσεις Ι

1. Έστω $z_1, z_2, \ldots, z_n,\ w_1, w_2, \ldots, w_n$ μιγαδικοί αριθμοί. Δείξτε ότι
$$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w}_j\right|^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} |w_j|^2\right).$$

2. Δείξτε ότι αν ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου $z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0$, τότε $|\rho| < 1 + |c_{n-1}| + \ldots + |c_1| + |c_0|$. (Υπόδειξη: Κατάλληλη χρήση της τριγωνικής ανισότητας.)

3. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$. Δείξτε ότι το αλγεβρικό σύστημα $\{x^3 - 3xy^2 = \alpha, 3x^2y - y^3 = \beta\}$ έχει ακριβώς τρεις λύσεις $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. (Υπόδειξη: Θεωρείστε την εξίσωση $z^3 = w$.)

4. Δείξτε ότι αν οι συντελεστές του πολυωνύμου $c_n z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_0$ είναι πραγματικοί αριθμοί και αν $c_{n-1}^2 < 2c_n c_{n-2}$, τότε μια τουλάχιστον ρίζα του δεν είναι πραγματικός αριθμός.

5. Αν $Q(z)$ είναι ένα πολυώνυμο με διακεκριμένες ρίζες $\rho_1, \ldots, \rho_n$ και $P(z)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $< n$, δείξτε ότι $\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(\rho_k)}{Q'(\rho_k)(z-\rho_k)}$. (Υπόδειξη: Δείξτε ότι τα πολυώνυμα $P(z)$ και $Q(z)\sum_{k=1}^{n} \frac{P(\rho_k)}{Q'(\rho_k)(z-\rho_k)}$ συμπίπτουν για $z = \rho_1, \ldots, \rho_n$.)

6. Έστω $P(z)$ ένα πολυώνυμο. Δείξτε ότι οι ρίζες του πολυωνύμου $P'(z)$ βρίσκονται στην κυρτή θήκη των ριζών του πολυωνύμου $P(z)$.

7. Δείξτε ότι για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ με $\sin\frac{\theta}{2} \neq 0$ ισχύει:
$$\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{N} e^{in\theta}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\theta/2}.$$

8. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $h : \Omega \to \mathbb{R}$ αρμονική συνάρτηση. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(z) = \frac{\partial h}{\partial x}(z) - i\frac{\partial h}{\partial y}(z)$, $z \in \Omega$ είναι ολόμορφη στο Ω. (Εξισώσεις Cauchy-Riemann.)

9. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση. Δείξτε ότι αν $f(z) \in \mathbb{R}$ για κάθε $z \in \Omega$, τότε η f είναι σταθερή. (Εξισώσεις Cauchy-Riemann.)

10. Αν $|z|<1$, δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}\left(1+z^{2^k}\right)=\frac{1}{1-z}.$$

11. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+i}{n^3+in^2+n+i},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(n^4+in+1\right)^2(1+i)^n}{\left(i-\sqrt{3}\right)^n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-i)^n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \text{ και}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-i)^n}{(1+i)^n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

12. Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ και $R=\sup\left\{r\geq 0 : \text{η ακολουθία } |c_n r^n| \text{ είναι φραγμένη}\right\}$. Δείξτε ότι $\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ συγκλίνει για $|z|<R$, ενώ δεν συγκλίνει για $|z|>R$.

13. Αποδείξτε ότι οι δυναμοσειρές $\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ και $\sum_{n=0}^{\infty}nc_n z^n$ έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης.

14. Υπολογίστε την ακτίνα σύγκλισης των δυναμοσειρών: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!+i}{n^n+i}z^n$. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τον τύπο $R=\lim|c_n/c_{n+1}|$.)

