Εξετάσεις Μιγαδικής Ανάλυσης Ι (10/9/ 2007)

Θέμα 6, β)

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{C(0,1)} \frac{1}{(e^z-1-z)\,\eta\mu z}\,dz$$

Θεωρούμε την $f(z) = \dfrac{1}{(e^z - 1 - z)\,\eta\mu z}$ επί που

ορίζεται μέσα στο $\mathbb{C}$.

Έστω η $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $g(z) = (e^z - 1 - z)\,\eta\mu z$.

Προφανώς η g είναι ακέραια μη μηδενική

συνάρτηση. Άρα αν $Z(g) := \{ z \in \mathbb{C} \,/\, g(z) = 0 \}$ τότε

$Z(g)' = \phi$. Δηλαδή το σύνολο $Z(g)$ δεν έχει

σημεία συσσώρευσης μέσα στο $\mathbb{C}$. Άρα οι ρίζες

της g είναι μεμονωμένες. Προφανώς η f

είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus Z(g)$. Επίσης το σύνολο

$Z(g) \cap \overline{\Delta(0,1)}$ είναι πεπερασμένο.

Προφανώς το $Z(g)$ περιέχει τις ρίζες και των

δυο εξισώσεων $e^z - 1 - z$ και $\eta\mu z = 0$ και μόνον

αυτές. Οι ρίζες της $\eta\mu z = 0$ είναι οι αριθμοί

$k\pi$ για $k \in \mathbb{Z}$. Απ' αυτές μόνο το 0 βρίσκεται μέσα

στον κύκλο. Θα δείξουμε ότι η εξίσωση $e^z - 1 - z = 0$

δεν έχει καμμία ρίζα στο $\overline{\Delta(0,1)}$ εκτός απο το 0.

Άρα $Z(g) \cap \overline{\Delta(0,1)} = \{0\}$

Άρα $\lim_{z\to 0} g(z) = g(0) = 0$. Άρα

$\lim_{z\to 0} \frac{1}{g(z)} = \lim_{z\to 0} f(z) = \infty$. Άρα η f

έχει πόλο στο 0. Αφού $g(z)\neq 0$ για κάθε

$z\in \Delta(0,1) \setminus \{0\}$ μπορούμε να βρούμε (λόγω συνέχειας της g) ενα $\varepsilon_0>0$ αρκετά μικρό ώστε

$$g(z)\neq 0 \text{ για κάθε } z\in \Delta(0,1+\varepsilon_0)\setminus\{0\}$$

Έτσι η $f: \Delta(0,0,1+\varepsilon_0) \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη

το 0 είναι μεμονομένη (προφανώς) ανωμαλία της f και μάλιστα είναι πόλος. Επειδή το 0 είναι η μοναδική μεμονομένη ανωμαλία της f στο εσωτερικό του κύκλου $C(0,1)$ απο το Θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε οτι

$$\int_{C(0,1)} \frac{1}{(e^{z}-1-z)\,\eta\mu z}\, dz = 2\pi i \cdot Res(f,0) \quad (1)$$

Θα δείξουμε τώρα οτι η εξίσωση $e^{z}-z-1=0$ δεν έχει καμμία ρίζα στο $\Delta(0,1)$ οπότε μετά θα

(24) (93)

υπολογίζουμε το ζητούμενο ολοκλήρωμα
υπολογίζοντας το $Res(f,0)$

Έχουμε:

$$e^{z}-z-1=-1-z+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{n!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^{n}}{n!}=$$

$$= \quad = z^{2}\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^{n-2}}{n!}=$$

$$=z^{2}\cdot\sum_{n-2=0}^{\infty}\frac{z^{n-2}}{((n-2)+2)!}=z^{2}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^{j}}{(j+2)!} \quad (2)$$

Έχουμε τώρα

$$\left|\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^{j}}{(j+2)!}\right|=\left|\frac{1}{2!}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{z^{j}}{(j+2)!}\right|$$

$$\geq\left|\left|\frac{1}{2!}\right|-\left|\sum_{j=1}^{\infty}\frac{z^{j}}{(j+2)!}\right|\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{2}-\left|\sum_{j=1}^{\infty}\frac{z^{j}}{(j+2)!}\right|\right| \quad (3)$$

Έχουμε τώρα για $z \in \overline{\Delta(0,1)}$

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{(j+2)!}\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left|\frac{z^j}{(j+2)!}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j+2)!} = \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots =$$

$$= e - 1 - 1 - \frac{1}{2} \simeq 2,718 - 2,5 \simeq 2,18\dots$$

Άρα $\quad - \left|\sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{(j+2)!}\right| \geq -0,218\ldots \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - \left|\sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{(j+2)!}\right| \geq 0,282\ldots > 0$$

Άρα $\left|\frac{1}{2} - \left|\sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{(j+2)!}\right|\right| = \frac{1}{2} - \left|\sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{(j+2)!}\right| \overset{(4)}{>} 0$

Από τις (2), (3) και (4) $\Rightarrow |e^z - z - 1| > 0$ για κάθε $z \in \overline{\Delta(0,1)} \setminus \{0\}$. Άρα πράγματι η εξίσωση $e^z - z - 1$ έχει μοναδική ρίζα το 0 στο σύνολο $\overline{\Delta(0,1)}$.

Άρα από την (1) για να υπολογίσουμε το ζητούμενο ολοκλήρωμα αρκεί να υπολογίσουμε το $\operatorname{Res}(f, 0)$.

Έχουμε $ημz = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} = z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-2}}{(2n-1)!}$

Θέτουμε $f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-2}}{(2n-1)!}$. Προφανώς η f_1 είναι ακέραια συνάρτηση με $f_1(0) = 1 \neq 0$

Έχουμε ότι

$$f_1(z) = \sum_{(n-1)=0}^{\infty} (-1)^{(n-1)+2} \frac{z^{2(n-1)}}{(2(n-1)+1)!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Έχουμε $\frac{f_1^{(n)}(0)}{n!} = 0$ αν n περιττός

και $\frac{f_1^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!}$ αν n άρτιος.

Άρα $f_1^{(n)}(0)=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n+1}$ αν ο n είναι άρτιος και $f_1^{(n)}(0)=0$ αν ο n είναι περιττός.

Έχουμε επίσης

$$e^z-z-1=-1-z+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=$$

$$=z^2\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^{n-2}}{n!}=z^2\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{(j+2)!}$$

Θεωρούμε την σειρά $f_2(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{(j+2)!}$

Από την παραπάνω ισότητα έπεται ότι η παραπάνω σειρά συγκλίνει για κάθε $z\neq 0$. Άρα η σειρά αυτή ορίζει μια ακέραια συνάρτηση (την f_2) και στο 0 βέβαια

Έχουμε προφανώς ότι $\frac{f_2^{(n)}(0)}{n!}=\frac{1}{(n+2)!}\Rightarrow$

$\Rightarrow f_2^{(n)}(0)=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ για κάθε $n=0,1,2,\dots$

Έχουμε ότι $f_1(z)\neq 0$ και $f_2(z)\neq 0$ για κάθε $z\in\overline{\Delta(0,1)}$ από τα προηγούμενα που είπαμε

Ειδικά $f_1(0) \neq 0$ και $f_2(0) \neq 0$. (97)

Άρα $f_1(z) f_2(z) \neq 0 \ \forall \ z \in \overline{\Delta(0,1)}$. Άρα η συνάρτηση $\dfrac{1}{f_1(z) f_2(z)}$ είναι καλά ορισμένη στο $\overline{\Delta(0,1)}$ δεν μηδενίζεται που θενά στο $\overline{\Delta(0,1)}$ και είναι ολόμορφη σε περιοχή $\Delta(0, 1+\varepsilon_0)$ του $\overline{\Delta(0,1)}$ και μη μηδενική βέβαια σε κάθε $z \in \Delta(0, 1+\varepsilon_0)$ για κάποιο $\varepsilon_0 > 0$ αρκετά μικρό. Άρα έχουμε ότι

$$f(z) = \frac{1}{z f_1(z) \, z^2 f_2(z)} = \frac{1}{z^3} \cdot \left(\frac{1}{f_1(z) f_2(z)} \right) \quad (*)$$

Θέτουμε $\varphi : \Delta(0, 1+\varepsilon_0) \to \mathbb{C}$ με $\varphi(z) = \dfrac{1}{f_1(z) f_2(z)}$

Απο την $(*)$ έχουμε ότι για την f υπάρχει μια ολόμορφη στο $\Delta(0, 1+\varepsilon_0)$ συνάρτηση ώστε $\varphi(0) \neq 0$ και $\varphi(z) \neq 0 \ \forall \ z \in \Delta(0, 1+\varepsilon_0)$ ώστε $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{z^3}$. Αυτό σημαίνει ότι η f έχει πόλο τρίτης τάξης στο 0.