15. Έστω $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης $r>0$. Δείξτε ότι αν η συνάρτηση f είναι άρτια τότε $c_{2n+1}=0$ $\forall n\in\mathbb{N}$. (Υπόδειξη: Παραγωγίστε την εξίσωση $f(z)=f(-z)$ και χρησιμοποιείστε τον τύπο $c_n=f^{(n)}(0)/n!$.)

16. Έστω $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης $r>0$. Αν για κάθε $z,w\in\Delta(0,r)$ με $z^3=w^3$ ισχύει ότι $f(z)=f(w)$, δείξτε ότι $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_{3n}z^{3n}$, $z\in\Delta(0,r)$. (Υπόδειξη: Θεωρήστε μια τρίτη ρίζα ρ της μονάδας με $\rho\neq 1$.)

17. Έστω $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης $r>0$. Δείξτε ότι αν $f(x)\in\mathbb{R}$ για κάθε $x\in(-r,r)$, τότε $c_n\in\mathbb{R}$. (Υπόδειξη: $c_n=f^{(n)}(0)/n!$.)

18. Έστω πολυώνυμο $P(z)=c_n z^n+c_{n-1}z^{n-1}+\ldots+c_1 z+c_0$. Θεωρούμε το πολυώνυμο $Q(z)=\bar{c}_n z^n+\bar{c}_{n-1}z^{n-1}+\ldots+\bar{c}_1 z+\bar{c}_0$. Αν $P(z)Q(z)=\alpha_{2n}z^{2n}+\alpha_{2n-1}z^{2n-1}+\ldots+\alpha_1 z+\alpha_0$, δείξτε ότι $\alpha_j\in\mathbb{R}$ για κάθε $j=0,1,\ldots,2n$. (Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την Άσκηση 17.)

19. Έστω $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης $r > 0$. Αν υπάρχει ακολουθία $\{z_m\}$ στο $\Delta(0,r)$ με $z_m \neq 0$ $\forall m$, ώστε $z_m \to 0$ και $f(z_m) = 0$ $\forall m$, δείξτε ότι $f \equiv 0$.

20. Έστω $r > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ το πολυώνυμο

$$P_n(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!}$$

δεν έχει καμία ρίζα στον δίσκο $\Delta(0,r)$. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε ότι $e^z \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$.)

21. Λύστε την εξίσωση $z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots = i$. (Υπόδειξη: $e^z = 1 + i$.)

22. Αποδείξτε ότι για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$,

$$\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$$

$$\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \cos z \sin w.$$

23. Αν $z = x + iy$ $x, y \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$

24. Δείξτε ότι η εξίσωση $\cos z = w$ έχει λύσεις για κάθε $w \in \mathbb{C}$. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη σχέση του Euler $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$.) Δείξτε επίσης ότι το ίδιο ισχύει για την εξίσωση $\sin z = w$.

25. Έστω $f(z) = e^{1/z}$. Δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$, $f[\Delta(0,\epsilon) \setminus \{0\}] = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. (Υπόδειξη: Λύστε την εξίσωση $e^{1/z} = w$.) Διατυπώστε και αποδείξτε κάτι παρόμοιο για τη συνάρτηση $g(z) = \cos(1/z)$.

26. Δείξτε ότι αν $|\cos z + i \sin z| = 1$ τότε $z \in \mathbb{R}$. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη σχέση του Euler $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.)

27. Για $|z| < 1$ υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$. (Υπόδειξη: Παραγωγίστε τη γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.)
Επίσης υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} n r^n \cos(n\theta)$ για $0 < r < 1$ και $\theta \in \mathbb{R}$. (Υπόδειξη: Υπολογίστε πρώτα το άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$ και στη συνέχεια θέστε $z = re^{i\theta}$.)

28. Έστω $f(z) = \frac{z^5}{1+z^4}$. Υπολογίστε την παράγωγο $f^{(21)}(0)$. (Υπόδειξη: Αναλύστε τη συνάρτηση f σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0 και χρησιμοποιήστε τους τύπους $c_n = f^{(n)}(0)/n!$.)

29. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε $\mathrm{Re} f(z) > 0 \ \ \forall z \in \Omega$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση $g : \Omega \to \mathbb{C}$ ώστε $f(z) = e^{g(z)} \ \ \forall z \in \Omega$. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση $\log z$.)

30. Υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-i)^n}{3^n n}$. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το ανάπτυγμα της συνάρτησης $\log(1+z)$.)

31. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα για $|z| < 1$. (Υπόδειξη: Θεωρήστε τα σημεία $z = 1 - \frac{1}{n}, \ \ n = 1, 2, \ldots$)

32. Υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i(i-1)\ldots(i-n+1)}{n!} \left(\frac{i-1}{2}\right)^n$.

33. Υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1) \frac{r^n \cos(n\theta)}{n!}$, όταν $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 < r < 1$ και $\theta \in \mathbb{R}$. Εφαρμογή: $\lambda = 1/2$, $r = 1/\sqrt{3}$ και $\theta = \pi/2$.

34. Έστω $|\alpha| < 1$. Δείξτε ότι η απεικόνιση $\varphi_\alpha : \overline{\Delta}(0,1) \to \mathbb{C}$ με $w = \varphi_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$ παίρνει τιμές στο $\overline{\Delta}(0,1)$, είναι 1-1 και επί με αντίστροφο τη $\varphi_{-\alpha}$. Επίσης, δείξτε ότι $\varphi_\alpha[C(0,1)] = C(0,1)$.

35. Δείξτε ότι η απεικόνιση $w = f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ απεικονίζει σύμμορφα το δίσκο $\Delta(0,1)$ επί του ημιεπιπέδου $\{\mathrm{Re} w > 0\}$.

36. Αποδείξτε ότι όλες οι ρίζες της εξίσωσης $(1+z)^{2n} + (1-z)^{2n} = 0 \ (n \in \mathbb{N})$ είναι οι $z_\kappa = i \tan \frac{2\kappa+1}{4n}\pi$, $\kappa = 0, 1, \ldots, 2n-1$.

37. Έστω (c_n) φραγμένη ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Αποδείξτε ότι

    (a) η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R \geq 1$.

    (b) η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης $\rho = +\infty$.

Μιγαδική Ανάλυση Ι - Ασκήσεις ΙΙ

1. Έχει η συνάρτηση $\frac{1}{z}$ παράγουσα στο σύνολο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$; (Υπόδειξη: Ολοκληρώστε πάνω στον κύκλο $C(0,1)$.) Έχει η συνάρτηση $\frac{1}{z}$ παράγουσα στο σύνολο $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$;

2. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:
$$\frac{1}{2i}\int_{C(0,r)}\overline{z}dz \quad (r>0).$$
Ερμηνεύστε το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Green.

3. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_\gamma \big(\log z\big)^2 dz$, όπου γ καμπύλη που ξεκινά από το σημείο i και καταλήγει στο $-i$ χωρίς να τέμνει την ημιευθεία $\big(-\infty,0\big]$. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τον τύπο $\int_\gamma F'(z)dz = F\big(\gamma(\beta)\big)-F\big(\gamma(\alpha)\big)$.)

4. Έστω $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ ανοιχτό σύνολο, καμπύλη $\gamma:[a,b]\to\Omega$ και $f,g:\Omega\to\mathbb{C}$ ολόμορφες συναρτήσεις. Αποδείξτε ότι:
$$\int_\gamma f(z)g'(z)dz = fg\big|_\gamma - \int_\gamma f'(z)g(z)dz,$$
όπου $fg\big|_\gamma = (fg)\left(\gamma\left(b\right)\right)-(fg)\left(\gamma\left(a\right)\right)$.

5. Έστω f ακέραια συνάρτηση. Αν $a,b\in\mathbb{C}$ με $a\neq b$ και $r>\max\{\,|a|,|b|\,\}$ υπολογίστε το ολοκλήρωμα: $\int\limits_{C(0,r)}\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz$.
Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα που θα βρείτε, αποδείξτε το θεώρημα του Liouville. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy.)

6. Έστω $a,b\in\mathbb{C}$ με $|a|\neq|b|$. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_\gamma\frac{1}{az+b}dz$, όπου $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ με $\gamma\left(t\right)=e^{it}$.

7. Έστω $p(z)$ ένα μη σταθερό πολυώνυμο. Δείξτε ότι $\lim\limits_{|z|\to\infty}\frac{1}{|p(z)|}=0$. Συνδυάζοντας αυτό με το θεώρημα του Liouville, αποδείξτε το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας: Το πολυώνυμο $p(z)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα.

8. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^{2\pi}e^{e^{it}}dt$. (Υπόδειξη: Μετατρέψτε το σε επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.)

9. Αποδείξτε ότι αν $f(z)$ είναι ακέραια συνάρτηση και $|f(z)| \leq A(1+|z|^s)$ για κάθε z, όπου A και s είναι θετικές σταθερές, τότε η συνάρτηση $f(z)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $\leq s$. (Υπόδειξη: Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του θεωρήματος του Liouville.)

10. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοιχτό σύνολο, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση, $\alpha \in \Omega$ και $r > 0$ ώστε $\overline{\Delta}(\alpha, r) \subseteq \Omega$. Αποδείξτε ότι $f(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha + re^{it})\, dt$.

11. Έστω $f : \Delta(0,1) \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση ώστε $|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}$ για κάθε $z \in \Delta(0,1)$. Αν $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad \forall z \in \Delta(0,1)$, αποδείξτε ότι $|c_n| \leq (n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < (n+1)e$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. (Υπόδειξη: Εφαρμόστε τις ανισότητες του Cauchy για τις $f^{(n)}(0)$ και για $r = 1 - \frac{1}{n+1}$.)

12. Έστω $f : \Delta(0,1) \to \Delta(0,1)$ ολόμορφη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι $|f'(z)| \leq \frac{1}{(1-|z|)^2}$ για κάθε $z \in \Delta(0,1)$. (Υπόδειξη: Εφαρμόστε τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy για την $f'(z)$ και για $|z| < r < 1$).

13. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοιχτό σύνολο, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση, $\alpha \in \Omega$, $r > 0$ με $\overline{\Delta}(\alpha, r) \subseteq \Omega$ και $M > 0$ ώστε $|f(\zeta)| \leq M$ για κάθε $\zeta \in C(\alpha, r)$. Αποδείξτε ότι $|f'(z)| \leq \frac{4M}{r}$ για κάθε $z \in \overline{\Delta}(\alpha, r/2)$. (Υπόδειξη: Εφαρμόστε τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy για την f'.)

14. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ένα ανοιχτό και κυρτό σύνολο και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Αν για κάθε κλειστό τρίγωνο $T \subseteq \Omega$,

$$\int_{\partial T} f(\zeta)\, d\zeta = 0,$$

δείξτε ότι η συνάρτηση f έχει παράγουσα στο Ω. Μάλιστα, αν σταθεροποιήσουμε ένα σημείο $\alpha \in \Omega$ και ορίσουμε

$$F(z) = \int_{[\alpha, z]} f(\zeta)\, d\zeta \text{ για } z \in \Omega,$$

τότε η συνάρτηση F είναι ολόμορφη στο Ω και $F' = f$.

15. Δείξτε ότι σε ένα ανοιχτό και κυρτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ κάθε ολόμορφη συνάρτηση έχει παράγουσα.

16. Υπάρχει ακέραια συνάρτηση $f(z)$ με $f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{n}$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ και $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$; (Υπόδειξη: Εφαρμόστε την αρχή της μοναδικότητας.)