Τότε από γνωστό τύπο έχουμε:

$$Res(f,0) = \frac{1}{(3-1)!} \cdot \lim_{z \to 0} \left(\left(z^3 f(z) \right)'' \right)$$

Άρα από την *) έχουμε ότι

$$Res(f,0) = \frac{1}{2} \cdot \lim_{z \to 0} \varphi''(z).$$

Η φ είναι ολόμορφη στο $\Delta(0, 1+\varepsilon_0)$ άρα είναι άπειρως διαφορίσιμη και άρα $\lim_{z \to 0} \varphi''(z) = \varphi''(0)$. Άρα για να υπολογίσουμε το $\varphi''(0)$ αρκεί να υπολογίσουμε το $\varphi''(z)$, $z \in \Delta(0, 1+\varepsilon_0)$

Έχουμε $\varphi(z) = \frac{1}{f_1 f_2}(z)$. Άρα

$$\varphi' = -\frac{(f_1 f_2)'}{(f_1 f_2)^2} = -\frac{f_1' f_2 + f_1 \cdot f_2'}{(f_1 \cdot f_2)^2}$$

Άρα έχουμε

$$\varphi'' = \left(- \frac{f_1' f_2 + f_1 f_2'}{(f_1 f_2)^2} \right)' =$$

$$= - \left(\frac{(f_1' f_2 + f_1 f_2')' (f_1 f_2)^2 - (f_1' f_2 + f_1 f_2')((f_1 f_2)^2)'}{(f_1 f_2)^4} \right)$$

$$= - \frac{(f_1'' f_2 + f_1' f_2' + f_1' f_2' + f_1 f_2'')(f_1 f_2)^2 - 2 f_1 f_2 (f_1' f_2 + f_1 f_2')^2}{(f_1 f_2)^4} =$$

$$= - \frac{f_1 f_2 (f_1'' f_2 + 2 f_1' f_2' + f_1 f_2'') - 2 (f_1' f_2 + f_1 f_2')^2}{(f_1 f_2)^3}$$

Από την παραπάνω ισότητα για να υπολογίσουμε το $\varphi''(0)$ πρέπει να υπολογίσουμε τα $f_1(0)$, $f_2(0)$, $f_1'(0)$, $f_1''(0)$, $f_2'(0)$, $f_2''(0)$.

Από τα προηγούμενα έχουμε ότι:

$f_1(0) = 1$, $f_1'(0) = 0$, $f_1''(0) = -\frac{1}{3}$. Επίσης

$f_2(0) = \frac{1}{2}$, $f_2'(0) = \frac{1}{6}$, $f_2''(0) = \frac{1}{12}$

Άρα

$$\varphi''(0) = -\frac{f_1(0)\,f_2(0)\left(f_1''(0)\,f_2(0) + f_1(0)\,f_2''(0)\right) - 2\left(f_1(0)\cdot f_2'(0)\right)^2}{\left(f_1(0)\cdot f_2(0)\right)^3} =$$

$$= -\frac{1\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{12}\right) - 2\cdot\left(1\cdot\frac{1}{6}\right)^2}{\left(1\cdot\frac{1}{2}\right)^3} =$$

$$= -\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right) - 2\cdot\frac{1}{36}}{\frac{1}{8}} = -8\cdot\left(\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{12}\right) - \frac{1}{18}\right) =$$

$$= -8\cdot\left(-\frac{1}{24} - \frac{1}{18}\right) = 4\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{9}\right) = 4\cdot\frac{21}{12\cdot 9} =$$

$$= \frac{21}{3\cdot 9} = \frac{7}{9}$$

Άρα $\operatorname{Res}(f,0) = \frac{1}{2}\cdot\varphi''(0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{9} = \frac{7}{18}$

Άρα $\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{1}{(e^{z}-1-z)^{n+2}} = \frac{7\pi}{9}i$.

~.~.

(2)

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

10/7/2---

1. α) Ἔστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ἀνοικτό σύνολο, καμπύλη $\gamma:[a,b]\to\Omega$ καί $f,g:\Omega\to\mathbb{C}$ ὁλόμορφες συναρτήσεις. Ἀποδείξτε ὅτι
$$\int_\gamma f(z)g'(z)\,dz = f\cdot g|_\gamma - \int_\gamma f'(z)g(z)\,dz,$$
ὅπου $f\cdot g|_\gamma = (f\cdot g)(\gamma(b)) - (f\cdot g)(\gamma(a))$.