17. Έστω $f : \overline{\Delta}(0,1) \to \mathbb{C}$ συνεχής συάρτηση, ολόμορφη στο $\Delta(0,1)$. Δείξτε ότι υπάρχει φυσικός αριθμός n ώστε $f\left(\frac{1}{n}\right) \neq \frac{1}{n+1}$. (Υπόδειξη: Εφαρμόστε την αρχή της μοναδικότητας.)

18. Έστω $f, g : \Delta(0,1) \to \mathbb{C}$ ολόμορφες συναρτήσεις με $f(z) \neq 0$ και $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \Delta(0,1)$, ώστε $\frac{f'(1/n)}{f(1/n)} = \frac{g'(1/n)}{g(1/n)}$, για $n = 1, 2, \ldots$. Αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά $\lambda \in \mathbb{C}$ ώστε $f(z) = \lambda g(z)$ για κάθε $z \in \Delta(0,1)$.

19. Υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ ώστε $f(x) = \log x$ για $x > 0$; (Υπόδειξη: Εφαρμόστε την αρχή της μοναδικότητας.)

20. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφες συναρτήσεις ώστε $f(z)\, g(z) = 0$ για κάθε $z \in \Omega$. Δείξτε ότι είτε $f(z) = 0 \ \ \forall z \in \Omega$ είτε $g(z) = 0 \ \ \forall z \in \Omega$. (Υπόδειξη: Εφαρμόστε την αρχή της μοναδικότητας.)

21. Έστω $f(z)$ ακέραια συνάρτηση ώστε $|f(z)| \leq |\sin z|$ για κάθε z. Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά c ώστε $f(z) = c \sin z \ \ \forall z \in \mathbb{C}$. (Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι οι ρίζες της $\sin z$ είναι επουσιώδεις ανωμαλίες της $\frac{f(z)}{\sin z}$ και εφαρμόστε το θεώρημα του Liouville.)

22. Υπολογίστε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\frac{1}{1 - z - z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Δείξτε επίσης ότι $c_0 = c_1 = 1$ και ότι $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$ για $n \geq 2$. (Υπόδειξη: Για το δεύτερο εφαρμόστε τον τύπο

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz.)$$

23. Έστω $f(z) = \frac{1}{\sin z} e^{\frac{1}{1+z^2}}$. Υπολογίστε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1+2i)}{n!} z^n.$$

24. Έστω $a \neq b$. Γράψτε τη συνάρτηση $\frac{1}{z-b}$ σε σειρά της μορφής $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ για z με $|z - a| < |b - a|$. Το ίδιο για τη συνάρτηση $\frac{1}{(z-b)^2}$.

25. Έστω $a \neq b$. Γράψτε τη συνάρτηση $\frac{1}{z-b}$ σε σειρά της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(z-a)^n}$ για z με $|z-a| > |b-a|$. Το ίδιο για τη συνάρτηση $\frac{1}{(z-b)^2}$.

26. Αναπτύξτε τη συνάρτηση $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ σε σειρά Laurent στο δακτύλιο $1 < |z| < 2$. (Υπόδειξη: Αναλύστε σε απλά κλάσματα και χρησιμοποιείστε τις δυο προηγούμενες ασκήσεις.) Επίσης υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{z^{17}(z-1)(z-2)} \quad \text{και} \quad \int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z^{17}}{(z-1)(z-2)} dz.$$

27. Αναλύστε την $f(z) = \frac{1}{(1-z^3)^2}$ σε σειρά Laurent στο δακτύλιο $\Delta(0,1,\infty)$. (Υπόδειξη: Αναπτύξτε πρώτα τη συνάρτηση $\frac{1}{(1-w)^2}$ και μετά θέστε $w = z^3$.) Επίσης, υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{|z|=2} \frac{z^{13}}{(1-z^3)^2} dz.$$

28. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{(z-1)^3(z-2)^2} \quad \text{και} \quad \int_{|z-1|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{(z-1)^3(z-2)^2}.$$

(Υπόδειξη: Εφαρμόστε το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων.)

29. Δείξτε ότι αν $f \in \mathcal{O}(\Delta(0,1) \setminus \{0\})$ είναι άρτια συνάρτηση, τότε $Res(f,0) = 0$.

30. Δείξτε ότι αν η f έχει ρίζα τάξης m στο α, τότε η $\frac{f'}{f}$ έχει πόλο τάξης 1 με $Res\left(\frac{f'}{f}, \alpha\right) = m$. Δείξτε επίσης ότι αν η f έχει πόλο τάξης m στο α, τότε η $\frac{f'}{f}$ έχει πόλο τάξης 1 με $Res\left(\frac{f'}{f}, \alpha\right) = -m$.

31. Έστω f ακέραια συνάρτηση και κλειστή καμπύλη γ με $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in [\gamma]$. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του ολοκληρώματος $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz$;

32. Δείξτε ότι δεν υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση $f : \Delta(0,1,2) \to \mathbb{C}$ ώστε $z = (f(z))^2 \quad \forall z \in \Delta(0,1,2)$. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την ιδέα της προηγούμενης άσκησης.)

33. Δείξτε ότι $\int_0^\pi e^{\alpha\cos t}\cos(\alpha\sin t)\,dt = \pi$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. (Υπόδειξη: Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{|z|=1} \frac{e^{\alpha z}}{z} dz$.) Στη συνέχεια δείξτε ότι $\int_0^\pi e^{\alpha\cos t}\cos(\alpha\sin t)\,dt = \pi$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{C}$. (Υπόδειξη: Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi e^{\alpha\cos t}\cos(\alpha\sin t)\,dt$ είναι ακέραια συνάρτηση του α και χρησιμοποιείστε την αρχή της μοναδικότητας.)

34. Υπολογίστε τα όρια:

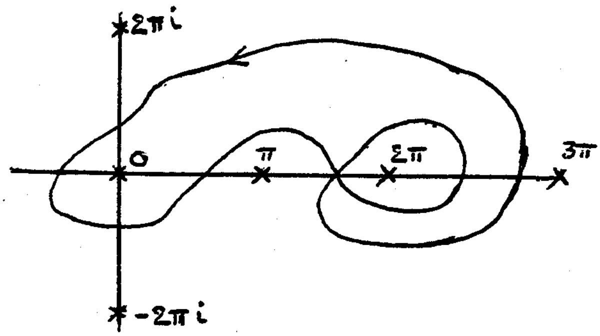
$$\lim_{z\to 0}\frac{(1-\cos z)^2}{(e^z-1-z)\sin^2 z}, \qquad \lim_{z\to 0}\frac{\log(1+z+z^2)}{\sin z},$$

$$\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{z}\right)^z, \qquad \lim_{z\to\pi}\frac{1-\cos(2z)}{(e^{2iz}-1)\sin z}.$$

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τον κανόνα του l' Hospital.)

35. Υπολογίστε το $Res\left(\frac{z}{(e^z-1-z)\sin z}\,,\ 0\right)$.

36. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_\gamma \frac{z\,dz}{(e^z-1)^2\sin z}$, όπου γ είναι μια κλειστή καμπύλη της μορφής:



(Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων.)

37. Υπολογίστε το $Res\left(\frac{1}{z^2\sin z}\,,0\right)$.

38. Υπολογίστε το $Res\left(\frac{1}{z^4\sin^2 z}\,,0\right)$. (Υπόδειξη: Η συνάρτηση $z^4\sin^2 z$ είναι άρτια.)

39. (a) Έστω $r>0$, $g:\Delta(0,0,r)\to\mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση και $m\in\mathbb{N}$ ώστε $|g(z)|\geq\frac{1}{|z|^m}$ για κάθε $z\in\Delta(0,0,r)$. Αποδείξτε ότι το 0 είναι πόλος της g τάξης $\geq m$.