β) Ὑπολογίστε τό ὁλοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\sigma\upsilon\nu\theta}\,d\theta$.

2. α) (i) Ἔστω $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ σύνολο ἀνοικτό καί κυρτό, $f:\Omega\to\mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση ὥστε $\int_{\partial T} f(z)\,dz=0$ γιά κάθε τρίγωνο $T\subseteq\Omega$. Ἀποδείξτε ὅτι ἡ f ἔχει παράγουσα στό Ω. (ii) Περιγράψτε τά βήματα τῆς ἀπόδειξης ὅτι ἄν $G\subseteq\mathbb{C}$ εἶναι ἀνοικτό σύνολο καί $g:G\to\mathbb{C}$ εἶναι ὁλόμορφη συνάρτηση, τότε ἡ g' εἶναι ἐπίσης ὁλόμορφη.

β) Ἔστω $h(z)=\dfrac{1}{\eta\mu(\pi z)}e^{\frac{1}{1+z^2}}$. Εὕρετε τήν ἀκτίνα σύγκλισης τῆς δυναμοσειρᾶς
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^{(n)}(1+2i)}{n!}z^n.$$

μα **3.** α) Ἔστω $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ ἀνοικτό σύνολο, $f:\Omega\to\mathbb{C}$ ὁλόμορφη συνάρτηση καί $\gamma:[a,b]\to\Omega$ κλειστή καμπύλη μέ $f(\zeta)\neq 0$ γιά κάθε $\zeta\in[\gamma]$. Ἀποδείξτε ὅτι ὁ ἀριθμός $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$ εἶναι ἀκέραιος.

β) Ἔστω $a,b\in\mathbb{C}$ μέ $|a|\neq|b|$. Ὑπολογίστε τό ὁλοκλήρωμα $\displaystyle\int_\gamma\frac{1}{az+b}\,dz$, ὅπου $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{C}:\ \gamma(t)=e^{it}$.

έμα **4.** α) Ἔστω $r>0$, $g:\Delta(0,0,r)\to\mathbb{C}$ ὁλόμορφη συνάρτηση καί $m\in\mathbb{N}$ ὥστε $|g(z)|\geq\frac{1}{|z|^m}$ γιά κάθε $z\in\Delta(0,0,r)$. Ἀποδείξτε ὅτι τό 0 εἶναι πόλος τῆς g τάξης $\geq m$.

β) Ἔστω f ἀκεραία συνάρτηση, $n\in\mathbb{N}$ καί $R>0$ ὥστε $|f(z)|\geq|z|^n$ γιά κάθε z μέ $|z|>R$. Ἀποδείξτε ὅτι ἡ f εἶναι πολυώνυμο βαθμοῦ $\geq n$.

έμα **5.** α) Ἔστω $\{c_n\}$ φραγμένη ἀκολουθία μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Ἀποδείξτε ὅτι (1) ἡ δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ ἔχει ἀκτίνα σύγκλισης $R\geq 1$, καί (2) ἡ δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}z^n$ ἔχει ἀκτίνα σύγκλισης $\rho=+\infty$.

β) Ὑπολογίστε τό ὁλοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}\,dx$.

έμα **6.** α) Ἔστω $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ ἀνοικτό σύνολο, $f:\Omega\to\mathbb{C}$ ὁλόμορφη συνάρτηση, $a\in\Omega$, $r>0$ μέ $\overline{\Delta}(a,r)\subseteq\Omega$, καί $M>0$ ὥστε $|f(\zeta)|\leq M$ γιά κάθε $\zeta\in C(a,r)$. Ἀποδείξτε ὅτι $|f'(z)|\leq\frac{4M}{r}$ για καθε $z\in\overline{\Delta}(a,r/2)$. [Ὑποδ. Ἐφαρμόστε τόν ὁλοκληρωτικό τύπο τοῦ Cauchy γιά τήν f'].

β) Ὑπολογίστε τό ὁλοκλήρωμα
$$\int_{C(0,1)}\frac{1}{(e^{z}-1-z)\,\eta\mu z}\,dz.$$

Ἀπαντῆστε σέ 5 θέματα

Καλή ἐπιτυχία!