    (b) Έστω f ακέραια συνάρτηση, $n\in\mathbb{N}$ και $R>0$ ώστε $|f(z)|\geq|z|^n$ για κάθε z με $|z|>R$. Αποδείξτε ότι η f είναι πολυώνυμο βαθμού $\geq n$.

40. Έστω f ακέραια συνάρτηση με την ιδιότητα $Ref(z) > 0$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την Άσκηση 35 από τις Ασκήσεις I και το θεώρημα του Liouville. Εναλλακτικά, θεωρείστε τη συνάρτηση $e^{-f(z)}$.)

41. Εξετάστε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{z\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!+1)\, z^n}$$

42. Σε ποιο σύνολο απεικονίζει η εκθετική συνάρτηση e^z το σύνολο $\{0 < Imz < \pi\}$;

43. Κατασκευάστε μια σύμμορφη απεικόνιση από έναν ημιδίσκο σε ένα ημιεπίπεδο.

44. Αν $a, b \in \Delta(0,1)$, βρείτε σύμμορφη απεικόνιση $\varphi : \Delta(0,1) \to \Delta(0,1)$ ώστε $\varphi(a) = b$.

45. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $z^{13} + 13z^9 + 5z^5 + 4z^3 + z + 1$ έχει 9 ρίζες στο δίσκο $\Delta(0,1)$. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το θεώρημα του Rouché.)

46. Έχει η αρμονική συνάρτηση $\log(x^2+y^2)$ αρμονική συζυγή στο σύνολο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; Η ίδια συνάρτηση έχει αρμονική συζυγή στο σύνολο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : y = 0,\ x \leq 0\}$; (Υπόδειξη: Θυμηθείτε τη λογαριθμική συνάρτηση.)

47. Δείξτε ότι η συνάρτηση $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ είναι ολόμορφη για z στο ημιεπίπεδο $Rez > 1$. Δείξτε επίσης ότι $\zeta'(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^z}$.

48. Έστω c_n μια φραγμένη ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{z^n}{1+z^n}$ είναι ολόμορφη για $z \in \mathbb{C}$ με $|z| < 1$. (Υπόδειξη: Πάρτε ένα $r < 1$ και δείξτε την ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς για $|z| \leq r$, με βάση το κριτήριο του Weierstrass, και μετά χρησιμοποιείστε το θεώρημα σύγκλισης του Weierstrass.)

49. Κατασκευάστε μια σύμμορφη απεικόνιση $f : D \to G$ στις ακόλουθες περιπτώσεις:

    (a) $D = \{|z| < 1\}$ και $G = \{0 < Imw < 1\}$.

    (b) $D = \{|z| < 1\}$ και $G = \{0 < argw < \alpha\}$, όπου $\alpha > 0$ είναι μια μικρή γωνία.

    (c) $D = \{0 < Imz < 1\}$ και $G = \{0 < argw < \pi/6\}$.

50. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}, \quad \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2}, \quad \int_0^\infty \frac{x\sin x}{1+x^2}dx$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx \quad \text{και} \quad \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\alpha+\cos t}, \quad \text{όπου} \quad \alpha > 1.$$

51. Αν f είναι ακέραια συνάρτηση και $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$, δείξτε ότι η f είναι πολυώνυμο.

52. Έστω $P(z)$ πολυώνυμο βαθμού ≥ 2. Δείξτε ότι

$$\sum \left\{ Res\left(\frac{1}{P(z)}, \rho\right) : P(\rho) = 0 \right\} = 0$$

(Υπόδειξη: Θεωρήστε το $\lim_{R\to\infty} \int_{|z|=R} \frac{dz}{P(z)}$.)

53. Έστω $P(z)$ πολυώνυμο βαθμού $n \geq 2$ με απλές ρίζες $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$. Δείξτε ότι

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{P'(\rho_j)} = 0.$$

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την προηγούμενη άσκηση.)